Serie1

EXERCICE 1

On considère la fonction g définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x+2}$ et on note C_g sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'origine O.

1. *a.* Calculer $g'(x)$ sur $\mathrm{R} \setminus \{-1\}$.
b. En déduire les variations de g.
c. Déterminer une équation des tangentes à C_g aux points d'abscisses 0 et 3.
2. *a.* Déterminer, les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
b. Peut on en déduire des asymptotes à C_g ?
3. *a.* Déterminer 3 réels a, b et c tels que, sur $\mathrm{R} \setminus \{-1\}$, $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
b. En déduire une asymptote oblique à C_g en $+\infty$ et en $-\infty$, notée Δ, et la position relative de C_g et de Δ.
4. *a.* Pour tout t différent de 0, calculer $g(-1+t) + g(-1-t)$.
b. En déduire, en expliquant, un élément de symétrie de C_g ?
5. En tenant compte des réponses précédentes, représenter C_g sur $[-5 ; 5]$ dans un repère d'unité de longueur 1 cm en abscisses et en ordonnées.
6. Pour quelles valeurs réelles α existe-t-il une tangente à C_g parallèle à la droite d'équation $y = \alpha x$?

Vous pourrez vérifier votre résultat à l'aide de votre graphique.

CORRECTION

1. *a.* $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x+2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$

Soit $u(x) = x^3 - 3x$ et $v(x) = x + 1$ alors $u'(x) = 2x - 3$ et $v'(x) = 1$ donc $g'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(2x-3)(x+1) - (x^2 - 3x)}{(x+1)^2}$

$g'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x^2 - 3x + 2x - 3 - x^2 + 3x}{(x+1)^2}$ soit $g'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$

b. $x^2 + 2x - 3$ s'annule en 1 et -3 donc :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g		↗	$-\dfrac{9}{2}$	↘	‖	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	

c. La tangente a la courbe au point $A(x_0 , g(x_0))$ est une droite de coefficient directeur $g'(x_0)$ qui passe par A

La tangente au point O(0 ; 0) a pour coefficient directeur $g'(0) = -\dfrac{3}{2}$ donc a pour équation $y = -\dfrac{3}{2}x$

La tangente au point A(3 ; 0) a pour coefficient directeur $g'(3) = \dfrac{3}{8}$ donc a pour équation $y = \dfrac{3}{8}x + b$

Cette droite passe par A donc $0 = \dfrac{3}{8} \times 3 + b$ donc $b = -\dfrac{9}{8}$

La tangente au point A(3 ; 0) a pour équation $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{9}{8}$

2. *a.* Déterminer, les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

g est une fraction rationnelle donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} x^2 - 3x = 4$ et $\lim\limits_{x \to -1} 2x + 2 = 0$, il faut donc distinguer les cas $x > -1$ et $x < -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 2x + 2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} 2x + 2 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty$

b. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty$ donc C_g admet pour asymptote la droite d'équation $x = -1$

3. *a.* $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x+2}$ or $ax + b + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$

On veut que $\dfrac{x^2 - 3x}{2x+2} = \dfrac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$ il faut donc que $2[ax^2 + (a+b)x + b + c] = x^2 - 3x$

En égalant les coefficients des termes de même degré, il faut donc que $\begin{cases} 2a=1 \\ 2(a+b)=-3 \\ 2(b+c)=0 \end{cases}$ soit que $\begin{cases} 2a=1 \\ 2b=-4 \\ c=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

soit pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{2}{x+1}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$est asymptote oblique à C_g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = \frac{2}{x+1}$ donc si $x > -1$ alors $g(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2\right) > 0$ donc C_g est au dessus de Δ

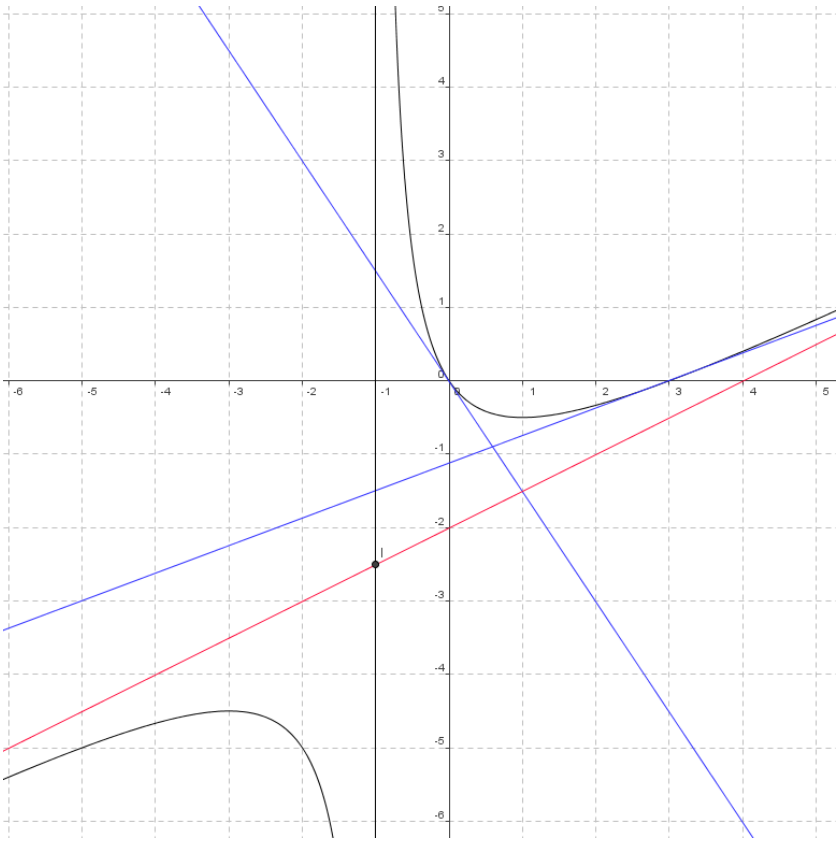
si $x < -1$ alors $g(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2\right) < 0$ donc C_g est en dessous de Δ

4. *a.* $g(-1+t) = \frac{1}{2}(-1+t) - 2 + \frac{2}{-1+t+1} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} - 2 + \frac{2}{t}$

$g(-1-t) = \frac{1}{2}(-1-t) - 2 + \frac{2}{-1-t+1} = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} - 2 - \frac{2}{t}$ donc $g(-1+t) + g(-1-t) = -5$

b. Pour tout t non nul, soit M le point de coordonnées $(-1+t\,;\, g(-1+t))$ et M' le point de coordonnées $(-1-t\,;\, g(-1-t))$
Le milieu de [MM'] a pour coordonnées $\left(\frac{-1+t-1-t}{2}\,;\, \frac{g(-1+t)+g(-1-t)}{2}\right)$ soit $(-1\,;-2{,}5)$ donc le point I $(-1\,;-2{,}5)$ est centre de symétrie de C_g.

5.



6. Une tangente à C_g est parallèle à la droite d'équation $y = \alpha x$ si et seulement si les coefficients directeurs des deux droites sont égaux soit si et seulement si $g'(x) = \alpha$

$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x+)^2} = \alpha \Leftrightarrow \frac{2}{(x+)^2} = \frac{1}{2} - \alpha$ ceci n'est possible que si $\frac{1}{2} - \alpha > 0$ soit si $\alpha < \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - x$

Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Préciser $f(0)$, en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$

Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. Préciser $g(0)$, en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

Déterminer le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$. Préciser $h(0)$, en déduire le signe de $h(x)$

4. *a.* A l'aide des questions précédentes, montrer que sur $[0 ; +\infty[$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

4. *b.* En déduire un encadrement sur $]0 ; +\infty[$ de $\frac{\sin x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}$.

5. A l'aide des questions précédentes, déterminer un encadrement de $\sin x$ sur $]-\infty ; 0]$.

4. *b.* En déduire un encadrement sur $]-\infty ; 0[$ de $\frac{\sin x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}$.

CORRECTION

1. $f'(x) = \cos x - 1$ or $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↘	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$f(0) = 0$ donc si $x < 0$ alors $f(x) \geq 0$ et si $x > 0$ alors $f(x) \leq 0$

2. $g'(x) = -\sin x + x = -f(x)$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	0	↗	
$g(x)$		$+$	0	$+$	

3. $h'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = g(x)$ donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
h		↗	0	↗	
$h(x)$		$-$	0	$+$	

4. *a.* sur $[0 ; +\infty[$: $f(x) \leq 0$ donc $\sin x \leq x$ et $h(x) \geq 0$ donc $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ donc sur $[0 ; +\infty[$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

4. *b.* sur $]0 ; +\infty[$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ soit $x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \leq \sin x \leq x$

$x > 0$ donc $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \frac{x^2}{6} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$ et pour tout $x > 0$: $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

5. sur $]-\infty ; 0]$: $f(x) \geq 0$ donc $\sin x \geq x$ et $h(x) \leq 0$ donc $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6}$ donc sur $]-\infty ; 0]$: $x \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6}$

4. *b.* sur $]-\infty ; 0]$: $x \leq \sin x \leq x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$ donc si $x < 0$: $1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq 1 - \frac{x^2}{6}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} 1 - \frac{x^2}{6} = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$ et pour tout $x > 0$: $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$