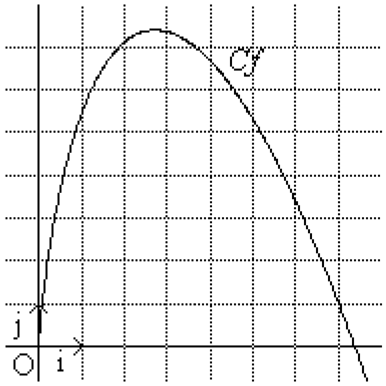
DEVOIRS

DEVOIR1

I - Etude d'une fonction avec logarithme népérien

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = 2ex - ex\ln x$ et C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

(attention e est une constante réelle, ne pas confondre ex et e^x)



1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

   (on rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$)

2) Calculer *f '(x)* et en déduire les variations de *f*.
3) La courbe C_f coupe t- elle l'axe des abscisses ? justifier par le calcul.
4) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 de C_f

II- Etude d'une fonction avec exponentielle

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$.

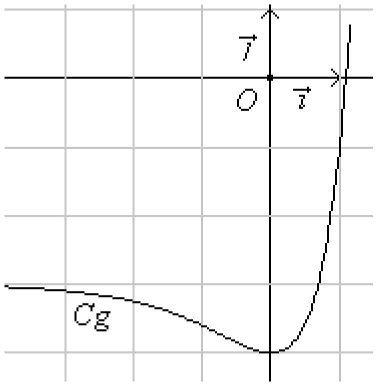
On appelle C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer la limite en - ∞ de g, en donner l'interprétation graphique.
2) Déterminer la limite en +∞ de g (factoriser par e^{2x} pour déterminer la limite)
3) Calculer *f '(x)* et montrer que *f '(x)* est du signe de $(e^x - 1)$.
4) Dresser le tableau de variation de *f* .
5) Montrer que l'équation *g(x) = 0* admet une solution unique sur l'intervalle [0 ; + ∞[

   déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution .

6)Montrer que l'on peut trouver dans ce cas la valeur exacte de la solution de l'équation

g(x) = 0.



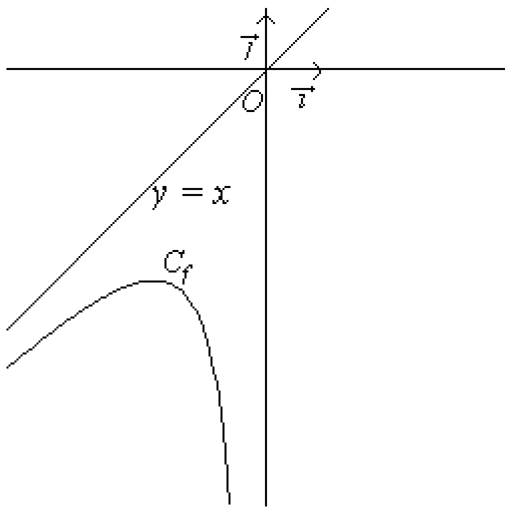
DEVOIR2 correction

I – Problème : étude de fonction

Partie A . On considère le polynôme $p(x)=x^3-3x+2$

1) Démontrer que 1 est racine du polynôme $p(x)=x^3-3x+2$, en déduire que p(x) peut se mettre sous la forme $p(x)=(x-1)(x^2+x-2)$.
2) Etudier le signe de p(x) .

Partie B. Soit la fonction *f* définie sur $]-\infty;0[$ par $f(x)=x+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}$.



(courbe représentative de *f* ci-contre)

1) Calculer *f* '(x) et montrer que $f\,'(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x^3}$
2) Déterminer les variations de *f*. (on pourra utiliser les résultats de la question 2) de la partie A)
3) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse –1 de la courbe représentative de *f*.
4) Etudier la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation y = x. (on pourra étudier le signe de (*f* (x) – x) sur l'intervalle $]-\infty;0[$

II – Nombre complexe : z_1, z_2, z_3 sont trois nombres complexes tels que :

$$z_1 = 1-\sqrt{3}i \text{ , } |z_2| = 2 \text{ et } \arg(z_2) = \frac{-\pi}{4} \quad et \ z_3 = \frac{4i}{z_1}.$$

1) *Mettre les nombres complexes z_2, z_3 sous la forme algébrique.*
2) *Déterminer le module et un argument de z_1 ,et z_3 en déduire leur forme trigonométrique.*
3) *Placer dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$*

   les points $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$.

III –Dérivées : Calculer la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas :

1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2+3x-5\right)^3$

2) f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+4x-2}{x^2-1}$

3) f définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{3x-6}+\dfrac{1}{x}$

DEVOIR3

Etude globale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ et C_f sa courbe représentative .

1) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de *f*,
   en déduire l'existence d'une asymptote D dont on précisera l'équation.
2) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est asymptote à C_f
3) Déterminer la position de C_f par rapport à Δ
4) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ en déduire les variations de *f*
5) Résoudre l'inéquation *f(x) < 9* en donner l'interprétation graphique.
6) Déterminer l'équation de la tangente T au point A d'abscisse 3 de C_f
7) Construire les droites T, D, Δ et la courbe C_f

Etude globale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ et C_f sa courbe représentative .

1) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de *f*,
   en déduire l'existence d'une asymptote D dont on précisera l'équation.
2) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est asymptote à C_f
3) Déterminer la position de C_f par rapport à Δ
4) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ en déduire les variations de *f*
5) Résoudre l'inéquation *f(x) < 9* en donner l'interprétation graphique.

6) Déterminer l'équation de la tangente T au point A d'abscisse 3 de C_f
7) Construire les droites T, D, Δ et la courbe C_f

Etude globale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ et C_f sa courbe représentative .

1) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de *f*,
   en déduire l'existence d'une asymptote D dont on précisera l'équation.
2) Montrer que la droite Δ d'équation $y=x+2$ est asymptote à C_f
3) Déterminer la position de C_f par rapport à Δ
4) Montrer que $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ en déduire les variations de *f*
5) Résoudre l'inéquation $f(x) < 9$ en donner l'interprétation graphique.
6) Déterminer l'équation de la tangente T au point A d'abscisse 3 de C_f
7) Construire les droites T, D, Δ et la courbe C_f

DEVOIR4 correction

I – Etude de fonction :

On considère la fonction *f* définie sur $]1;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Déterminer les coordonnées des points A et B intersections de C_f avec la droite d'équation y = 3.
   A étant des deux points celui dont l'abscisse est la plus petite.
2. Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ en déduire les variations de *f* .
3. Déterminer les équations des droites (T_A) et (T_B) tangentes respectives aux points A et B de la courbe C_f.
4. Montrer que *f(x)* peut s'écrire sous la forme $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x-1}$
5. Etudier la position relative de la courbe C_f. par rapport à la droite (D) d'équation $y = x - 3$

6. Construire dans un même repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm les droites (T_A) et (T_B), la droite (D) et la courbe C_f
7. Existe-t-il un point de la courbe C_f tel que la tangente en ce point est parallèle à la droite (D) ?
   (justifier la réponse par le calcul)

II – Nombre complexe

On considère les nombres complexes : $z_A = -\sqrt{3}+i \quad z_B = -1-\sqrt{3}i$

1) Déterminer le module et un argument de z_A et de z_B

2) Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ placer les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B

3) Déterminer la nature du triangle OAB

4) Mettre le nombre complexe $z_A{}^2 \times z_B$ sous la forme algébrique.

III – Fonctions dérivées

Calculer la dérivée de la fonction *f*

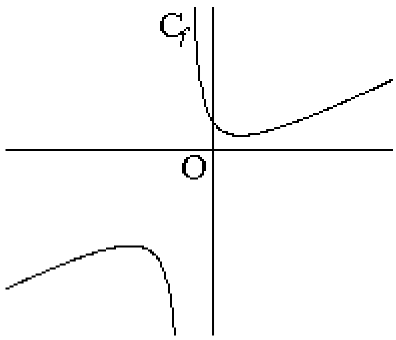
1) f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \left(x^2+3x-5\right)^5$

2) f *définie sur* $]-2;2[$ *par* $f(x) = x^3\sqrt{4-x^2}$

3) f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \sin(3x-5)$

DEVOIR5 correction

I – Problème



On considère la fonction *f* définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2-x+2}{2x+2}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm

(l'allure de C_f est donnée ci-contre, à titre indicatif)

1) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f, en déduire l'existence d'une asymptote (D) dont on précisera l'équation.

2) Calculer $f'(x)$, montrer que $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - 6}{(2x+2)^2}$.

3) Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition, on calculera les extremums et on complétera le tableau de variation avec les limites calculées au 1).

4) Démontrer que la droite (D') d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ est asymptote à C_f puis étudier la position relative de C_f par rapport par rapport à (D').

5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec la droite d'équation y = 1. On nommera A et B ces deux points, A étant celui des deux points dont l'abscisse est la plus petite.

6) A est le point d'abscisse 0 de C_f , déterminer l'équation de la tangente (T_A) à C_f au point A.

7) Existe t-il d'autres points de C_f où la tangente est parallèle à (T_A), dans l'affirmative calculer les coordonnées de ce(s) point(s).

8) Construire sur du papier millimétré dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm les droites (D), (D') , (T_A) et la courbe (C_f) .

<u>II – Nombre complexe :</u>

On considère les nombres complexes : $z_1 = 3\left[\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right]$ et $z_2 = 3 - 3i\sqrt{3}$

1) Déterminer la forme algébrique de z_1 et la forme trigonométrique de z_2

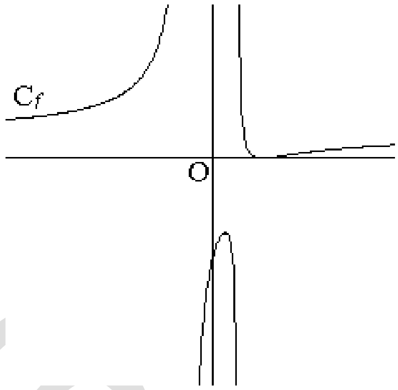
2) Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ les points A et B d'affixe z_1 et z_2.

3) Déterminer la nature du triangle OAB.

4) Déterminer la forme algébrique de $z_2^{\,2}$

DEVOIR6 correction

I – Problème



On considère la fonction f définie sur

$]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1}$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

d'unité graphique 1 cm

(l'allure de C_f est donnée ci-contre, à titre indicatif)

1)Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f, en déduire l'existence De plusieurs asymptotes dont on précisera les équations.

2)Calculer $f'(x)$, montrer que $f'(x)=\dfrac{2(2x^2-5x+2)}{(x^2-1)^2}$.

3)Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition, on calculera les extremums et on complétera le tableau de variation avec les limites calculées au 1).

4)Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.

5)Déterminer l'équation de la tangente T_A en la courbe au point A.

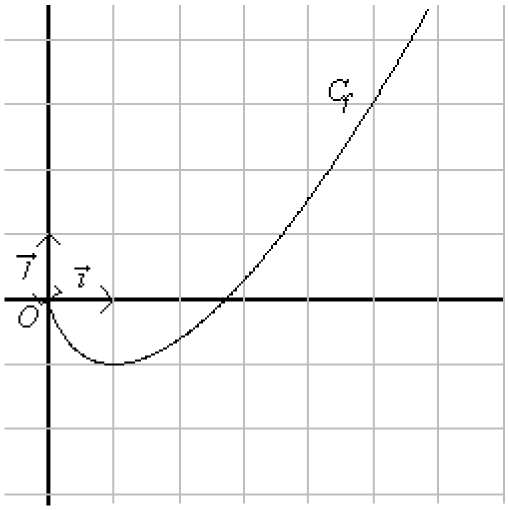
6)Construire dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm, la courbe C_f, les asymptotes trouvées dans les questions précédentes et la droite (T_A)

7)La droite T_A coupe -t- elle la courbe C_f en d'autre point que A (justification par le calcul)

II – Fonction avec logarithme népérien

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x$ et sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

(voir figure ci-dessous)



1) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

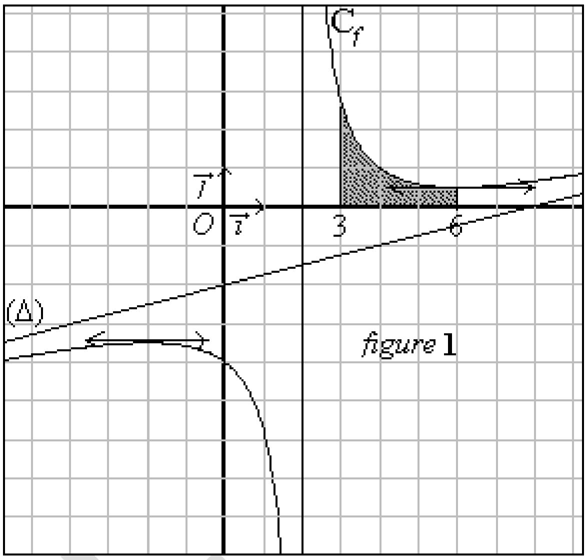
3) Existe-t-il un point de C_f ou la tangente en ce point admet un coefficient directeur de ½ .

4) Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse ½ de la courbe C_f .

DEVOIR7 correction

I – Etude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-10x+32}{4x-8}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (voir **figure 1**)



1) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   Préciser l'existence d'une asymptote

2) Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-12}{4(x-2)^2}$

3) Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition, on calculera les extremums et on complétera le tableau de variation avec les limites calculées au 1).

4) Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme : $f(x)=\dfrac{1}{4}x-2+\dfrac{4}{x-2}$.

   En déduire que la droite Δ d'équation $y=\dfrac{1}{4}x-2$ est asymptote à la courbe en -∞ et en +∞.

5) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x et en déduire la position relative de la courbe représentative C_f par rapport à l'axe des abscisses .

6) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle]2 ; +∞[, pour cette question utilisez l'expression de $f(x)$ trouvée à la question 4) .
   Calculer l'aire en unités d'aire de l'ensemble des points M(x ; y) tels que :
   $3 \le x \le 6$ et $0 \le y \le f(x)$ (voir partie grisée figure 1) , on donnera la valeur exacte simplifiée, puis la valeur arrondi à 10^{-1} près.

   (Rappel : Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I, une primitive de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ sur I est la fonction ln $|u|$)

2) Mettre z_2 sous forme algébrique

II –Fonction avec logarithme népérien

On considère la fonction g définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = x\ln x - \frac{3}{2}x$.

1) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g sur]0 ; +∞[, on calculera les extremums éventuels (les limites ne sont pas demandées).

2) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse e de la courbe représentative de g .

III- Nombres complexes (3 pts)

On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i \quad z_2 = -2 - 2i\sqrt{3} \quad z_3 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

1) Mettre les nombres complexes z_1 et z_2 sous forme trigonométrique puis exponentielle

4) Mettre z_3 sous forme algébrique .

5) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm , placer les points A, B, C d'affixes z_1, z_2, et z_3

DEVOIR8 correction

I – Etude de fonction :

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

8. Déterminer les coordonnées des points A et B intersections de C_f avec la droite d'équation y = 3.

   A étant des deux points celui dont l'abscisse est la plus petite.

9. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ en déduire les variations de f .

10. Déterminer les équations des droites (T_A) et (T_B) tangentes respectives aux points A et B de la courbe C_f.

11. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-1}$

12. Etudier la position relative de la courbe C_f. par rapport à la droite (D) d'équation $y = x - 3$

13. Construire dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm les droites (T_A) et (T_B), la droite (D) et la courbe C_f

14. Existe-t-il un point de la courbe C_f tel que la tangente en ce point est parallèle à la droite (D) ?

   (justifier la réponse par le calcul)

II – Nombre complexe

On considère les nombres complexes : $z_A = -\sqrt{3} + i \quad z_B = -1 - \sqrt{3}i$

5) Déterminer le module et un argument de z_A et de z_B
6) Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ placer les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B
7) Déterminer la nature du triangle OAB
8) Mettre le nombre complexe $z_A{}^2 \times z_B$ sous la forme algébrique.

III – Fonctions dérivées

Calculer la dérivée de la fonction f

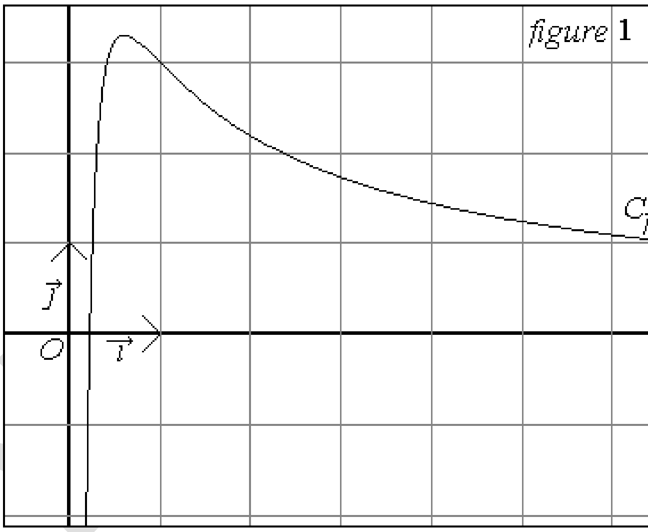
1) f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \left(x^2 + 3x - 5\right)^5$
2) f *définie sur* $]-2;2[$ *par* $f(x) = x^3\sqrt{4 - x^2}$
3) f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \sin(3x - 5)$

DEVOIR9 **correction**

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{2\ln x+3}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

(voir figure 1)



1) Calculer la limite de f en 0 puis calculer la limite de f en $+\infty$ (on pourra vérifier que: $f(x)=2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{3}{x}$) que peut-on en déduire concernant la courbe C_f

2) Montrer que $f'(x)=\dfrac{-2\ln x-1}{x^2}$.

3) Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition, on complétera le tableau avec les limite trouvées aux questions 1) et 2) et les extremums éventuels.

4) Etudier le signe de $f(x)$, que peut-on en déduire concernant la courbe C_f ?

5) Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de C_f, construire cette tangente sur courbe construite figure 1.

6) On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, montrer que la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par $H(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction h.

En déduire une primitive F de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

7) Hachurer et calculer en unités d'aire, l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équation $x=1$, $x=e$, la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

<u>Quelques rappels utiles sur les dérivées :</u>

$(uv)'=u'v+uv'$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(u^n)'=nu'u^{n-1}$

DEVOIR10 **<u>correction</u>**

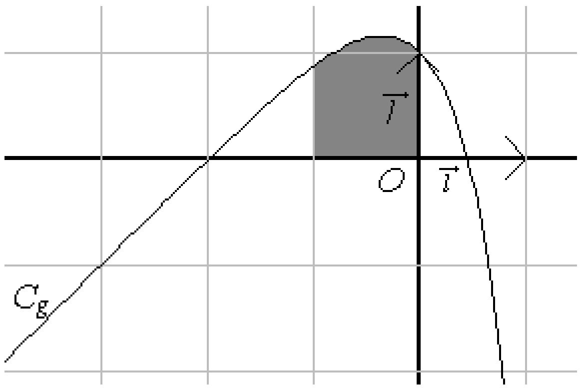
I- Etude d'une fonction avec logarithme népérien

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x - 4\ln x$ et C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1) Déterminer la limite en 0 de $f(x)$, en donner l'interprétation graphique.
2) Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)$ (**on pourra utiliser que** $f(x) = x\left(1-4\dfrac{\ln x}{x}\right)$)
3) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle [1 ; e], donner une valeur approchée de cette solution à 0,1près
5) Construire la courbe représentative de f
6) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1, construire cette tangente.

<u>II –Etude d'une fonction avec exponentielle</u>

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x+2-e^{2x}$ et C_g sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ (voir figure ci-dessous)



1) Calculer $g'(x)$, en déduire les variations de g (**Les limites aux bornes de l'ensemble de définition ne sont pas demandées**) .
2) Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe Cg en $-\infty$.
   Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.
3) Calculer en unité d'aire, l'aire du domaine grisé (voir courbe ci-contre)

III- Nombres complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + 3i, \quad z_B = 2\sqrt{3}, \quad z_C = 2i$

1) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
2) Calculer le module et un argument du nombre complexe z_A.
3) Calculer les modules des nombres complexes $z_A - z_C$, $z_B - z_A$ et $z_B - z_C$, déterminer la nature du triangle ABC.