Cours de coniques

Définition :

Soit D une droite et F un point n'appartenant pas à D et e un réel strictement positif

Pour tout point M du plan H sont projeté orthogonal sur D

On appelle conique l'ensemble des point M du plan tels que MF/MH=e

Remarque1

Si e=1 la conique est appelé parabole de foyer F , de directrice D

Si e<1 la conique est une ellipse

Si e>1 la conique est une hyperbole

Foyer et directrice

Soit R=$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repere orthonormé du plan

Soit R'=(F ;$\vec{\imath};\vec{\jmath}$) un repere tel que D(F ;$\vec{\imath}$) est perpendiculaire à D

Puisque (F ;$\vec{\jmath}$)//D soit alors une équation de D : x=p

Pour tout point M(x ;y) dans R' on a : $MF^2=x^2+y^2$

H etant le projeté orthogonal de M sur D donc MH=$|x-p|$

MF/MH=e $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2=e^2(x-p)^2$

$\Leftrightarrow$ $(1-e^2)x^2+2e^2px+y^2-e^2p^2=0$ (1)

discution

1)si e=0 alors $x^2+y^2=0$ donc x=y=0 d'où M=F

si p=0 donc F∊D cas à écarter

2)si e=1 alors $y^2+2px-p^2=0$

$\Leftrightarrow y^2+2p(x-p/2)=0$ (E)

Soit alors Ω(p/2 ;0) dans le repere R''(Ω ;$\vec{\imath};\vec{\jmath}$) (1)$\Leftrightarrow Y^2+2pX=0$

M(x ;y) dans R et M(X ;Y) dans R''

$\Leftrightarrow \; X = -\frac{1}{2p}Y^2$ qui est une parabole

On dit que –p est le parametre de cette parabole (P)

Dans le repere R' le sommet de cette parabole est le point S(p/2 ;o) située dans le demi plan

De bord la tangente au sommet d'équation x=p/2 et qui contient F(ne contient pas D)

F est appelé le foyer et D la directrice

REMARQUE Dans l'équation(E) on remarque si S est le milieu de [FH] alors S(p/2 ;0) On remarque que S∈(P)

3) si $e \neq 1$

dans le repere R (1)⇔$(1-e^2)(x+\frac{e^2p}{1-e^2})^2+y^2-\frac{(ep)^2}{1-e^2} = 0$

soit $\Omega(-\frac{e^2p}{1-e^2}; 0)$ un point M(x ;y) dans R et M(X ;Y) dans le repere $R_1=(\Omega ;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

$$\begin{cases} X = x + \frac{e^2p}{1-e^2} \\ Y = y \end{cases} \qquad (4)$$

(1)⇔$(1-e^2)X^2+Y^2-(ep)^2/(1-e^2)=0$

Si e<1

$[(1-e^2)2/(ep)^2]\, X^2 +(1-e^2)/(ep)^2=1$

Ellipse de centre Ω

Si e>1

$[(1-e^2)^2/(ep)^2]X^2 - \frac{e^2-1}{(ep)^2} Y^2=1$

Hyperbole de centre Ω et d'axe transverse $(\Omega ;\vec{\imath})$

Si e<1 on pose $a^2 = \frac{(ep)^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2= \frac{(ep)^2}{(1-e^2)}$ donc (1)⇔$x^2/a^2 +y^2/b^2=1$ (2)

Si e>1 on pose $a^2=\frac{(ep)^2}{e^2-1}$ et $b^2= \frac{(ep)^2}{e^2-1}$ donc(1)⇔$x^2/a^2-y^2/b^2=1$ (3)

CALCUL DE L'EXENTRICITE

Si e<1(ellipse)

$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \Leftrightarrow e^2 1 - \frac{b^2}{a^2}$ donc $1 \geq \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ or $e\neq 0 \Leftrightarrow a^2>b^2$

Donc il existe un réel c tel que $c^2=a^2-b^2$

Mais puisque $b^2/a^2=1-e^2 \Leftrightarrow a^2-b^2=e^2a^2 \Leftrightarrow c^2=e^2a^2 \Leftrightarrow$ e=c/a

On a $b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2} \Leftrightarrow b^2\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)=p^2$ or $a^2-b^2=c^2 \Leftrightarrow p^2=b^4/c^2 \Leftrightarrow p=b^2/c$ ou $p=-b^2/c$

Dans le repere $(\Omega;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et vu la relation (4) coordonnées des points correspondant ($e^2p/1-e^2$;0)

$\frac{e^2p}{1-e^2}=\frac{b^2}{p}$ or $p=\frac{b^2}{c} \Leftrightarrow c=\frac{b^2}{p}$ donc les points sonts d'abscisses c et –c

La droite correspondante au point F s'abscisse c est

X=p+c

$x=\frac{b^2}{c}+c=\frac{b^2+c^2}{c}$ alors D : $x=a^2/c$ directrice associée à F

Celle associée à F' est D' : $x=-a^2/c$

Les points A(a ;0) A'(-a ;0) sont les sommets de l'ellipse situés sur $D(\Omega ;\vec{\imath})$

F et F' sont les foyers

Puisque e=c/a et que e<1 alors $0<c<a<a^2/c$

Donc D et D' ne coupent jamais l'ellipse et que l'ellipse est situer dans la bande [D ;D']

Pour e>1(hyperbole) donc $0<a^2/c<a<c$

L'hyperbole est situee en dehors de la bande [D ;D']

REMARQUE

l'écriture MF/MH=e est équivalente à $\overrightarrow{MF}+e\overrightarrow{MH}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{MF}-e\overrightarrow{MH}=\vec{0}$

dans le cas e≠1 M est le barycentre de (F ;1) et (H ;e) ou M est le barycentre de (F ;1)

et (H ;-e)

H etant le projeté orthogonal de M sur la directrice D

si e=1 l'égalité $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MH}$ est impossible car on aura F=H mais H∈D donc F∈D(absurde)

l'égalité $\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MH}=\vec{0}$ signifie que M est le milieu de [FH]

d'où dans le cas d'une parabole l'axe focal rencontre la parabole en un seul point

qui est le sommet

si e≠1 (ellipse ou hyperbole l'axe focal coupe la conique en deux ponts symétriques

par rapport au centre de la conique

RESUME

equation $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (ellipse)

elements de l'ellipse	c	Exentricié(e)	foyer	Directrice associée
a>b>0	$\sqrt{a^2-b^2}$	c/a	F(c ;0)	D :$x=a^2/c$
b>a>0	$\sqrt{b^2-a^2}$	c/b	F(0 ;c)	D : $y=b^2/c$

Equation $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ (yperbole)

c	Exentricité(e)	foyer	Directrice associée
$\sqrt{a^2+b^2}$	c/a	F(c ;0)	D :$x=a^2/c$

Pour l'équation $-x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (evident)

REMARQUE Soit M(x ;y) dans on R.O.N $(O;\vec{i},\vec{j})$ la fonction f(x)=$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ x϶[-a ;a]

On a :f'(x)=$\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$ pour x϶]-a ;a[

F decroit strictement sur[0 ;a[de b à0

La tangente à la courbe au point d'abscisse c est

T : y=-$\frac{c}{a}(x-c)+\frac{b^2}{a}$ cette droite coupe l'axe focal au pont de coordonnées (a^2/c ;0)

C'est-à-dire au point K projeté orthogonal de F sur la directrice D

En remplacant x par (-x) et y par (-y) on remarque que l'axe focal ; l'axe non focal

Sont des axes de symétries ainsi que leur intersection centre de l'ellipse est un centre

De symétrie

POUR L'HYPERBOLE

Soit g(x)=$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ pour x϶IR-[-a ;a]

Par raison de symetrie il suffit d'étudier g sur [a ;+∞[

On a alors g'(x)=$\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$ donc g est strictement croissante

La courbe admet la meme tangente (T)

Aymptote oblique puisque la limite de g(x)/x quand $x \to +\infty$ est b/a

Et que limite de g(x)-(b/a)x quand $x \to +\infty$ est 0 alors la droite Δ :y=(b/a)x est une

Asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$

Pour $x>0$ on a :$g(x)-(b/a)x<0$ donc l'hyperbole est au dessus de Δ

Pour des raisons de symétrie la droite Δ' : y=-(b/a)x est aussi une asymptote

EXERCICE1

$(o,\vec{i};\vec{j})$est un repere orthonormé determiner les éléments caractéristiques de la

Conique dont une équation est

1) $x^2+(1/2)y=1$

2)$2y^2-x^2=2$

3) $x^2+4y+13=0$

4)$y^2=-6x+6y+15$

5)$3x^2+2x+3y^2-6y=0$

6) $4x^2-9y^2=1$

EXERCICE2

On donne la distance d entre un foyer F et une droite D ; et un réel e choisisser un repere

Et trouver une équation de la conique de foyer F de directrice D et d'exentricité e

1)d=14 et e=1

2)d=9 et e=4/5

3)d=9 et e=5/4

EXERCICE3

Un reper orthonormé etant choisi

On donne le point F et la droite D trouver la conique de foyer F et de directrice D

1)F(3 ;2) et D :x=1

2)F(1 ;4) et D :x=3

Siute de l'exercice3

3) F(-1 ;2) et D :y=-1

4) d=1 et e=2

5) d=1 et e=1/2

Correction exercice1

1)x^2=-(1/2)y+1   (E)   ⇔ x^2=$\frac{-1}{2}(y-2)$ soit Ω(0 ;2)

Et R'(Ω ;$\vec{i};\vec{j}$) soit M(x ;y) dans le repere R($O;\vec{i};\vec{j}$) M(X ;Y) dans R' alors $\begin{cases} X=x \\ Y=y-2 \end{cases}$

(E) ⇔X^2=2(-1/4)Y parabole de paramerte p=-1/4 de directrice D :Y=1/8 et de

Foyer F(0 ;-1/8) dans le repere R' alors dans le repere R

D :y=17/8   et F(0 ;15/8)

6)4x^2-9y^2=1⇔ $\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2}-\frac{y^2}{(\frac{1}{3})^2}=1$ équation d'une hyperbole (H)

Soit a=(1/2) ;b=(1/3) donc c=$\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}$ =$\frac{\sqrt{13}}{6}$

L'axe transverse est (O ;$\vec{i}$) de foyer F($\frac{\sqrt{13}}{6};0$) ; F'(-$\frac{\sqrt{13}}{6};0$) de sommets A(1/2 ;0)

A'(-1/2 ;0) ;B(0 ;1/3) B'(0 ;-1/3) et de directrices D : x= a^2/c=$\frac{3}{2\sqrt{13}}$

Et D' : x=-$\frac{3}{2\sqrt{13}}$

Exentricité e=c/a=$\frac{\sqrt{13}}{3}$

Asymptote Δ : y=(b/a)x et Δ' : y=-(b/a)x

Donc Δ :y=(2/3)x et Δ' :y= -(2/3)x

EXERCICE4

$R = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé (C) une conique de foyer F(1 ;-1) ; de directrice D : x=5 ; et d'excentricité e=1/3

1) Déterminer la nature de la conique en précisant

* l'axe focal

* sommets

* seconde directrice

2) donner l'équation de (C) dans le repère R et les coordonnées des sommets

CORRECTION

Puisque e=1/3 alors (C) est une ellipse (e<1) puisque la directrice a pour équation

D : x=5 alors l'axe focal est perpendiculaire à D et passant par F

D'où l'axe focal a pour équation D_1 : y=-1

Un sommet A de l'axe focal se trouve sur D_1 donc son ordonnés est -1

D'où A(x ;-1) soit K le projeté orthogonal de A sur D d'où K(5 ;-1)

A∊(C) ⇔AF=e AH⇔$(x-1)^2=1/9(x-5)^2$

En résolvant cette équation on trouve x=-1 ou x=2

D'où A(2 ;-1) ;A'(-1 ;-1) le centre Ω de la conique est le milieu de [AA']

D'où Ω(1/2 ;-1) la longueur du demi grand axe a=ΩA=3/2

On sait que e=c/a d'où c=1/2

L'axe focal étant parallèle à l'axe des abscisses donc l'axe non focal est

Parallèle à l'axe des ordonnées et passant par Ω

Donc b=$\sqrt{a^2 - c^2}$ =$\sqrt{2}$

Soit M(x ;y) dans le repère R et M(X ;Y) dans le repère R'(Ω ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$)

D'où d'après la relation $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}$

On a : $\begin{cases} X = x - 1/2 \\ Y = y + 1 \end{cases}$ (1)

Alors dans le repère R' ;B(0 ;$\sqrt{2}$) et B'(0 ; -$\sqrt{2}$)

Dans le repère R et vu les relations (1) on a :B($\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}-1$) et B'($\frac{1}{2}$; $-\sqrt{2}-1$)

La seconde directrice D' : x=-5

2) équation de l'ellipse dans le repère R' est $\frac{X^2}{(\frac{3}{2})^2}+\frac{Y^2}{\sqrt{2}^2}=1$

Dans le repère R et vu la relation (1)

On aura $8x^2+9y^2-8x+18y-7=0$ (2)

REMARQUE

On peut obtenir (2) en utilisant la définition d'une conique

Pour tout point M(x ;y) H don projeté orthogonal sur D : x=5

MF=e MH et en élevant au carre avec F(1 ;-1) H(5 ;y) et e=1/3

EXERCICE5

soit$\propto$ un réel et R=(O ;$\vec{i};\vec{j}$) un repère orthonormé direct

$C_{\propto}=\{M(x;y)/x^2+y^2+2\propto xy-1=0\}$

1)Discuter suivant les valeurs de $\propto$ la nature de la conique

2) préciser les coniques $C_0;C_1;C_{-1}$

3)on considère le repère R'($O;\vec{u};\vec{v}$) image de R par la rotation de centre

O et d'angle Θ

Montrer que x= X cosΘ –Y sinΘ et y= X sinΘ +Y cosΘ

+4)a) montrer que le terme en XY est 2α cos(2Θ)

b)En déduire alors Θ pour que le terme XY n'apparait pas dans l'expression

c)quel est alors C_α

5) en déduire a, b et c si α=1/2 et si α=2

INDICATION

Pour la question 3 écrire M(x ;y) dans R $\begin{cases} x = OMcos\varphi \\ y = OMsin\varphi \end{cases}$ Θ=$\varphi' - \varphi + 2k\pi \; k \in Z$

vous remarquer alors que $\begin{cases} X = \cos(\varphi') = OM \cos(\theta + \varphi) \\ Y = \sin(\varphi') = OMsin(\theta + \varphi) \end{cases}$ M(X ;Y) dans R'

attendez la correction