Correction des problèmes

Problème 1

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle]0 ; + ∞ [par : g(x) = x^2 - 1 + ln x .

1.

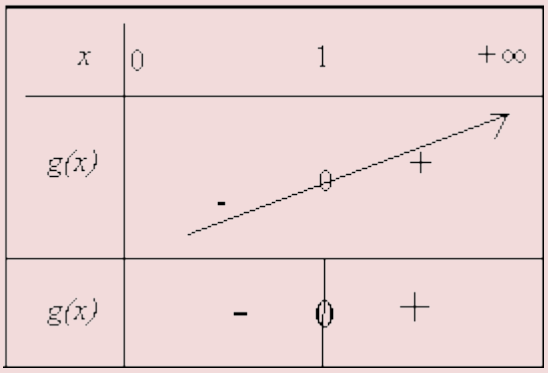
$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$\text{pour } x \in]0;+\infty[, \quad 2x > 0 \quad et \quad \frac{1}{x} > 0 \text{ donc } g'(x) > 0$$

on en déduit que la fonction g est croissante (strictement) sur l'intervalle]0 ; + ∞ [.

2. g(1) = 1^2 - 1 + ln 1 = 0 + 0 = 0

en utilisant le fait que la fonction g est strictement croissante sur]0 ; + ∞ [et g(1) = 0 on en déduit le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle]0 ; + ∞ [:



Partie B : Détermination de l'expression de la fonction *f*

1.

$$f'(x) = a - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = a - \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

2. La courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, f(1) = 0 et f '(1) = 0 soit :

$$f(1)=0 \Leftrightarrow a+b-\frac{\ln 1}{1}=0 \Leftrightarrow a+b=0$$

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow a-\frac{1-\ln 1}{1^2}=0 \Leftrightarrow a-1=0$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

$$f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$$

Partie C : Etude de la fonction *f*

1. a.

$$f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x=0^+ \end{array}\right\} \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty \left.\right\} \lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

la droite d'équation *x* = 0 est asymptote à la courbe C

b.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty}(x-1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \end{array}\right\} \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

2. a.

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b. *f* '(*x*) est du signe de g(*x*) sur]0 ; + ∞ [, on en déduit les variations de *f* :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

c. 0 est le minimum absolue de la fonction *f* sur son ensemble de définition on *f*(*x*) ≥ 0 pour tout réel*x* appartenant à l'intervalle]0 ; + ∞ [.

3. On considère la droite D d'équation *y* = *x* - 1.

a.

$$f(x)-(x-1)=x-1-\frac{\ln x}{x}-(x-1)=-\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C en + ∞.

b.

Etudions le signe de $f(x) - (x - 1)$ d'après a. il est du signe de - ln x soit :

- ln $x > 0$ équivaut à ln $x < 0$ ou encore ln $x <$ ln 1 soit $x < 1$:

si $x < 1$ alors $f(x) - (x - 1) > 0$ donc sur l'intervalle]0 ; 1 [,

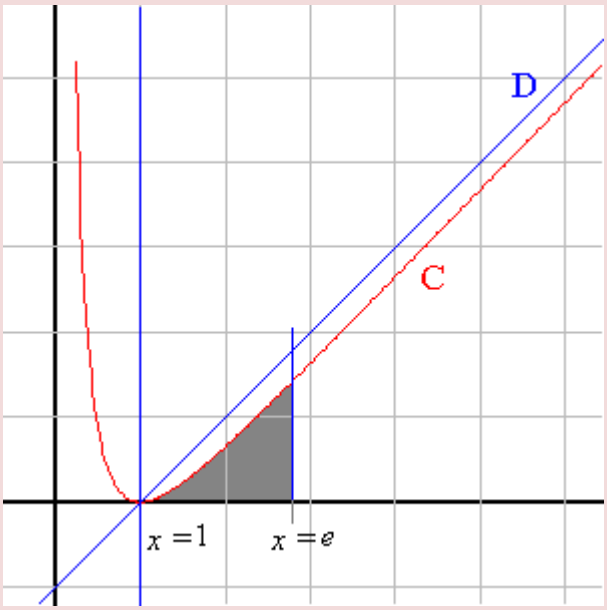
la courbe C est au dessus de l'asymptote D.

si $x > 1$ alors $f(x) - (x - 1) < 0$ donc sur l'intervalle]1 ; + ∞ [,

la courbe C est au dessous de l'asymptote D.

Si $x = 1$, la courbe C et la droite D se coupent en un point de coordonnées (1 ; 0)

c.



Partie D : Calcul d'aire

1. a.

$$H(x)=(\ln x)^2$$

$$H=u^2 \text{ avec } u(x)=\ln x \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$H'=2u'u \Rightarrow H'(x)=2\times\frac{1}{x}\ln x=2\frac{\ln x}{x}$$

b. une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0 ; + ∞ [est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

2. a. b.

$$A = \int_1^e f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_1^e = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e =$$

$$\left[\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)\right] =$$

$$\left[\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right)\right] = \frac{e^2}{2} - e\ u.a.$$

$$1\ u.a = 4cm^2 \Rightarrow A = 4\left(\frac{e^2}{2} - e\right) = \left(2e^2 - 4e\right)cm^2 \approx 3,90cm^2$$

probleme 2

Partie A

1.

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x^2 + 3x - 4 = -4 \\ \lim\limits_{x\to 0} 4\ln x = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 + 3x - 4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 4\ln x = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

2. Soit g' la dérivée de g.

$$g'(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x} = \frac{(2x+3)x + 4}{x} = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x}$$

3. g'(x) est du signe de $2x^2 + 3x + 4$ calculons les racines de ce polynôme :
$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$ donc $2x^2 + 3x + 4$ n'a pas racine et reste toujours strictement positif, par conséquent g'(x) > 0 sur]0 ; + ∞[, il en résulte que g est croissante sur]0 ; + ∞[

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+		+	
$g(x)$	‖ - ∞	↗	0	↗	$+\infty$

4. g(1) = 1 + 3 - 4 + 4 ln 1 = 0
donc g(x) < 0 sur]0 ; 1[et g(x) > 0 sur]1;+ ∞[.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	+	

Partie B

1. a. limite de *f* en + ∞.

$$f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4\ln x}{x} = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b. la limite de *f* en 0 ;

$$f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$$

$$x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x} = f(x)$$

$$f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-4}{x} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} \left(3 - \dfrac{4}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty\end{array}\right\} = \lim_{x\to0^+} \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} x = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

On peut en déduire que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C)

2. a. Pour tout *x* strictement positif :

$$f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{x} - \frac{\frac{4}{x}\times x - 4\ln x}{x^2} = 1 + \frac{3}{x} - \frac{4 - 4\ln x}{x^2} =$$

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{4 - 4\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 3x - 4 + 4\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. *f* '(*x*) est du signe de g(*x*) dont le signe a été trouvé **Partie A 4.**

c.

$$f(1) = 1 + 3\ln 1 - \frac{4\ln 1}{1} = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	1	↗	$+\infty$

3. On rappelle que pour tout *x* de l'intervalle]0 ; + ∞[,

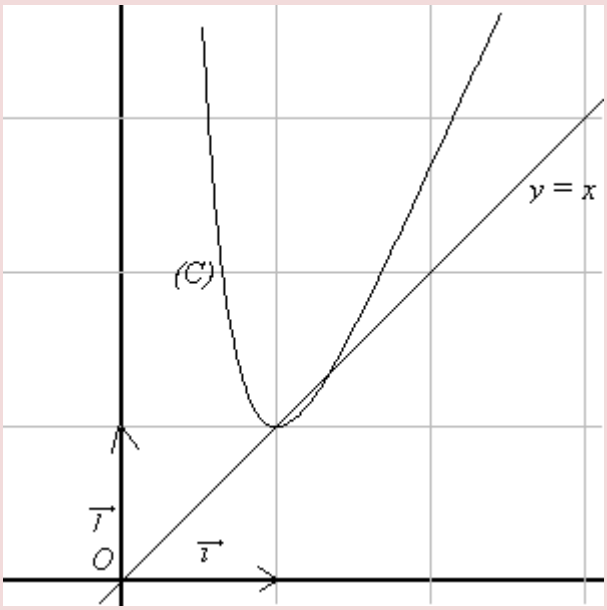
$$f(x) = x \Leftrightarrow x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x = x \Leftrightarrow \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x = 0$$

$$3 - \frac{4}{x} = 0 \quad ou \quad \ln x = 0 \Leftrightarrow 3 = \frac{4}{x} \quad ou \quad x = 1 \Leftrightarrow$$

$$3x = 4 \quad ou \quad x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \quad ou \quad x = 1$$

S = {1 ; 4/3 }

4.



5. La droite d'équation *y* = *x* coupe la courbe (C) en deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4/3 ; 4/3)

Partie C

1.

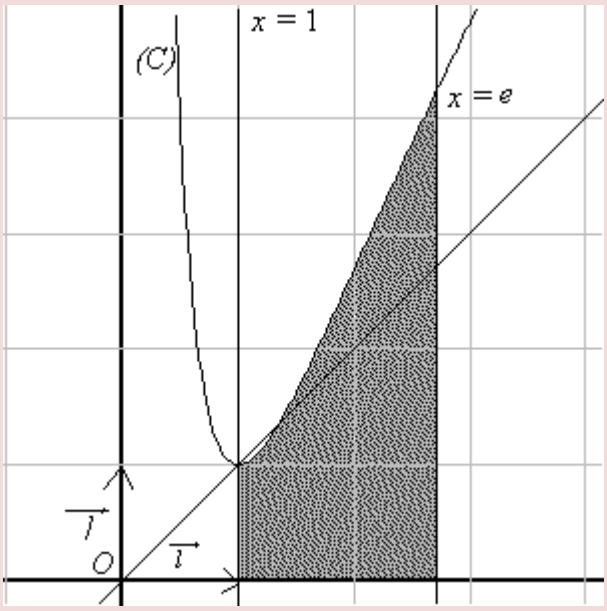
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$$

$$F'(x) = x - 3 + 3(\ln x + x \times \frac{1}{x}) - 2 \times 2\frac{1}{x}\ln x = x - 3 + 3\ln x + 3 - \frac{4\ln x}{x}$$

$$= x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x} = f(x)$$

donc F est une primitive de *f* sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

2. a.



b.

$$\int_1^e f(x)dx = \left[F(x)\right]_1^e = F(e) - F(1)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 3e + 3e\ln e - 2(\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2}1^2 - 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 3e + 3e - 2 - \frac{1}{2} + 3 = \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right)u.a$$

$$1\,u.a. = 3^2 cm^2 = 9cm^2$$

$$en\ cm^2 : 37{,}75$$

Probleme3

Problème (11 points)

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

1)

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

2) g'(x) > 0 comme somme de deux expressions strictement positive sur]0 ; + ∞[donc g est strictement croissante sur]0 ; + ∞[

3) Résolution de l'équation g(x) = 0.

a) g(1) = 1 - 4 = - 3 < 0 et g(2) = 2^2 - 4 + 2ln2 = 2 ln 2 > 0

g est strictement croissante sur [1 ; 2] , g est dérivable sur [1 ; 2] et g(1) < 0 < g(2) , donc l'équation g(x) = 0 possède une solution unique α sur l'intervalle [1 ; 2].

b) g(1,70) < 0 < g(1,71) donc 1,70 < α < 1,71

4) On en déduit que g(x) < 0 sur]0 ; α [et g(x) > 0 sur] α ; + ∞ [et g(α) = 0

II) Etude de la fonction *f*

1) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0+} x-1=-1\\ \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2}{x}=+\infty\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0+}(-2\ln x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0+} x=0^+\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-2\ln x}{x}=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$$

2) Etude en $+\infty$.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x-1=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}-2\dfrac{\ln x}{x}=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

b)

$$f(x)-(x-1)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}-2\dfrac{\ln x}{x}=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$$

c)

$$f(x)=x-1\Leftrightarrow\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=0\Leftrightarrow 1=\ln x\Leftrightarrow\ln e=\ln x\Leftrightarrow x=e$$

donc l'abscisse du point d'intersection de C et D est e et son ordonnée est e - 1 (en remplaçant $x = e$ dans l'équation de D , on trouve $y = e - 1$)

d)

$$f(x)-(x-1)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{2-2\ln x}{x}=\frac{2(1-\ln x)}{x}$$

$f(x) - (x - 1)$ est du signe de $1 - \ln x$, $1 - \ln x > 0$ si et seulement si $\ln x < 1$ soit $x < e$

Conclusion :

- sur l'intervalle $]0 ; e]$, la courbe C est au dessus de la droite D
- sur l'intervalle $[e ; +\infty[$

3) Etude des variations de f.

a)

$$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}-\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}-\frac{2-2\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2-2+2\ln x}{x^2}=\frac{x^2-4+2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b) $f'(x)$ est donc du signe de g(x) , on en déduit les variations de f :

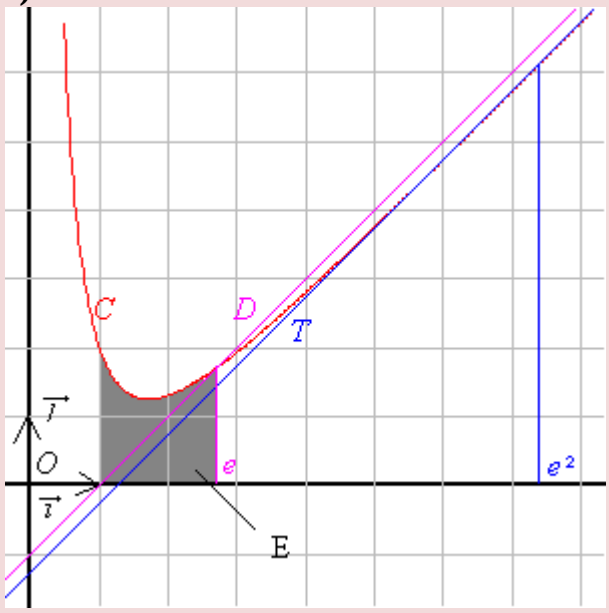
x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e^2.

$$f'(e^2) = \frac{e^4 - 4 + 2\ln e^2}{e^4} = \frac{e^4 - 4 + 4}{e^4} = 1$$

le coefficient directeur de la tangente T est le même que le coefficient directeur de la droite D soit 1.

5)



III) Calcul d'une aire

1)

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - \underbrace{(\ln x)^2}_{forme\ u^2}$$

$$H'(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \underbrace{2\frac{1}{x}(\ln x)}_{forme\ 2u'u} = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = f(x)$$

donc H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2)

a) voir figure

b)

$$S = \int_1^e f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{e^2}{2} - e + 2 - 1 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{e^2}{2} - e + 1 + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2} u.a$$

c) valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2 (2 chiffres après la virgule)
l'unité d'aire est 4 cm² on a S = 9,90 cm²

probleme4

1. $f(l) = -2 + (e^2 - 1)\ln 1 + 2 = -2 + 0 + 2 = 0$

$f(e^2) = -2e^2 + (e^2 - 1)\ln e^2 + 2 = -2e^2 + (e^2 - 1)2\ln e + 2 = -2e^2 + (e^2 - 1)2 + 2 =$

$-2e^2 + 2e^2 - 2 + 2 = 0$

2. a) sur la courbe, *f* admet comme maximum absolu 3 pour $x = 3{,}2$
Donc le nombre d'appareils que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal est de 320
et le montant du bénéfice maximum est de 3000 D

b) les valeurs de *x* pour lesquelles le bénéfice réalisé est positif ou nul appartiennent à l'intervalle $[1 ; e^2]$
Entre 100 et 739 appareils fabriqués , le bénice est positif.

3. a)

$$f'(x) = -2 + (e^2 - 1) \times \frac{1}{x} = \frac{-2x + e^2 - 1}{x}$$

b)

$$f'(x) = -2 + (e^2 - 1) \times \frac{1}{x} = \frac{-2x + e^2 - 1}{x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + e^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{e^2 - 1}{2}$$

On en déduit les variations de *f* :

x	0		$\frac{e^2 - 1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

c)

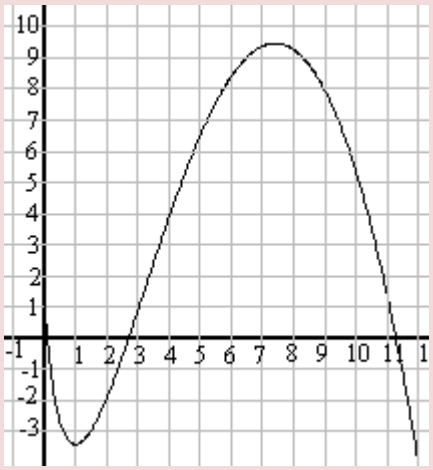
$$f\left(\frac{e^2-1}{2}\right) \approx 3,031$$

$$\frac{e^2-1}{2} \approx 3,19$$

le bénéfice maximum est de 3031 € pour 319 appareils.

4.

$f(x) > 0$ pour x appartenant à $]1 ; e^2[$ sinon $f(x) \leq 0$, donc la fonction primitive de f doit être croissante sur l'intervalle $]1 ; e^2[$, la seule courbe convenable est donc la courbe de la fonction F^2.



5. Avec la précision permise par la figure :

$$\int_1^6 f(x)dx = F_2(6) - F_2(1) = 8,5 - (-3,5) = 8,5 + 3,5 = 12$$

6. a)

$$F'(x) = -2x + 3 - e^2 + (e^2-1)(1\ln x + x \times \frac{1}{x})$$

$$= -2x + 3 - e^2 + (e^2-1)(\ln x + 1)$$

$$= -2x + 3 - e^2 + e^2 \ln x + e^2 - \ln x - 1$$

$$= -2x + e^2 \ln x - \ln x + 2$$

$$= -2x + (e^2-1)\ln x + 2 = f(x)$$

donc F est une primitive de f sur] 0 ; + ∞ [

b)

$$\frac{1}{e^2-1}\int_1^{e^2} f(x)dx = \frac{1}{e^2-1}\left[F(x)\right]_1^{e^2} =$$

$$\frac{1}{e^2-1}\left[\left(-e^4+(3-e^2)e^2+(e^2-1)e^2\ln e^2\right)-\left(-1+(3-e^2)\right)\right] =$$

$$\frac{1}{e^2-1}\left[\left(-e^4+3e^2-e^4+2(e^2-1)e^2\right)-\left(2-e^2\right)\right] =$$

$$\frac{1}{e^2-1}\left[\left(-e^4+3e^2-e^4+2e^4-2e^2\right)-\left(2-e^2\right)\right] =$$

$$\frac{1}{e^2-1}\left[\left(e^2\right)-\left(2-e^2\right)\right] = \frac{1}{e^2-1}\left[2e^2-2\right] = \frac{2(e^2-1)}{e^2-1} = 2$$

La valeur moyenne du bénéfice est donc de 2000 D

probleme5

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. a) Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sont les fonctions y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\,e^{-x}$
où k est une constante réelle quelconque.

b) h est une solution de l'équation $y' + y = 0$ donc h est de la forme : $h(x) = k\,e^{-x}$
$h(1) = 1/e$ d'où $k\,e^{-1} = 1/e = e^{-1}$ par conséquent $k = 1$.
La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}$

2. $u(x) = e^{-x} + ax$ donc pour tout réel x on a : $u'(x) = -e^{-x} + a$
de $u' + u = -x - 1$ on en déduit que pour tout réel x on a : $-e^{-x} + a + e^{-x} + ax = -x - 1$
soit encore : $ax + a = -x - 1$ par identification : $a = -1$.
La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{-x} - x$ est solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire *f*

1.

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty\end{array}\right\} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty\end{array}\right\} \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

2. Pour tout réel x on a : $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ comme somme de deux nombres strictement négatif sur $\mathbb{R}$
f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	−	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3. a) $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ et $f(1) = e^{-1} - 1 = 1/e - 1 < 0$ donc on a $f(0) > 0 > f(1)$ de plus la fonction est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; l] par conséquent : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur [0 ; 1]
b) $f(0{,}56) > 0 > f(0{,}57)$ donc $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$ est un encadrement de α d'amplitude 0,01.
4. f est strictement décroissante sur [0 ; l] et $f(\alpha) = 0$ par conséquent on en déduit le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [0 ; l] :
si x appartient à $[0 ; \alpha[$ alors $f(x) > 0$
si x appartient à $]\alpha ; 1]$ alors $f(x) < 0$

Partie C : Calcul de Faire d'une partie du plan
1. Voir figure :
2. L'aire D est délimité par les droites d'équation $x = 0$; $x = \alpha$, la courbe C_f et l'axe des abscisses.
Sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$; $f(x) \geq 0$ donc l'aire de la partie D en unités d'aire est donnée par :

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \left[-e^{-x} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\alpha} = -e^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} - (-1) = \boxed{1 - e^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2}} u.a.$$

(on peut aller plus loin sachant que $f(\alpha) = 0$ c'est à dire $e^{-\alpha} = \alpha$)

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \boxed{1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{2}} u.a.$$

Partie D : Étude d'une fonction g et représentation graphique
1. a) Pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$:

$$g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{xe^x}{(e^{-x} - x)e^x} = \frac{xe^x}{e^{-x}e^x - xe^x} = \frac{xe^x}{1 - xe^x}$$

b)

$$g(x) = \frac{xe^x}{1 - xe^x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to -\infty} (1 - xe^x) = 1 \left.\right\} \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizonte à la courbe C_g en $-\infty$.
2.

$$g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{x}{f(x)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \alpha} x = \alpha > 0 \\ \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \text{ si } x \in [0; \alpha] \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = 0^+ \Bigg\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} g(x) = +\infty$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote à la courbe C_g

3. a) Pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$:

$$g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$g'(x) = \frac{1(e^{-x} - x) - x(-e^{-x} - 1)}{(e^{-x} - x)^2} = \frac{e^{-x} - x + xe^{-x} + x}{(e^{-x} - x)^2} = \frac{e^{-x} + xe^{-x}}{(e^{-x} - x)^2} = \frac{e^{-x}(1 + x)}{(e^{-x} - x)^2}$$

b) g'(x) est du signe de $1 + x$ sur $]-\infty ; \alpha[$ car $(e^{-x} - x)^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$ sur $]-\infty ; \alpha[$:

$1 + x > 0$ si $x > -1$.

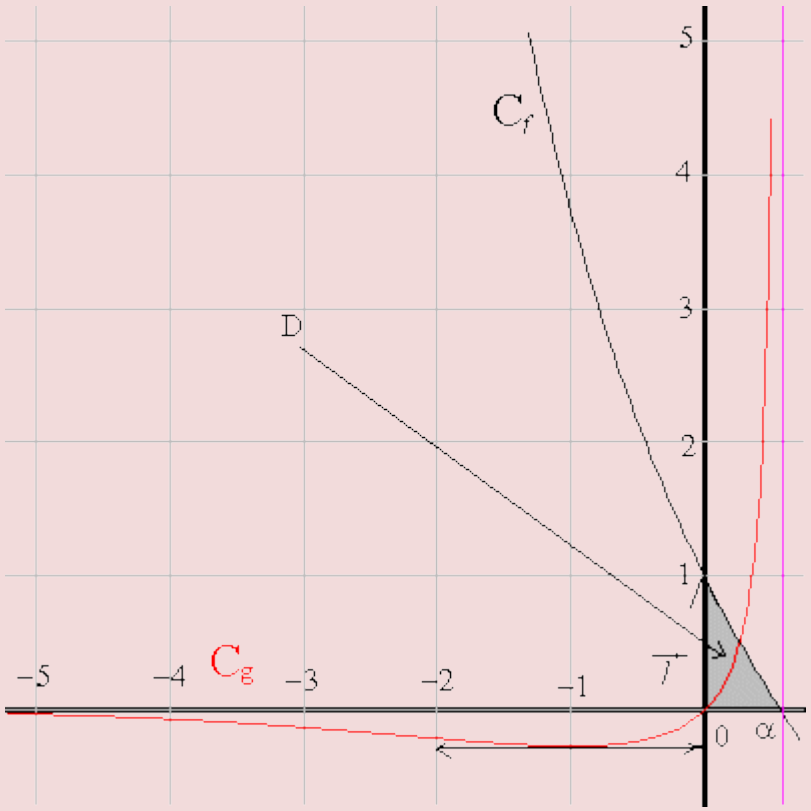
On en déduit que sur $]-\infty ; -1]$, $f'(x) \leq 0$ donc f décroissante .

et sur $[-1 ; \alpha[$, $f'(x) \geq 0$ donc f croissante .

$$g(-1) = \frac{-1}{e + 1}$$

x	$-\infty$		-1		α
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$\frac{-1}{e+1}$	↗	$+\infty$

4.



Probleme6

PARTIE A

1. limite de *f* en 0.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2+10x-9\right)=-9\\ \lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote (verticale) à la courbe (C).

2. On peut mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$ car x est non nul :

$$f(x)=x^2\left(-1+\frac{10}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{8\ln x}{x^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}-1=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-9}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8\ln x}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{10}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{8\ln x}{x^2}\right)=-1\Big\}\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

3. Pour tout réel *x* de]0;+∞[,

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$$

$$f'(x) = -2x + 10 - \frac{8}{x} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x} = \frac{-2(x^2 - 5x + 4)}{x}$$

$$\Delta = 25 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

donc deux racines réelles distinctes pour $x^2 - 5x + 4$:

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{5+3}{2} = 4 \quad \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$$

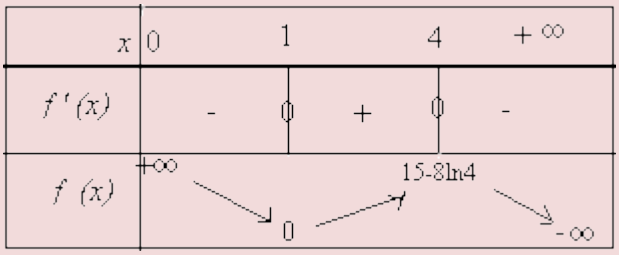
$$f'(x) = \frac{-2(x^2 - 5x + 4)}{x} = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$$

4. *f* '(*x*) est du signe de - (*x* - 1)(*x* - 4) car *x* > 0 sur]0;+∞[.
le polynôme - (*x* - 1)(*x* - 4) admet deux racines 1 et 4 est son signe est négatif à l'extérieur des racines et positif sinon.

5.

f(1) = -1² + 10 - 9 - 8 ln 1 = -1 + 1 - 8 ln 1 = 0

f(4) = -4² + 40 - 9 - 8 ln 4 = -16 + 31 - 8 ln 4 = 15 - 8 ln 4



6. a.

x	6,18	6,19	6,2	6,21
f(x)	0,0371	0,0004	-0,0364	-0,0734

b. Il est normal que l'équation *f*(*x*) = 0 admet deux solutions, 1 et α dans]0;+∞[
sur [0 ; 4] voir tableau de variation c'est 0.
sur [4 ; +∞[, la fonction *f* est strictement décroissante *f*(6,19) > 0
et *f*(6,2) < 0 donc la solution α est telles que 6,19 < α < 6,2.

c. voir graphique

7

$$F'(x) = -\frac{3x^2}{3} + 10x - 1 - 8(\ln x + x \times \frac{1}{x}) = -x^2 + 10x - 1 - 8\ln x - 8$$

$$= -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x = f(x)$$

donc F est une primitive de *f* sur]0;+∞[.

8. voir graphique .Sur l'intervalle [3 ;6] , la courbe représentative de *f*
est au dessus de l'axe des abscisses l'aire du domaine demandé (P)est donc en unité d'aire *:*

$$\int_3^6 f(x)dx = [F(x)]_3^6 = \left[-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - x - 8x\ln x\right]_3^6$$

$$= \left(-\frac{6^3}{3} + 5\times 36 - 6 - 48\ln 6\right) - \left(-\frac{3^3}{3} + 5\times 9 - 3 - 24\ln 3\right)$$

$$= (-72 + 180 - 6 - 48\ln 6) - (-9 + 45 - 3 - 24\ln 3)$$

$$= 102 - 48\ln 6 - 33 + 24\ln 3 = 69 - 48\ln 6 + 24\ln 3\ u.a.$$

PARTIE B - Application économique.

1. $f(x) < 0$ pour $x > \alpha \simeq 6{,}2$,

Conclusion : à partir de 62 pièces par jour, l'entreprise commence à travailler à perte.

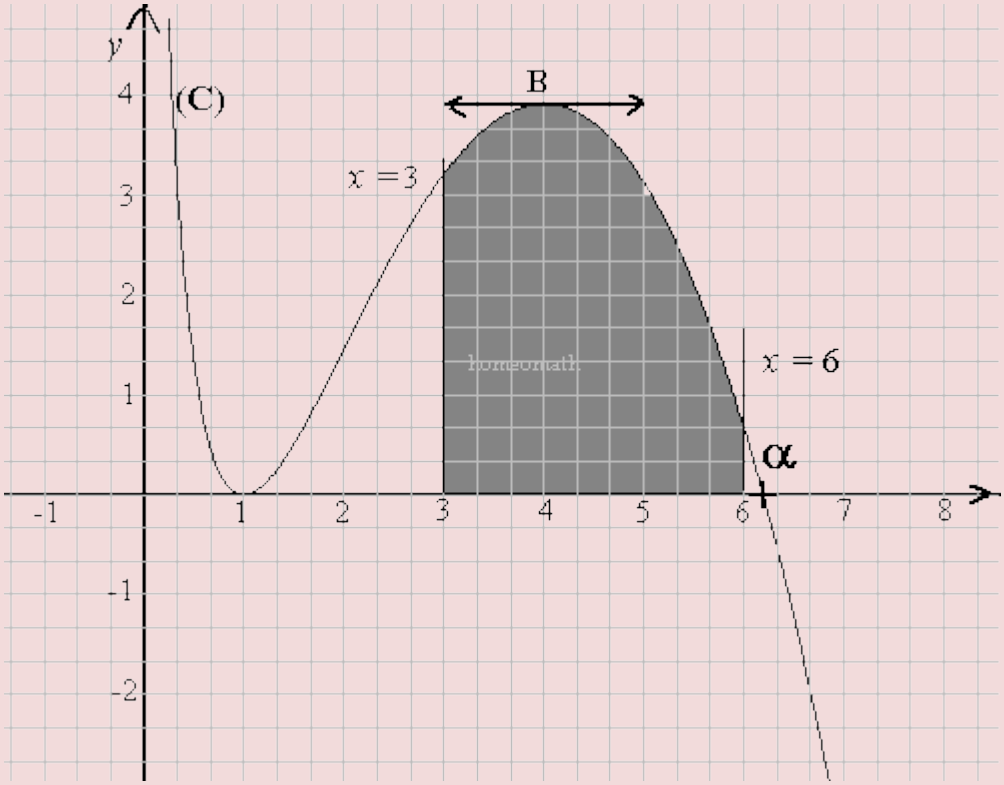
2. *f* atteint son maximum en $x = 4$ et graphiquement $f(4) \simeq 3{,}9$

Le bénéfice est donc maximum pour 40 pièces dans ce cas le bénéfice est de 3900 D / jour.

3. Bénéfice moyen journalier =

$$\frac{1}{3}\int_3^6 f(x)dx$$

= (69 - 48 ln 6 + 24 ln 3)/3 = 23 - 16 ln 6 + 8 ln 3 $\simeq$ 3,121 milliers d'euros soit 3121 D



Probleme7

Partie A

On donne le tableau de variation d'une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

homeomath

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

1. La fonction *f* est la dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$ et sur le tableau de variation on peut déduire le signe de*f*(*x*) selon les valeurs de *x* ,

F'(*x*) = *f*(*x*) ≥ 0 pour tout réel *x* donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $0 < F(3) < 4e^{-2}$.

D'après le tableau de variation de la fonction *f* pour tout réel *x* de]2 ; + ∞ [on a :

$$0 < f(x) < 4e^{-2} \Rightarrow$$
$$0 < \int_2^3 f(x)dx < \int_2^3 4e^{-2}dx \Rightarrow$$
$$0 < F(3) < 4e^{-2}\int_2^3 1dx = 4e^{-2}\left[x\right]_2^3 = 4e^{-2}$$

Partie B

1. a) Pour tout réel *x* on a :

$$f(x) = x^2e^{-x} \text{ (forme } uv)$$
$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

f ' (*x*) est du signe de *x*(2 - *x*) car e^{-x} >0 sur $\mathbb{R}$

Or *x*(2 - *x*) est bien un polynôme du second degré ayant deux racines 0 et 2 et donc le signe est négatif à l'extérieur de ses racines, donc les variations de *f* correspondent au signe de *f* '(*x*).

Les valeurs des extremums correspondent également : *f*(0) = 0 et *f*(2) = $4e^{-2}$.

b) Il suffit pour cela d'étudier le signe de *f*(*x*) - g(*x*)

$$f(x) - g(x) = x^2e^{-x} - e^{-x} = (x^2-1)e^{-x} = (x-1)(x+1)e^{-x}$$

Cette différence est du signe du polynôme (*x* - 1)(*x* + 1) car e^{-x} >0 sur $\mathbb{R}$ cequi donne comme tableau de signe :

x	-∞		-1		1		+∞
f(x) - g(x)		+	0	-	0	+	

Sur]- ∞ ; - 1] ∪ [1 ; + ∞ [la courbe (C) est au dessus de la courbe (Γ)

Sur [-1 ; 1] la courbe la courbe (C) est au dessous de la courbe (Γ)

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par h(*x*) = (x^2 - l)e^{-x}.

a) Pour tout réel *x* on a :

H(*x*) = ($-x^2$ -2*x* - l)e^{-x} donc

H '(*x*) = (2*x* -2)e^{-x} - ($-x^2$ -2*x* - l)e^{-x} = (-2*x* -2 + x^2 + 2*x* + l)e^{-x} = (x^2 - l)e^{-x} = *h*(*x*)

donc H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

b) Sur l'intervalle [1 ; α] la courbe (C) est au dessus de la courbe (Γ) (voir question 1) donc l'aire A(α) exprimée en unité d'aire est :

$$\int_1^\alpha f(x) - g(x)dx = \int_1^\alpha h(x)dx = \left[H(x)\right]_1^\alpha = \left[(-x^2-2x-1)e^{-x}\right]_1^\alpha$$
$$= (-\alpha^2 - 2\alpha - 1)e^{-\alpha} - (-1^2 - 2 - 1)e^{-1} = \boxed{-(\alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha} + 4e^{-1}}$$

c)

$$A(\alpha) = -(\alpha^2 + 2\alpha + 1)e^{-\alpha} + 4e^{-1} = -\alpha^2 e^{-\alpha} - 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 4e^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\alpha \to +\infty} -\alpha^2 e^{-\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} -2\alpha e^{-\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} -e^{-\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} 4e^{-1} = 4e^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = 4e^{-1}$$

3. On admet que, pour tout réel *m* strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation *y = m* coupe la courbe (C) au point P(x_P; *m*) et la courbe (T) au point Q(x_Q; *m*).

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P appartenant à l'intervalle]- ∞ ,-l] telle que la distance PQ soit égale à 1.

a) Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe, page 7)

les points P et Q tels que $x_P \in$]- ∞,-1] et PQ = 1.

b) PQ = | x_P - x_Q | les deux points d'abscisses repectives x_P et de x_Q appartiennent respectivement aux deux courbes (C) et (Γ) et on la même ordonnée donc $f(x_P) = g(x_Q)$.

c)

$$\begin{cases} f(x_P) = g(x_Q) \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P^2 e^{-x_P} = e^{-x_Q} \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P^2 = e^{x_P - x_Q} \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_P^2 = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \quad ou \quad x_P^2 = e \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \dfrac{1}{\sqrt{e}} ou\ x_P = \dfrac{-1}{\sqrt{e}} ou\ x_P = \sqrt{e}\ ou\ x_P = -\sqrt{e} \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases}$$

$$x_P = \frac{1}{\sqrt{e}} \notin]-\infty;-1],\ x_P = \frac{-1}{\sqrt{e}} \notin]-\infty;-1],\ x_P = \sqrt{e} \notin]-\infty;-1],\ \boxed{x_P = -\sqrt{e} \in]-\infty;-1}$$

La solution est en rouge et les autres sont en bleu.

Probleme9

Partie A

1. L' équation $y' + y = 0$ est de la forme $y' - ay = 0$ avec $a = -1$, or on sait que les solutions de cette équation sont des fonctions y définies par $y(x) = ke^{ax} = ke^{-x}$ où k est une constante réelle quelconque.

2. $h(x) = 2xe^{-x}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$h'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x}$ (forme $(uv)' = u'v + uv'$)

donc $h'(x) + h(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2xe^{-x} = 2e^{-x}$, il en résulte que la fonction h vérifie l'équation (1) elle est donc solution de l'équation (1).

3. a. On admet que toute solution de (1) s'écrit sous la forme $g + h$, où g désigne une solution de l'équation (2) donc toute solution de (1) s'écrit :

$y(x) = ke^{-x} + 2xe^{-x}$ où k est une constante réelle quelconque.

b. f est solution de (1) donc $f(x) = ke^{-x} + 2xe^{-x}$ avec la condition initiale $f(0) = -1$ on va déterminer la constante k : $ke^0 + 0 = -1$ d'où k = -1

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^{-x} + 2xe^{-x} = (2x - 1)e^{-x}$

Partie B

1. a .

$$f(x) = (2x-1)e^{-x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1) = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

1. b.

$$f(x) = 2xe^{-x} - e^{-x} = 2\frac{x}{e^x} - e^{-x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Conséquence graphique : la droite d'équation y = 0 (axe des abscisses) est asymptote à la courbe C en + ∞.

2. a.

$f'(x) = 2e^{-x} + (2x-1)(-e^{-x}) = 2e^{-x} - (2x-1)e^{-x} = (2-2x+1)e^{-x} = (-2x+3)e^{-x}$

sur $\mathbb{R}$ **,** $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 3$.

2. b.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = (2\times\frac{3}{2} - 1)e^{-\frac{3}{2}} = (3-1)e^{-\frac{3}{2}} = \boxed{2e^{-3/2}} = \frac{2}{e^{3/2}} = \frac{2}{(e^{1/2})^3} = \frac{2}{(\sqrt{e})^3} = \frac{2}{e\sqrt{e}} = \frac{2\sqrt{e}}{e^2}$$

x	∞	3/2	∞
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-∞ ↗	$2e^{-3/2}$	↘ 0

3.a. Soit x l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses on a : $f(x) = 0$ d'où $(2x - 1)e^{-x}$ équivaut à $2x - 1 = 0$ soit $x = 1/2$.

La courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1/2.

b.

au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

coefficient directeur de la tangente : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-2\times\frac{1}{2}+3\right)e^{-1/2} = (-1+3)e^{-1/2} = 2e^{-1/2}$

ordonnée du point : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

équation de la tangente : $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)(x-\frac{1}{2}) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$y = 2e^{-1/2}(x - \frac{1}{2})$$

$$\boxed{y = 2e^{-1/2}x - e^{-1/2}} \quad (T)$$

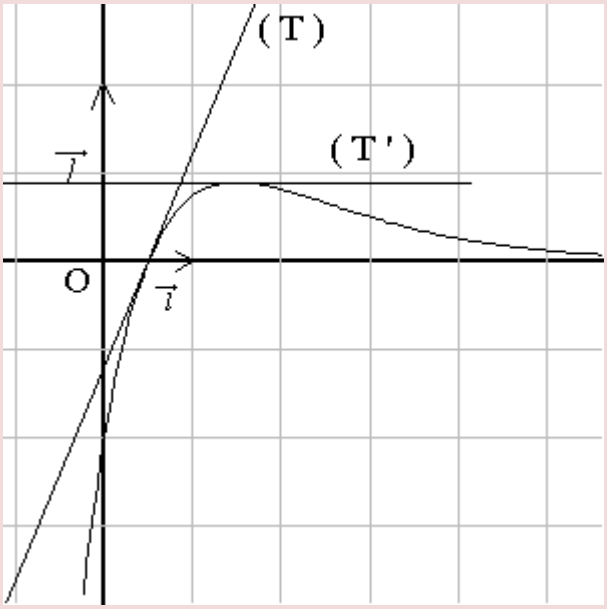
au point d'abscisse $\frac{3}{2}$

coefficient directeur de la tangente : $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ (tableau de variation)

ordonnée du point : $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2e^{-3/2}$ (tableau de variation)

équation de la tangente : $y = f'\left(\frac{3}{2}\right)(x - \frac{3}{2}) + f\left(\frac{3}{2}\right)$

$\boxed{y = 2e^{-3/2}}$ (T')



c. (Voir figure ci-contre)

Partie C

1. Pour tout réel x ,on a :

$-f'(x) + 2e^{-x} = -(-2x + 3)e^{-x} + 2e^{-x}$

$= (2x - 3)e^{-x} + 2e^{-x}$

$= (2x - 3 + 2)e^{-x}$

$= (2x - 3 + 2)e^{-x} = f(x)$

donc pour tout réel x : $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$

2. On en déduit une primitive F de f sur $\mathbb{R}$:

$F(x) = -f(x) - 2e^{-x} = -(2x - 1)^{e-x} - 2e^{-x} = -2x - 1)e^{-x}$

Probleme10

1)

$x'(t) = v(t)$ et $x''(t) = v'(t)$

$25x'(t) + 200x''(t) = 50 \Leftrightarrow$

$25v(t) + 200v'(t) = 50 \Leftrightarrow$

$200v'(t) = -25v(t) + 50 \Leftrightarrow$

$v'(t) = \frac{-25}{200}v(t) + \frac{50}{200} \Leftrightarrow$

$v'(t) = \frac{-1}{8}v(t) + \frac{1}{4}$

donc x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F)

* Résolution de l'équation homogène $v' = (-1/8)\, v$

les solutions de cette équation sont les fonctions $t \mapsto a\, e^{-t/8}$, où a est une

constante réelle.
* Solution particulière de l'équation différentielle (F), la solution particulière de l'équation différentielle (F) est un polynôme de degré 0, on a donc :
$(-1/8)v_0(t) + 1/4 = 0$
$v_0(t) = 2$
* Solutions générale de l'équation : $t \mapsto v(t) = 2 + a\, e^{-t/8}$ où k est une constante réelle.

2) a)

$x'(t) = 2 + a\, e^{-t/8}$.
$x'(0) = 0$
$2 + a = 0$
donc $a = -2$ d'où $x'(t) = 2 - 2\, e^{-t/8}$.

2) b)

$x(t) = 2t + 16e^{-t/8} + b$ où b est une constante réelle.
or $x(0) = 0$ donc
$16 + b = 0$ d'où $b = -16$
$x(t) = 2t + 16e^{-t/8} - 16 = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.

3)

$$v(t) = 2 - 2e^{-t/8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} -2e^{-t/8} = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} 2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} v(t) = \boxed{2 = V}$$

$$v(t) \leq \frac{90}{100} V \Leftrightarrow 2 - 2e^{-t/8} \leq \frac{90}{100} \times 2 \Leftrightarrow 1 - e^{-t/8} \leq 0,9 \Leftrightarrow$$

$$-e^{-t/8} \leq -0,1 \Leftrightarrow e^{-t/8} \geq 0,1 \Leftrightarrow \frac{-t}{8} \geq \ln \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{-t}{8} \geq -\ln 10 \Leftrightarrow$$

$$t \leq 8 \ln 10 \quad (\approx 18,42)$$

Pour $t \in [0 ; 8 \ln 10]$, la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 90 % de sa vitesse limite V .

4)

$$x(30) = 60 - 16 + 16e^{-30/8} = 44 + 16e^{-15/4} \approx 44,4\ m$$

La distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes est d'environ 44,4 m

Probleme12

A 1.

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} 1 + \ln x = -\infty \Bigg\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

on peut en déduire en passant que la droite d'équation x = 0 est asymptote à C.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

On peut en déduire que la droite d'équation y = 0 est asymptote en + ∞

2. a.

f est dérivable sur]0 ; + ∞ [et pour tout réel x de]0 ; + ∞ [on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1(\ln x + 1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

2.b.

f '(x) est du signe de - ln x car $x^2 > 0$ sur]0 ; + ∞ [

- lnx > 0 si et seulement si lnx < 0 si et seulement si 0 < x < 1

on en déduit que sur l'intervalle]0 ; 1] , f'(x) ≥ 0 donc f croissante

sur l'intervalle [1 ; + ∞ [, f'(x) ≤ 0 donc f décroissante .

2. c .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

$$f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1$$

Partie B :

1. Le point M_1 a pour ordonnées 0 donc son abscisse est solution de l'équation f(x) = 0 :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$x_1 = \frac{1}{e} \quad M_1\left(\frac{1}{e};0\right)$$

2. a.

coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_2 :

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-\ln \frac{1}{\sqrt{e}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{\ln \sqrt{e}}{\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{2}\ln e}{\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2} \times \frac{e}{1} = \frac{e}{2}$$

ordonnée du point au point d'abscisse x_2 :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1+\ln \frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{e}}{1} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

équation de la tangente Δ_2 au point M_2 :

$$y = f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$y = \frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$y = \frac{e}{2}x - \frac{e}{2\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$y = \frac{e}{2}x - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$y = \frac{e}{2}x$$

b. c'est bien l'équation d'une droite passant par l'origine du repère.

3. la tangente au point M_3 d'abscisse x_3 est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul donc $f'(x_3) = 0$ on en déduit $x_3 = 1$ et M_3 (1 ; 1)

4.

$$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = -\frac{x - 2x\ln x}{x^4} = -\frac{1-2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x - 1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln\sqrt{e} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

$$x_4 = \sqrt{e}$$

5.

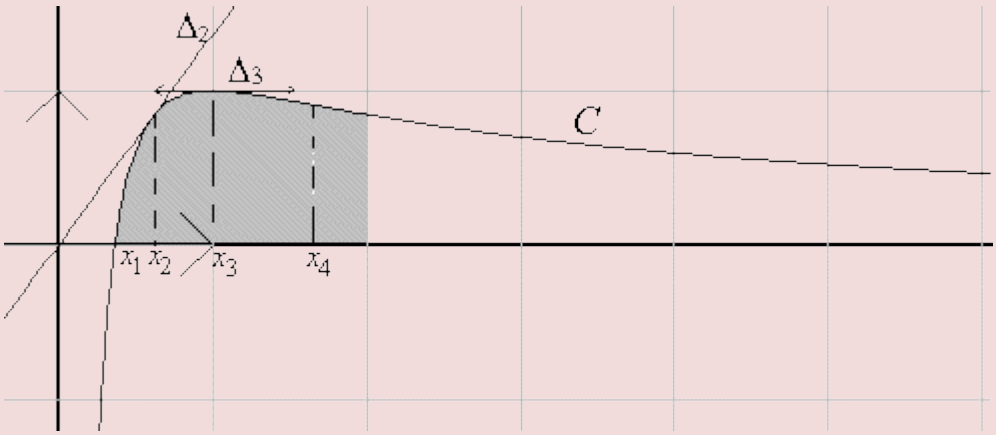
$$x_1 = \frac{1}{e}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \sqrt{e}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \times e = \sqrt{e} \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e} \quad \frac{x_4}{x_3} = \sqrt{e}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \sqrt{e}$$

donc x_1, x_2, x_3 , x_4 sont les quatre termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt{e}$

6.



Partie C :

1. g est dérivable sur]0 ; + ∞ [et pour tout réel x de]0 ; + ∞ [on a :

$$g(x) = (\ln x)^2$$

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x}(\ln x)^1 = 2\frac{\ln x}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$F(x) = \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

2.

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)\,dx = \left[\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^{2} =$$

$$\left[\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \left(\ln \frac{1}{e} + \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{e} \right)^2 \right) \right] =$$

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{2} \approx 1,43\ u.a \approx 35,8\ cm^2$$