NOMBRES COMPLEXES - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

On donne $z = 3+\sqrt{3}i$ et $z' = -1+2i$

Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants : $z_1 = z - \overline{z'}$; $z_2 = z \cdot \overline{z}$; $z_3 = z^2$; $z_4 = z'^3$; $z_5 = \dfrac{z}{z'}$

Exercice n°2.

1) Calculer i^2, i^3 et i^4

2) En déduire la valeur de i^{2006} et de i^{2009}, puis les entiers naturels *n* tels que i^n est imaginaire pur

3) Déterminer les entiers naturels *n* tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif.

Exercice n°3.

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) Les équations $5z+2i = (1+i)z-3$ et $\dfrac{z-i}{z+1} = 4i$

2) Le système d'inconnues complexes z_1 et z_2 : $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1-7i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$

3) Les équations $2z + i\overline{z} = 3$ et $z^2 + z \cdot \overline{z} = 0$

4) Les équations $-2z^2+6z-5=0$ et $(z^2+2)(z^2-4z+4)=0$

Exercice n°4.

Pour tout complexe $z = x+iy$, avec *x* et *y* réels, $z \neq -1$, on considère le complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-i}{z+1}$

1) On note $z' = x' + iy'$, avec *x*' et *y*' réels. Exprimer x' et y' en fonction de *x* et *y*

2) Déterminer l'ensemble M des points d'affixe *z* tels que z' soit réel.

Exercice n°5.

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A,B,C et D d'affixes respectives :

$z_A = -1-5i$, $z_B = 4-3i$, $z_C = 3+3i$ et $z_D = -2+i$

1) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

2) Déterminer l'affixe du point C', symétrique du point C par rapport à D

3) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

4) Quelle est la nature du quadrilatère A'BC'D ?

Exercice n°6.

On considère le plynôme $P(z)$ suivant : $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12)$

1) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle z_1

2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z-z_1)Q(z)$

3) Démontrer que l'équation $Q(z)=0$ admet une solution imaginaire pure z_2

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

5) On note z_3 la 3ième solution de l'équation $P(z)=0$. Démontrer que les points du plan complexe A,B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3, sont alignés

Exercice n°7.

Déterminer le module, un argument et une forme exponentielle de chacun des nombres donnés :

$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. En déduire module et argument de $z_1 \cdot z_2$, $z_1 \cdot z_3$ et $(z_2)^2$

Exercice n°8.

Ecrire $1+i\sqrt{3}$ et $1-i$ sous la forme trigonométrique et simplifier : $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice n°9.

Affirmation	VRAI	FAUX
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, z imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z}=-z$		
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\left\|\overline{z}\right\|=-\left\|z\right\|$		
Pour $z\in\mathbb{C}$ et $z'\in\mathbb{C}$, $z=z'\Leftrightarrow\left\|z\right\|=\left\|z'\right\|$		
Si $\mathrm{Re}(z)<-2$, alors $\left\|z\right\|>2$		
Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\left\|1+iz\right\|=\sqrt{1+z^2}$		

Exercice n°10.

Déterminer et représenter dans chaque cas, l'ensemble des points M du plan dont l'affixe *z* vérifie la relation donnée :

1) $\left|z-3\right|=\left|z-3i\right|$

2) $\left|2-3i+z\right|=\left|2+3i\right|$

3) $\left|\overline{z}-4+i\right|=1$

4) $\arg\left(\overline{z}\right)=\arg\left(-z\right)\ \left(2\pi\right)$

Exercice n°11.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z+4=0$. On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution

2) Déterminer le module et un argument de chacune des solutions z_1 et z_2

3) Déterminer le module et un argument de $\left(z_1\right)^2$ et $\left(z_2\right)^2$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, on considère les points A,B,A' et B' d'affixes respectives : $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, $-2+2i\sqrt{3}$ et $-2-2i\sqrt{3}$

4) Déterminer la nature du quadrilatère AA'B'B

5) Démontrer que le triangle AA'B' est rectangle.

6) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe *z* vérifiant $\left|z-1+i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$.

Exercice n°12.

Pour tout nombre complexe *z*, on définit : $P\left(z\right)=z^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{2}\right)z-8$

1) Calculer *P*(2). Déterminer une factorisation de *P*(*z*) par (*z*-2)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P\left(z\right)=0$

On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive.

Vérifier que $z_1+z_2=-2\sqrt{2}$. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 .

3) a) Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm), les points :

A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I milieu de [AB]

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle.

En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OI}\right)$

c) Calculer l'affixe z_I de I, puis le module de z_I

d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}$

Exercice n°13.

On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$

1) Calculer $P\left(i\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-i\sqrt{3}\right)$. Déterminer le polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a $P(z)=\left(z^2+3\right)Q(z)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$

3) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm) les points A,B,C et D d'affixes respectives : $z_A=i\sqrt{3}$; $z_B=-i\sqrt{3}$; $z_C=3+2i\sqrt{3}$ et $z_D=\overline{z_C}$

4) On note E le symétrique de D par rapport à O. Placer le point E sur le dessin. Montrer que $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et déterminer la nature du triangle BEC

Exercice n°14.

z étant un complexe, on note (S) le système $\begin{cases} |z|=|z-6| \\ \arg(z^2)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Donner le module et un argument des trois complexes suivants : $a=\sqrt{3}+i$ $\quad b=-2+2i$ $\quad c=3+3i$

2) Parmi les complexes *a*, *b* et *c*, lesquels sont solutions du système (S) ? (*justifier la réponse*).

3) M étant le point d'affixe *z*, et *A* étant le point d'affixe 6, traduire géométriquement les deux contraintes de (S).

4) Résoudre le système (S) par la méthode de votre choix.

Exercice n°15.

Soit le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$

On définit dans P une suite de points $\left(M_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'affixes z_n définies par :

$z_0=8$ et pour tout entier naturel *n*, $z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n$

1) Calculer z_n en fonction de *n*.

2) Pour tout entier naturel *n* , calculer le rapport $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$

En déduire la nature du triangle OM_nM_{n+1} et montrer que : $M_nM_{n+1}=kOM_{n+1}$, où *k* est un réel strictement positif à déterminer .

3) Si r_n est le module de z_n, donner la limite de r_n si n tend vers plus l'infini. Quelle interprétation géométrique peut-on donner ?

Exercice n°16.

On considère l'application *f* du plan qui à tout point M, d'affixe *z* distincte de 2*i*, associe le point d'affixe :

$$z'=\frac{z+i}{z-2i}$$

1) Pour $z\neq 2i$, on pose $z=2i+re^{i\theta}$, avec *r*>0 et $\theta\in\mathbb{R}$. Ecrire $z'-1$ à l'aide de *r* et θ

2) A est le point d'affixe 2*i*

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M pour lesquels $|z'-1|=3$

b) Déterminer l'ensemble E_2 des points M pour lesquels $\arg\left(z'-1\right)=\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$

c) Représenter les ensembles E_1 et E_2

Exercice n°17.

1) Déterminer la forme complexe de la rotation *r* de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Préciser l'image par *r* du point A d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2) Soit *t* la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $z_1 = z - \sqrt{3}i$

a) Caractériser la transformation *t*

b) Donner la forme complexe de $t \circ r$

Reconnaître cette nouvelle transformation en déterminant ses éléments caractéristiques

Exercice n°18.

On définit la transformation *f* du plan par sa forme complexe :

$z' + 3 - 4i = 2(z + 3 - 4i)$

1) Quelle est la nature de l'application *f* ?

2) Déterminer l'image *C'* par *f* du cercle *C* de centre A(-2+i) et de rayon 1

CORRECTION

Exercice n°1

$z_1 = z - \overline{z'} = 3+\sqrt{3}i-(-1-2i) = 3+\sqrt{3}i+1+2i = \boxed{4+\left(\sqrt{3}+2\right)i}$

$z_2 = z\cdot\overline{z} = |z|^2 = \left|3+\sqrt{3}i\right|^2 = 3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2 \boxed{=12}$

$z_3 = z^2 = \left(3+\sqrt{3}i\right)^2 = 3^2+2\times3\times\sqrt{3}i+\left(\sqrt{3}i\right)^2 = 9+6\sqrt{3}i+\left(\sqrt{3}\right)^2(i)^2 = 9+6\sqrt{3}i-3 = \boxed{6+6\sqrt{3}i}$

$z_4 = z'^3 = (-1+2i)^3 = (-1)^3+3\times(-1)^2\times(2i)+3\times(-1)^1\times(2i)^2+(2i)^3$

$= -1+6i-3\times(-4)+8i^3 = -1+6i+12+8i\times\underbrace{i^2}_{=-1} = -1+6i+12-8i = \boxed{11-2i}$

$z_5 = \dfrac{z}{z'} = \dfrac{3+\sqrt{3}i}{-1+2i} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}i\right)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \dfrac{-3-3\times2i-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i^2}{(-1)^2-(2i)^2}$

$= \dfrac{-3-6i-\sqrt{3}i+2\sqrt{3}}{1-(-4)} = \dfrac{2\sqrt{3}-3-i\left(6+\sqrt{3}\right)}{5} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{5}-i\dfrac{6+\sqrt{3}}{5}}$

Exercice n°2

1) On calcule successivement $i^2=-1$, $i^3 = i^2\times i = -1\times i = \boxed{-i}$ et $i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 \boxed{=1}$

2) La division euclidienne de 2006 par 4 fournit $2006 = 4\times501+2$

Ainsi, $i^{2006} = i^{4\times501+2} = i^{4\times501}\times i^2 = \left(i^4\right)^{501}\times(-1) = (1)^{501}\times(-1) = \boxed{-1}$

La division euclidienne de 2009 par 4 fournit $2009 = 4\times502+1$

Ainsi, $i^{2009} = i^{4\times502+1} = i^{4\times502}\times i^1 = \left(i^4\right)^{502}\times i = (1)^{502}\times i = \boxed{i}$

Notons q et r le quotient et le reste de la division de n par 4. On a donc $n = 4q+r$ avec $0\le r\le3$

Si r=0, c'est-à-dire si n=4q, $i^n = i^{4\times q} = \left(i^4\right)^q = (1)^q = \boxed{1}$

Si r=1, c'est-à-dire si n=4q+1, $i^n = i^{4\times q+1} = i^{4\times q}\times i^1 = \left(i^4\right)^q\times i = (1)^q\times i = \boxed{i}$

Si r=2, c'est-à-dire si n=4q+2, $i^n = i^{4\times q+2} = i^{4\times q}\times i^2 = \left(i^4\right)^q\times i^2 = (1)^q\times(-1) = \boxed{-1}$

Si r=3, c'est-à-dire si n=4q+3, $i^n = i^{4\times q+3} = i^{4\times q}\times i^3 = \left(i^4\right)^q\times i^3 = (1)^q\times(-i) = \boxed{-i}$

Les entiers naturels n tels que i^n est imaginaire pursont donc de la forme n=4q+1 ou n=4q+3

3) Déterminons la forme trigonométrique de $1+i$: Le module de 1+i est $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Un argument θ de 1+i vérifie $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$ convient

Ainsi, $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et pour tout entier naturel, $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}}$

$(1+i)^n$ sera un réel négatif si et seulement $n\dfrac{\pi}{4} = \pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \boxed{n = 4(2k+1), k\in\mathbb{Z}}$

Les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif sont donc de la forme $\boxed{n = 4(2k+1), k\in\mathbb{Z}}$

Exercice n°3

1)

$5z+2i=(1+i)z-3 \Leftrightarrow z\left(5-(1+i)\right)=-2i-3 \Leftrightarrow z(4-i)=-2i-3$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2i-3}{4-i}=\frac{(-2i-3)(4+i)}{(4-i)(4+i)}=\frac{-8i-2i^2-12-3i}{4^2-i^2}=\frac{2-12-11i}{16+1}\boxed{=-\frac{10}{17}-\frac{11}{17}i}$$

Ainsi, $\boxed{S=\left\{-\frac{10}{17}-\frac{11}{17}i\right\}}$

Pour $z\neq -1$,

$$\frac{z-i}{z+1}=4i \Leftrightarrow z-i=4i(z+1) \Leftrightarrow z(1-4i)=4i+i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{5i}{1-4i}=\frac{5i(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}=\frac{5i+20i^2}{1^2-(4i)^2}=\frac{5i-20}{1-(-16)}\boxed{=-\frac{20}{17}+i\frac{5}{17}}$$

Ainsi, $\boxed{S=\left\{-\frac{20}{17}+i\frac{5}{17}\right\}}$

2) On résout le système par combinaison :

$$\begin{cases}3z_1+z_2=1-7i & L_1\\ iz_1+2z_2=11i & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6z_1+2z_2=2-14i & 2L_1\\ iz_1+2z_2=11i & L_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(6-i)z_1=2-14i-11i & 2L_1-L_2\\ iz_1+2z_2=11i & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z_1=\frac{2-25i}{6-i} & 2L_1-L_2\\ z_2=\frac{11i-iz_1}{2} & L_2\end{cases}$$

On obtient donc :

$$z_1=\frac{2-25i}{6-i}=\frac{(2-25i)(6+i)}{(6-i)(6+i)}=\frac{12+2i-150i-25i^2}{36-i^2}$$

$$=\frac{12+2i-150i+25}{36+1}=\frac{37-148i}{37}\boxed{=1-4i}$$

puis $z_2=\frac{11i-i(1-4i)}{2}=\frac{11i-i+4i^2}{2}=\frac{-4+10i}{2}=\boxed{-2+5i}$

Finalement, $\boxed{S=\{(1-4i;-2+5i)\}}$

3) Si on pose $z=x+iy$, avec $x,y\in\mathbb{R}$, l'équation $2z+i\bar{z}=3$ devient équivalente à :

$2(x+iy)+i(x-iy)=3 \Leftrightarrow 2x+2iy+ix-i^2y=3$

$\Leftrightarrow 2x+y+i(2y+x)=3$

donc équivalente au système $\begin{cases}2x+y=3\\ 2y+x=0\end{cases}$, que l'on résout par substitution :

$$\begin{cases}2x+y=3 & L_1\\ 2y+x=0 & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-2x & L_1\\ 2(3-2x)+x=0 & L_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=3-2x & L_1\\ 6-4x+x=0 & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-2x & L_1\\ x=2 & L_2\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}y=-1 & L_1\\ x=2 & L_2\end{cases}}$$

Ainsi $\boxed{S=\{2-i\}}$

Si on pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, l'équation $z^2 + z \cdot \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 + |z|^2 = 0$ devient équivalente à :

$(x+iy)^2 + x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 + x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2ixy = 0$

donc équivalente au système $\begin{cases} x^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$. Les solutions sont donc tous les couples $\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$, c'est-à-dire tous les nombres imaginaires purs.

4) On calcule le discriminant de l'équation $-2z^2 + 6z - 5 = 0$:

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$

L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-6-2i}{2 \times (-2)} = \boxed{\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i}$ et $z_2 = \dfrac{-6+2i}{2 \times (-2)} = \boxed{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i}$

$\boxed{S = \left\{ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i ; \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i \right\}}$

L'équation $(z^2+2)(z^2-4z+4) = 0$ se réécrit $(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})(z-2)^2 = 0$, et admet donc comme ensemble de solutions $\boxed{S = \{-i\sqrt{2} ; i\sqrt{2} ; 2\}}$

Exercice n°4

1) Pour tout complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, $z \neq -1$, on calcule :

$$z' = \frac{z-i}{z+1} = \frac{x+iy-i}{x+iy+1} = \frac{(x+iy-i)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} = \frac{x^2 + x - ixy + iyx + iy - i^2y^2 - ix - i + i^2 y}{(x+1)^2 + y^2}$$

$= \dfrac{x^2 + x + y^2 - y}{(x+1)^2 + y^2} + i \dfrac{y - x - 1}{(x+1)^2 + y^2}$. Ainsi $\boxed{x' = \dfrac{x^2 + x + y^2 - y}{(x+1)^2 + y^2}}$ et $\boxed{y' = \dfrac{y - x - 1}{(x+1)^2 + y^2}}$

2) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y - x - 1}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow y - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = x + 1}$ M appartient donc à la droite d'équation $y = x + 1$

Exercice n°5

1) On calcule d'une part $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4 - 3i - (-1 - 5i) = 4 - 3i + 1 + 5i = 5 + 2i$,

Et d'autre part $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 3 + 3i - (-2 + i) = 3 + 3i + 2 - i = 5 + 2i$

Puisque $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$, on en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2) Si C' est le symétrique du point C par rapport à D, alors $\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{CD}$, ce qui se traduit par $z_{\overrightarrow{DC'}} = z_{\overrightarrow{CD}}$, c'est-à-dire

$z_{C'} - z_D = z_D - z_C \Leftrightarrow z_{C'} = 2z_D - z_C = 2(-2+i) - (3+3i)$

$= -4 + 2i - 3 - 3i = \boxed{-7 - i}$

Ainsi $z_{C'} = \boxed{-7 - i}$

3) L'égalité vectorielle $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ se traduit, au niveau des affixes, par :

$z_{\overrightarrow{DA'}} = z_{\overrightarrow{DB}} + z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow z_{A'} - z_D = z_B - z_D + z_C - z_D$

$\Leftrightarrow z_{A'} = z_B + z_C - z_D = 4 - 3i + 3 + 3i - (-2 + i)$

$\Leftrightarrow \boxed{z_{A'} = 9 - i}$

4) On calcule d'une part $z_{\overrightarrow{A'B}} = z_B - z_{A'} = 4 - 3i - (9 - i) = -5 - 2i$, et d'autre part $z_{\overrightarrow{DC'}} = z_{C'} - z_D = -7 - i - (-2 + i) = -5 - 2i$

Puisque $z_{\overrightarrow{A'B}} = z_{\overrightarrow{DC'}}$, on en déduit que $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{DC'}$, donc que le quadrilatère A'BC'D est un parallélogramme.

Exercice n°6

1) En réécrivant autrement le polynôme P, à savoir :
$P(z)=z^3-22z-36+i(9z^2+12z-12)=z^3-22z-36+3i(3z^2+4z-4)$, on s'apperçoit que si z_1 est une racine réelle de *P*, alors on doit avoir nécessairement $z_1^3-22z_1-36=0$ et $3z_1^2+4z_1-4=0$. Cherchons donc les racines **réelles** du polynôme $R(z)=3z^2+4z-4$ en calculant son discriminant : $\Delta=4^2-4\times3\times(-4)=16+48=64=8^2$ d'où l'existence de deux racines réelles $\frac{-4-\sqrt{64}}{2\times3}=-2$ et $\frac{-4+\sqrt{64}}{2\times3}=\frac{2}{3}$. Sur ces deux racines, seule –2 est racine du polynôme $S(z)=z^3-22z-36$. Ainsi la seule racine réelle de *P* est $\boxed{z_1=-2}$

2) Il existe donc un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z)=(z-(-2))Q(z)\Leftrightarrow P(z)=(z+2)Q(z)$, avec $\deg Q=\deg P-1=2$, donc de la forme $Q(z)=az^2+bz+c$. par identification

Pour trouver Q, effectuons la division euclidienne du polynôme P par *z*-2 (puisque l'égalité ci-dessus entraîne $Q(z)=\frac{P(z)}{z+2}$, pour tout $z\neq-2$)

On obtient :

$$\begin{array}{l|l}
z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12) & z+2 \\
\hline
z^3+2z^2 & z^2+(9i-2)z-6i-18 \\
\quad (9i-2)z^2+2(6i-11)z-3(4i+12) & \\
\quad (9i-2)z^2+2(9i-2)z & \\
\qquad (-6i-18)z-3(4i+12) & \\
\qquad (-6i-18)z-12i-36 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Le polynôme Q est donc :

$\boxed{Q(z)=z^2+(9i-2)z-6(i+3)}$

hors programme 4ème année

3) On calcule le discriminant du polynôme Q :
$\Delta=(9i-2)^2-4\times1\times(-6(i+3))=-81-36i+4+24i+72=-5-12i$. L'astuce est de remarquer que $-5-12i=(2-3i)^2$, ce qui permet de calculer les deux racines complexes de Q : L'une vaut $\frac{-(9i-2)-(2-3i)}{2}=\frac{-6i}{2}=-3i$ et l'autre vaut $\frac{-(9i-2)+(2-3i)}{2}=\frac{-12i+4}{2}=-6i+2$. L'équation Q(*z*)=0 admet donc une solution imaginaire pure : $\boxed{z_2=-3i}$

4) L'autre solution de l'équation Q(*z*)=0 ayant été calculée ci-dessus, et par application de la règle du produit nul,
$P(z)=0\Leftrightarrow(z+2)Q(z)=0\Leftrightarrow z+2=0$ ou $Q(z)=0$ et ainsi $\boxed{S=\{-2;-3i;-6i+2\}}$

5) Notons A le point d'affixe $z_1=-2$, B le point d'affixe $z_2=-3i$ et C le point d'affixe $z_3=-6i+2$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut $z_2-z_1=-3i+2$. Celle du vecteur $\overrightarrow{AC}$ vaut $z_3-z_1=-6i+4$

Puisque $z_3-z_1=2(z_2-z_1)$, on en déduit que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc que les points A,B et C sont alignés

Exercice n°7

Le module de z_1 vaut $\left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Un argument θ de z_1 vérifie $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$. $\theta=-\frac{\pi}{6}$ convient

Ainsi, $z_1=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Le module de z_2 vaut $\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Un argument θ de z_2 vérifie $\cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ convient

Ainsi, $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Pour z_3, on reconnaît directement $z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Le module de z_3 vaut donc 1, un argument $\dfrac{2\pi}{3}$. Une forme exponentielle est donc $z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On calcule $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$

Le module de $z_1 \cdot z_2$ vaut donc 2 et un argument de $z_1 \cdot z_2$ est donc $\dfrac{\pi}{12}$

On calcule $z_1 \cdot z_3 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{6}} = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Le module de $z_1 \cdot z_3$ vaut donc $2\sqrt{2}$ et un argument de $z_1 \cdot z_3$ est donc $-\dfrac{\pi}{2}$

On calcule $(z_2)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times e^{-i\frac{2\times 3\pi}{4}} = \dfrac{1}{2} \times e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \dfrac{1}{2} \times e^{i\frac{\pi}{2}}$

Le module de $(z_2)^2$ vaut donc $\dfrac{1}{2}$ et un argument de $(z_2)^2$ est donc $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice n°8

Notons $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$. Alors le module de z_1 est $|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Pour trouver un argument de z_1, cherchons θ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve $\theta = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi $\boxed{z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

De même, notons $z_2 = 1 - i$. Alors le module de z_2 est $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Pour trouver un argument de z_2, cherchons θ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$. Ainsi $\boxed{z_2 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

Le quotient $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ s'écrit donc $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Alors $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} e^{i\frac{20\times 7\pi}{12}} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{10} e^{i\frac{140\pi}{12}}$

Comme $140 = 6\times 24 - 4$, on aura $\dfrac{140\pi}{12} = \dfrac{6\times 24\pi}{12} - \dfrac{4\pi}{12} = 6\times 2\pi - \dfrac{\pi}{3} \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

Ainsi $e^{i\frac{140\pi}{12}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

Enfin, $\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{10} = 2^{10} = 1024$ En conclusion $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 1024\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right) \boxed{= 512 - 512\sqrt{3} i}$

Exercice n9

1) « Pour tout $z \in \mathbb{C}$, z imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$ » est **VRAIE**. En effet ; pour tout complexe $z = x + iy$, (x et y réels), z imaginaire pur $\Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z = -iy$

2) « Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = -|z|$ » est **FAUX**. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\bar{z}| = |z|$

3) « Pour $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ » est **FAUX**. Exemple : deux complexes.

4) « Si $\mathrm{Re}(z) < -2$, alors $|z| > 2$ » est **VRAI**. En effet, si $z = x + iy$, (x et y réels), et si $x < -2$, alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2} > 2$, c'est-à-dire $|z| > 2$

5) « Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|1 + iz| = \sqrt{1 + z^2}$ » est **FAUX**. exemple : $z = -i$

Exercice n°10

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$,

1) Si on note A et B les points dont les affixes respectives sont 3 et 3i, et M le point dont l'affixe est noté z, l'égalité $|z - 3| = |z - 3i|$ se traduit par AM=BM. Le point M étant équidistant des points A et B, il appartient à la médiatrice de [AB]. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 3| = |z - 3i|$ est donc la médiatrice de [AB], avec A(3) et B(3i)

2) Notons C le point dont l'affixe est –2+3i

Puisque $|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, l'égalité $|2 - 3i + z| = |2 + 3i| \Leftrightarrow |z - (-2 + 3i)| = \sqrt{13}$ se traduit par $CM = \sqrt{13}$

Le point M appartient donc au cercle de centre C et de rayon $\sqrt{13}$. L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|2 - 3i + z| = |2 + 3i|$ est donc le cercle de centre C(–2+3i) et de rayon $\sqrt{13}$

3) Si on pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, l'égalité $|\bar{z} - 4 + i| = 1$, équivalente à $|\bar{z} - 4 + i|^2 = 1^2 = 1$, se réécrit

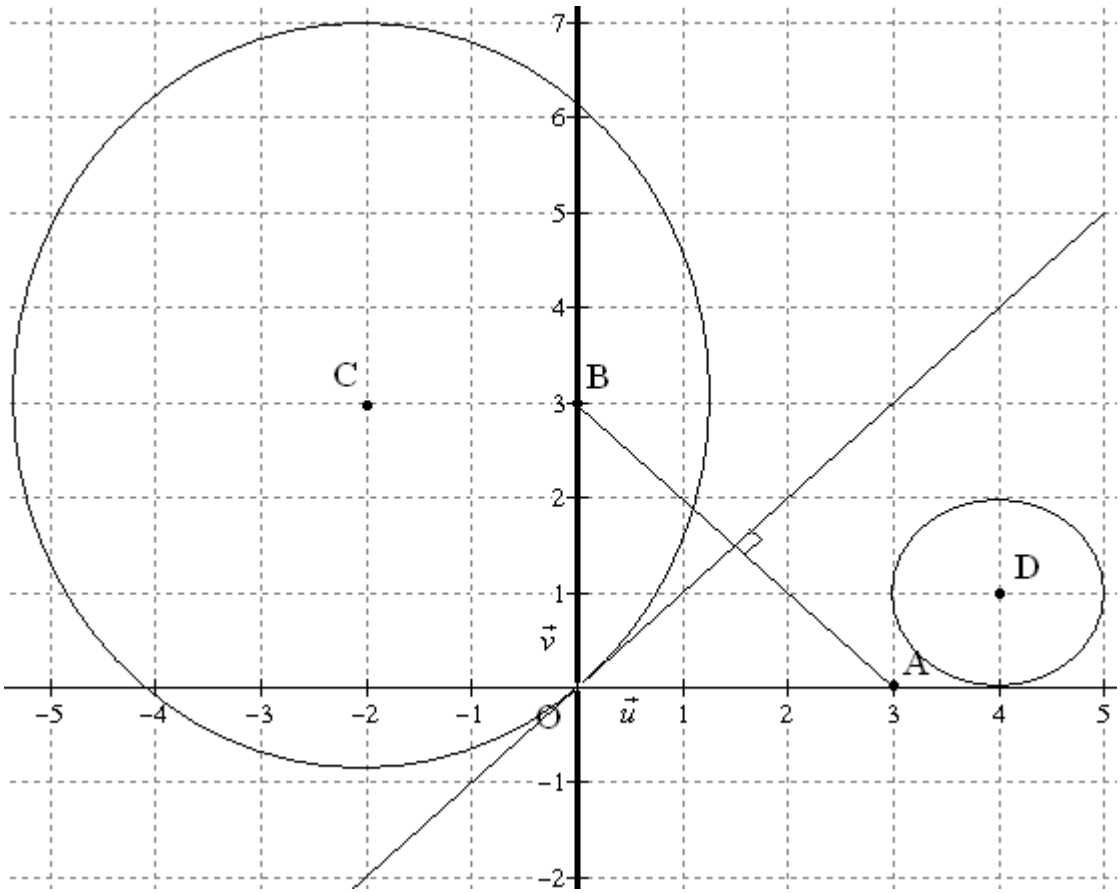
$$|x - iy - 4 + i|^2 = 1 \Leftrightarrow |x - 4 - i(y - 1)|^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1}$$

On reconnaît là l'équation du cercle de centre D(4 ;1) et de rayon 1

L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|\bar{z} - 4 + i| = 1$ est donc le cercle de centre D(4+i) et de rayon 1

4) Puisque pour tout complexe z, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ (2\pi)$, l'égalité $\arg(\bar{z}) = \arg(-z)\ (2\pi)$ se réécrit $-\arg(z) = \arg(z) + \pi\ (2\pi)$, soit $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ (\pi)$.

L'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$ est donc l'axe des imaginaires purs, privé du point O



Exercice n°11

1) Le discrimant de l'équation $z^2-2z+4=0$ vaut $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12$. L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées $z_1=\dfrac{2+i\sqrt{|12|}}{2}=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=\boxed{1+i\sqrt{3}}$ et $z_2=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=\boxed{1-i\sqrt{3}}$

2) On calcule $|z_1|=|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=\boxed{2}$ et $|z_2|=|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=\boxed{2}$.

Si on note $\begin{matrix}\theta_1=\arg(z_1)[2\pi]\\ \theta_2=\arg(z_2)[2\pi]\end{matrix}$, alors $\left.\begin{matrix}\cos(\theta_1)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta_1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{\theta_1=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]}$ et $\left.\begin{matrix}\cos(\theta_2)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta_2)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\theta_2=\boxed{-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]}$

3) On calcule $(z_1)^2=(1+i\sqrt{3})^2=-2+2i\sqrt{3}$ et $(z_2)^2=(1-i\sqrt{3})^2=-2-2i\sqrt{3}$.

On a alors $|(z_1)^2|=|-2+2i\sqrt{3}|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=\boxed{4}$ (remarque : $|(z_1)^2|=|z_1|^2$). De même $|(z_2)^2|=\boxed{4}$.

Si on note $\begin{matrix}\alpha_1=\arg(z_1^2)[2\pi]\\ \alpha_2=\arg(z_2^2)[2\pi]\end{matrix}$, alors $\left.\begin{matrix}\cos(\alpha_1)=\dfrac{-2}{4}\\ \sin(\alpha_1)=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{\alpha_1=\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]}$ et $\left.\begin{matrix}\cos(\alpha_2)=\dfrac{-2}{4}\\ \sin(\alpha_2)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{\alpha_2=-\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]}$

4) On calcule $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=-2i\sqrt{3}$ et $z_{\overrightarrow{A'B'}}=z_{B'}-z_{A'}=-4i\sqrt{3}$. On constate que $z_{\overrightarrow{A'B'}}=2z_{\overrightarrow{AB}}$.

On en conclut que $\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{AB}$, donc $(A'B')//(AB)$, donc $\boxed{\text{le quadrilatère AA'B'B est un trapèze}}$

5) On calcule respectivement : $AA'=|z_{A'}-z_A|=|-3+i\sqrt{3}|=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}$,

$A'B'=|z_{B'}-z_{A'}|=|-4i\sqrt{3}|=\sqrt{(-4\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}=\sqrt{48}$ et $AB'=|z_{B'}-z_A|=|-3-3i\sqrt{3}|=\sqrt{(-3)^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}$

L'égalité $A'B'^2=AA'^2+AB'^2$ nous affirme que $\boxed{\text{le triangle AA'B' est rectangle est rectangle en A}}$

6) L'égalité $|z-1+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$, réécrite en $|z-(1-i\sqrt{3})|=2\sqrt{3}$, se traduit par $BM=2\sqrt{3}$. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-1+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$ est donc le $\boxed{\text{cercle de centre B et de rayon } 2\sqrt{3}.}$

Exercice n°12

1) On calcule $P(2)=2^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)\times 2^2+4\left(1-\sqrt{2}\right)\times 2-8=8+8\sqrt{2}-8+8-8\sqrt{2}-8=0$

On peut donc factoriser *P*(*z*) par (*z*-2). Il existe donc trois nombres *a*,*b* et *c*, tels que pour tout *z*, $P(z)=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$. Déterminons *a*,*b* et *c* par identification. Pour tout *z*,

$$\begin{aligned}(z-2)\left(az^2+bz+c\right)&=az^3+bz^2+cz-2az^2-2bz-2c\\&=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c\end{aligned}$$

. Ainsi, on aura $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=P(z)$ pour tout *z* si et seulement si $\begin{cases}a=1\\b-2a=2\left(\sqrt{2}-1\right)\\c-2b=4\left(1-\sqrt{2}\right)\\-2c=-8\end{cases}$, ce qui nous permet d'obtenir $\begin{cases}a=1\\b=2\sqrt{2}\\c=4\end{cases}$.

Ainsi, pour tout *z*, $\boxed{P(z)=(z-2)\left(z^2+2\sqrt{2}z+4\right)}$

2) D'après la règle du produit nul, $P(z)=0$ si et seulement si z-2=0<=>z=2 ou $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$

On calcule le discriminant de cette dernière équation : $\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times 4=8-16=-8=\left(2\sqrt{2}i\right)^2$

L'équation $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$ admet donc deux racines complexes conjuguées :

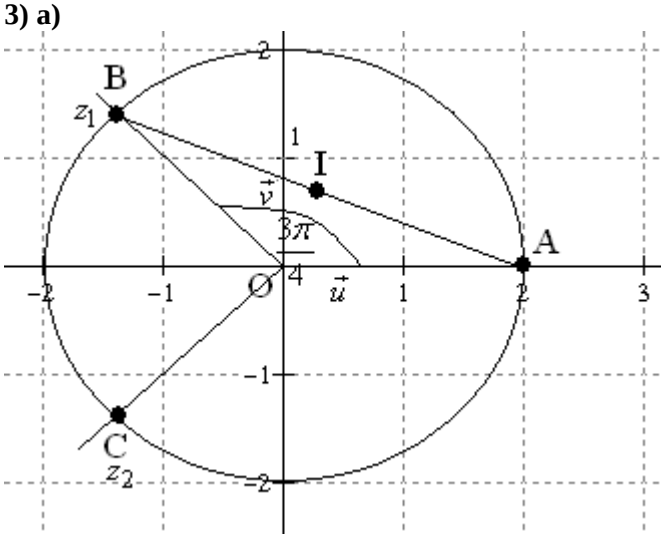
$z_1=\dfrac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ et $z_2=\dfrac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{2}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$. On vérifie que $z_1+z_2=-2\sqrt{2}$.

Le module de z_1 vaut $\left|-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$

Un argument θ de z_1 vérifie $\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\theta=\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ convient

Puisque les racines z_1 et z_2 sont conjuguées, le module de z_2 est le même que celui de z_1, à savoir 2, et un argument de z_2 est $\theta=-\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

3) a)



b) On calcule $OA=|z_A|=|2|=2$ et $OB=|z_1|=2$. Puisque OA=OB, le triangle OAB est isocèle en O.

Puisque le trianble OAB est isocèle en O, la médiane (OI) issue de O est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OI}\right)$ est donc $\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{8}$

c) Puisque I est le milieu de [AB], $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Le module de z_I vaut donc $\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

d) Puisque $\left(\vec{u};\overrightarrow{OI}\right)=\frac{3\pi}{8}\ (2\pi)$, on a donc $\arg(z_I)=\frac{3\pi}{8}\ (2\pi)$

Et puisque $z_I=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on en déduit alors que $\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{|z_I|}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$, et que

$$\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{|z_I|}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\boxed{=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

Exercice n°13

1) On calcule :

$$P\left(i\sqrt{3}\right)=\left(i\sqrt{3}\right)^4-6\left(i\sqrt{3}\right)^3+24\left(i\sqrt{3}\right)^2-18\left(i\sqrt{3}\right)+63=\left(\sqrt{3}\right)^4i^4-6\left(\sqrt{3}\right)^3i^3+24\left(\sqrt{3}\right)^2i^2-18i\sqrt{3}+63$$

$$=\left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2\left(\underbrace{i^2}_{-1}\right)^2-6\left(\sqrt{3}\right)^2\times\left(\sqrt{3}\right)\underbrace{i^2}_{-1}\times i+24\left(\sqrt{3}\right)^2\underbrace{i^2}_{-1}-18i\sqrt{3}+63$$

$$=9+18\sqrt{3}i-72-18i\sqrt{3}+63=-63+63\boxed{=0}$$

et de même

$$P\left(-i\sqrt{3}\right)=\left(-i\sqrt{3}\right)^4-6\left(-i\sqrt{3}\right)^3+24\left(-i\sqrt{3}\right)^2-18\left(-i\sqrt{3}\right)+63=\left(-\sqrt{3}\right)^4i^4-6\left(-\sqrt{3}\right)^3i^3+24\left(-\sqrt{3}\right)^2i^2+18i\sqrt{3}+63$$

$$=\left(\left(-\sqrt{3}\right)^2\right)^2\left(\underbrace{i^2}_{-1}\right)^2-6\left(-\sqrt{3}\right)^2\times\left(-\sqrt{3}\right)\underbrace{i^2}_{-1}\times i+24\left(-\sqrt{3}\right)^2\underbrace{i^2}_{-1}+18i\sqrt{3}+63$$

$$=9-18\sqrt{3}i-72+18i\sqrt{3}+63=-63+63\boxed{=0}$$

Les complexes $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ sont donc racines sur polynôme P.

Ainsi, il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels tels que :

$P(z)=\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z+i\sqrt{3}\right)Q(z)\Leftrightarrow P(z)=\left(z^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2\right)Q(z)\Leftrightarrow P(z)=\left(z^2+3\right)Q(z)$ Pour trouver Q, on effectue une division entre polynômes : Pour tout z différent de $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$, on a

$Q(z)=\frac{P(z)}{z^2+3}$. On effectue la division :

$z^4-6z^3+24z^2-18z+63$	z^2+3
$z^4\quad+3z^2$	$z^2-6z+21$
$-6z^3+21z^2-18z+63$	
$-6z^3\quad-18z$	
$21z^2\quad+63$	
$21z^2\quad+63$	
0	

Ainsi $\boxed{Q(z)=z^2-6z+21}$

Hors programme de 4ème

on peut resoudre ce probleme par identification

2) Puisque $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)$, la règle du produit nul affirme que $P(z)=0 \Leftrightarrow z^2+3=0$. Ou $z^2-6z+21=0$ Résolvons l'équation $z^2-6z+21=0 \Leftrightarrow Q(z)=0$ en calculant le discriminant du polynôme Q : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times21=36-84=-48$. Le polynôme Q admet donc deux racines complexes conjuquées $z_1=\dfrac{-(-6)+i\sqrt{48}}{2\times1}=\dfrac{6+4i\sqrt{3}}{2}\boxed{=3+2i\sqrt{3}}$ et $z_2=\overline{z_1}\boxed{=3-2i\sqrt{3}}$. Ainsi $\boxed{S=\left\{i\sqrt{3};-i\sqrt{3};3+2i\sqrt{3};3-2i\sqrt{3}\right\}}$

3) cf fin d'exercice

4) Si E est le symétrique de D par rapport à O, alors $z_E=-z_D=-\left(3-2i\sqrt{3}\right)=-3+2i\sqrt{3}$

On calcule alors $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\dfrac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\dfrac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$

On multiplie numérateur et cénominateur de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{-1-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{(-1)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2-2i\sqrt{3}}{1+3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

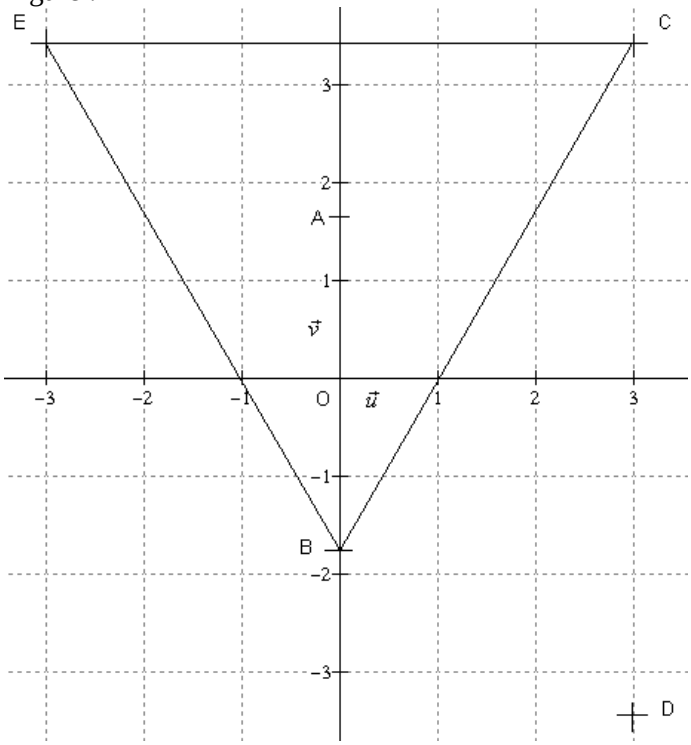
On détermine module er argument de $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

Le module de ce complexe vaut $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$. On cherche ensuite θ tel que $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve $\theta=-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi $\boxed{\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

De l'égalité précédente, on déduit que $\left|\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=\left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right| \Leftrightarrow \dfrac{BC}{BE}=1 \Leftrightarrow BC=BE$, donc le triangle BEC est isocèle en B.

De plus $\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $\boxed{\text{le triangle BEC est finalement équilatéral}}$

Figure :



Exercice n°14

1) On calcule $|a| = |\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$. $\boxed{\text{Le module de } a \text{ vaut donc } 2}$, et on cherche θ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$. On trouve $\theta = \frac{\pi}{6}[2\pi]$. $\boxed{\text{Un argument de } a \text{ est donc } \frac{\pi}{6}}$

On calcule $|b| = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $\boxed{\text{Le module de } b \text{ vaut donc } 2\sqrt{2}}$, et on cherche θ tel que $\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$. $\boxed{\text{Un argument de } b \text{ est donc } \frac{3\pi}{4}}$

On calcule $|c| = |3+3i| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. $\boxed{\text{Le module de } c \text{ vaut donc } 3\sqrt{2}}$, et on cherche θ tel que $\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. $\boxed{\text{Un argument de } c \text{ est donc } \frac{\pi}{4}}$

2) La condition $\arg(z^2) = \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ permet déjà d'éliminer les complexes a et b. Seul le complexe c est candidat. On calcule $|c-6| = |3+3i-6| = |-3+3i| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Comme $|c-6| = |c|$, $\boxed{\text{le complexe } c \text{ est le seul à vérifier le système (S)}}$

3) La contrainte $|z| = |z-6| \Leftrightarrow |z-0| = |z-6|$ se traduit par la condition géométrique $\boxed{OM = AM}$. La contrainte $\arg(z^2) = \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ se traduit par la condition géométrique $\boxed{(\vec{u};\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}}$.

4) Les complexes solutions du système (S) sont les affixes des points d'intersection de la médiatrice de [OA] et de la droite formée des points M tels que $(\vec{u};\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, cest-à-dire la 1ère bissectrice. Ces deux droites n'ayant qu'un seul point d'intersection, on en déduit que $\boxed{\text{le système (S) n'admet qu'un seule solution. Cette solution est le complexe } c}$, comme démontré précédemment.

Exercice n°15

1) La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une <u>suite géométrique</u> de raison $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$

Forme exponentielle de $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$: $|q| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, et si on note θ un argument de q, à 2π près, on a $\cos(\theta) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où on reconnaît $\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et ainsi $q = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(on pouvait aussi directement remarquer que $q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$)

Ainsi, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ $z_n = z_0\times q^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$

2) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, puisque $z_n\neq 0$,

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n-z_n}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}-1}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}-\frac{4}{4}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{4}\times\frac{4}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\left(-3+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{-3+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-i^2\left(\sqrt{3}\right)^2}{1-\left(i\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}i-3+3}{4}=\boxed{\sqrt{3}i}$$

En calculant module et argument de ce dernier complexe, on obtient $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right|=\left|\sqrt{3}i\right|\Leftrightarrow\frac{M_nM_{n+1}}{OM_{n+1}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow$ $\boxed{M_nM_{n+1}=\sqrt{3}OM_{n+1}}$ (le réel k dont parle l'énoncé est $\sqrt{3}$.). De plus, $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right)=\arg\left(\sqrt{3}i\right)[2\pi]\Leftrightarrow$ $\boxed{\left(\overrightarrow{OM_{n+1}};\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]}$ donc $\boxed{\text{le triangle } OM_nM_{n+1} \text{ est rectangle en } M_{n+1}}$

3) Nous avons calculé, dans la question1), que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ $z_n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$. Ainsi $\boxed{r_n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n}$, et puisque $0<\frac{1}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0}$, donc $\boxed{\text{le point } M_n \text{ a pour position limite le point O lorsque } n \text{ tend vers plus l'infini.}}$

Exercice n°16

1) Pour tout $z\neq 2i$, on calcule $z'-1=\frac{z+i}{z-2i}-1=\frac{z+i}{z-2i}-\frac{z-2i}{z-2i}=\frac{3i}{z-2i}$

Si on pose $z=2i+re^{i\theta}$, avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, alors $z'-1=\frac{3i}{z-2i}=\frac{3i}{2i+re^{i\theta}-2i}=\frac{3i}{re^{i\theta}}=\frac{3i}{r}e^{-i\theta}$

Enfin, on peut écrire $z'-1=\frac{3i}{r}e^{-i\theta}=\frac{3}{r}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\theta}=\boxed{\frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}$

2) a) Un point M aura une affixe z vérifiant $\left|z'-1\right|=3$ si et seulement si :

$$\left|\frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right|=3\Leftrightarrow\left|\frac{3}{r}\right|\underbrace{\left|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right|}_{1}=3\Leftrightarrow\frac{3}{r}=3\Leftrightarrow\frac{1}{r}=1\Leftrightarrow\boxed{r=1}$$

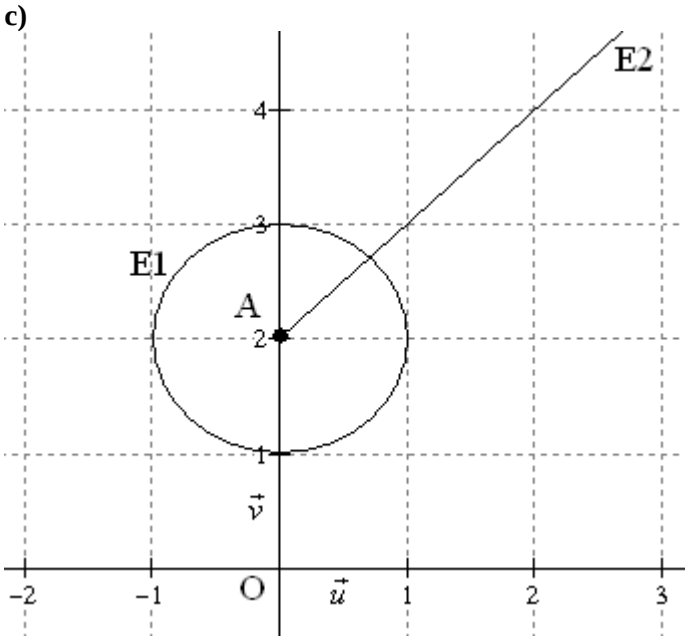
Ainsi, on aura $z=z_A+e^{i\theta}\Leftrightarrow z-z_A=e^{i\theta}$, ce qui implique $\left|z-z_A\right|=\left|e^{i\theta}\right|=1\Leftrightarrow AM=1$ et $\arg\left(z-z_A\right)=\theta\ (2\pi)$.

Le point M appartient donc au cercle de centre A et de rayon 1. $\boxed{E_1 \text{ est donc le cercle de centre A et de rayon 1.}}$

b) Puisque $z'-1=\frac{3}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$, on aura $\arg\left(z'-1\right)=\frac{\pi}{2}-\theta\ (2\pi)$. Un point M aura une affixe z vérifiant $\arg\left(z'-1\right)=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ si et seulement si : $\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$. Ainsi $z-z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$. Le point M appartient donc à la demi-droite d'origine A et d'équation polaire $\theta=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$\boxed{E_2 \text{ est donc la demi-droite d'origine A et d'équation polaire } \theta=\frac{\pi}{4}}$

c)



Exercice n°17

1) La rotation *r* de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est la transformation qui, à tout *z* associe $z' = r(z)$ tel que

$z' - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' + 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z+1) \Leftrightarrow \boxed{z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z+1) - 1}$, ou encore $\boxed{z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}}$

L'image par *r* du point A d'affixe $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ a pour affixe $z'_A = r(z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1\right) - 1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \boxed{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$\boxed{\text{L'image par } r \text{ du point A d'affixe } e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ est le point d'affixe } e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2) a) Si on note $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $-\sqrt{3}i$, alors $\boxed{\text{la transformation } t \text{ est la translation de vecteur } \vec{w}}$

b) Pour tout complexe *z*,

$$t \circ r(z) = t(r(z)) = t\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \sqrt{3}i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Déterminons les éventuels points fixes de cette transformation, en résolvant l'équation :

$t \circ r(z) = z$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = z \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow e^{i\frac{2\pi}{3}}z = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

On reconnaît l'affixe du point A. L'unique point fixe de la transformation $t \circ r$ est le point A

En écrivant simultanément $t \circ r(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}z - e^{i\frac{\pi}{3}}$ et et $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}z_A - e^{i\frac{\pi}{3}}$,

on obtient, par soustraction, $t \circ r(z) - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$

$\boxed{\text{La transformation } t \circ r \text{ est donc la rotation de centre A et d'angle } \frac{\pi}{3}}$

Exercice n°18

1) Déterminons les éventuels points fixes de cette transformation, en résolvant l'équation :

$z' = z \Leftrightarrow z = 2(z+3-4i)-3+4i$

$\Leftrightarrow z = 2z+6-8i-3+4i$

$\Leftrightarrow z = -3+4i$

La transformation *f* admet un point fixe Ω, d'affixe $z_\Omega = -3+4i$.

En écrivant successivement $z' = 2z+3+4i$ et $z_\Omega = 2z_\Omega+3+4i$, puis en soustrayant membre à membre, on obtient :

$z' - z_\Omega = 2(z - z_\Omega)$.

La transformation *f* est donc l'homothétie de centre Ω, d'affixe $z_\Omega = -3+4i$, et de rapport 2

2) Par l'homothétie *f* de centre Ω et de rapport 2, l'image *C'* du cercle *C* de centre A(-2+i) et de rayon 1 est le cercle de centre *f*(A) et de rayon $2\times1=2$.

On calcule :

$f(A) = 2(-2+i)+3+4i = -4+2i+3+4i = -1+6i$

L'image de *C* est le cercle *C'* de centre le point *f*(A) d'affixe –1+6i et de rayon 2.