CORRECTION EXERCICES(SUITES)

EXERCICE 1

Rappels :

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$

1. On a :
$u_5 = u_1 + (5 - 1)r$, donc $u_1 = u_5 - 4r = 7 - 4 \times 2 = 7 - 8 = -1$
Donc : $\mathbf{u_1 = -1}$

$u_{25} = u_5 + (25 - 5)r = 7 + 20 \times 2 = 7 + 40 = 47$
Donc : $\mathbf{u_{25} = 47}$

$u_{100} = u_5 + (100 - 5)r = 7 + 95 \times 2 = 7 + 190 = 197$
Donc : $\mathbf{u_{100} = 197}$

2. On a :
$u_8 = u_3 + (8 - 3)r = u_3 + 5r$, donc : $0 = 12 + 5r$
soit : **r =** $-\frac{12}{5}$

$u_3 = u_0 + 3r$, donc $u_0 = u_3 - 3r = 12 - 3 \times -\frac{12}{5} = \frac{60}{5} + \frac{36}{5} = \frac{96}{5}$
Donc : $\mathbf{u_0 =}$ $\frac{96}{5}$

$u_{18} = u_0 + 18r = \frac{96}{5} + 18 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{96}{5} - \frac{216}{5} = -\frac{120}{5} = -24$
Donc : $\mathbf{u_{18} = -24}$

3. On a :

$u_7 = u_0 + 7r$, donc $r = \frac{u_7 - u_0}{7}$

De plus, $u_{13} = u_0 + 13r$, donc $u_{13} = u_0 + 13 \times \frac{u_7 - u_0}{7}$, donc :
$7u_{13} = 7u_0 + 13(u_7 - u_0)$
$7u_{13} = 7\, u_0 + 13u_1 - 13u_0$
$7u_{13} = -6u_0 + 13u_7$

$$u_0 = \frac{7u_{13} - 13u_7}{-6} = \frac{7 \times \frac{13}{2} - 13 \times \frac{7}{2}}{-6}$$

Donc : $\mathbf{u_0 = 0}$

EXERCICE 2

Rappels :

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0q^n$
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p\, q^{n-p}$

1. On a :

$u_4 = u_1 q^{4-1} = u_1 q^3 = 3 \times (-2)^3 = 3 \times (-8) = -24$
Donc : $\mathbf{u_4 = -24}$

$u_8 = u_1 q^{8-7} = u_1 q^7 = 3 \times (-2)^7 = 3 \times (-128) = -384$
Donc : $\mathbf{u_8 = -384}$

$u_{12} = u_1 q^{12-1} = u_1 q^{11} = 3 \times (-2)^{11} = 3 \times (-2\,048) = -6\,144$
Donc : $\mathbf{u_{12} = -6\,144}$

2. Déterminons q :

$u_7 = u_3 q^4$, donc $q^4 = \dfrac{u_7}{u_3} = \dfrac{18}{2} = 9$.

Donc $q^2 = 3$. On a alors deux possibilités pour la raison q : $q = -\sqrt{3}$ ou $q = \sqrt{3}$.

► Si $q = -\sqrt{3}$, alors :

$u_3 = u_0 q^3$, donc $u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{2}{(-\sqrt{3})^3}$

$$u_0 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$u_{15} = u_0 q^{15} =$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times 3^7 \times (-\sqrt{3})$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$$

$= 2 \times 3^6 = 1\,458$

$u_{20} = u_0 q^{20} =$

$$= -\frac{2\sqrt{3} \times 3^{10}}{3^2} = -2\sqrt{3} \times 3^8 = -13\,122\sqrt{3}$$

Donc : si $q = -\sqrt{3}$, alors $u_0 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $u_{15} = 1\,458$ et $u_{15} = -13\,122\sqrt{3}$

► Si $q = \sqrt{3}$, alors :
$u_3 = u_0 q^3$, donc $u_0 =$
$u_{15} = u_0 q^{15} =$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times 3^7 \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$$

$= 2 \times 3^6 = 1\,458$

$u_{20} = u_0 q^{20} =$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times 3^{10}}{3^2} = 2\sqrt{3} \times 3^8 = 13\,122\sqrt{3}$$

Donc : si $q = \sqrt{3}$, alors $u_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $u_{15} = 1\,458$ et $u_{15} = 13\,122\sqrt{3}$

EXERCICE 3

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, donc :
$u_2 = u_0 + 2r$, $u_3 = u_0 + 3r$, $u_4 = u_0 + 4r$ et $u_6 = u_0 + 6r$.
On obtient alors le système suivant :

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u_0 = -10 \\ r = 5 \end{cases}$$

D'où : $u_0 = -10$ et $r = 5$.
Pour tout entier naturel n, $u_n = -10 + 5n$.

EXERCICE 4

Déterminons sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3 :
La suite des impairs peut être notée: $u_n = 2n + 1$, pour tout entier n.
On cherche donc l'entier p (et u_p) tel que : $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \ldots + u_{p+6} = 7^3 = 343$.
Or, $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+6} = (2p + 1) + (2p + 3) + \ldots + (2p + 13) = 7 \times 2p + (1 + 3 + 5 + \ldots + 13$.

Or, $1 + 3 + 5 + \ldots + 13 = 7\left(1 + \frac{6 \times 2}{2}\right) = 49$, somme des 7 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.
Ainsi : $14p + 49 = 7^3 = 343$, soit $p = 21$; puis $u_p = 43$.
D'où : les sept nombres recherchés sont : 43, 45, 47, 49, 51, 53 et 55.

EXERCICE 5

Déterminons s'il existe une suite telle que les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique :
Si ces trois termes sont en progression arithmétique, alors il existe un réel r tel que : $u_1 = u_0 + r$ et $u_2 = u_1 + r$.
De même, s'ils sont en progression géométrique, alors il existe un réel q non nul tel que : $u_1 = u_0q$ et $u_2 = u_1q^2$.
On obtient alors le système à deux équations et deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} u_0 \times q = u_0 + r \\ u_0 \times q^2 = u_0 + 2r \end{cases}$$ ou encore: $$\begin{cases} u_0(q-1) = r \\ \dfrac{u_0(q^2-1)}{2} = r \end{cases}$$

Résolvons l'équation $q - 1 = \dfrac{q^2 - 1}{2}$:
$2q - 2 = q^2 - 1$
$q^2 - 2q + 1 = 0$
$(q - 1)^2 = 0$
$q = 1$
Cette équation admet une unique solution 1.
Donc : $u_0 = u_1 = u_2$
D'où : les seules suites dont les trois premiers termes sont en progression géométriques et arithmétiques sont les suites constantes.

EXERCICE 6

1. a) $u_7 = u_4 + 3r$, la raison r vaut donc : $r = \dfrac{3}{2} = 1,5$
Donc : $u_3 = -5,5$; $u_5 = -2,5$; $u_0 = -10$.

$u_n = u_p + \frac{3(n-p)}{2}$.

1. b) $S_5 = u_0 + u_1 + \ldots + u_5 = 6\left[u_0 + \frac{5r}{2}\right] = -\frac{75}{2}$

$S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} = 11\left[u_0 + \frac{10r}{2}\right] = -\frac{55}{2}$

1. c) (u_n) est une suite arithmétique de raison positive, donc elle converge vers l'infini.

2. $u_7 = u_4\, q^3$; soit $q^3 = \frac{u_7}{u_4} = -\frac{1}{8}$; on en déduit $q = -\frac{1}{2}$. Puis $u_3 = 8$; $u_5 = 2$; $u_0 = -64$; $u_n = \frac{u_p}{(-2)^{n-p}}$.

$S_5 = u_0 \times \frac{1-q^6}{1-q} = 42$ et $S_{10} = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = \frac{341}{8} = 42.625$.

(u_n) est une suite géométrique de raison $|q| < 1$, donc elle converge vers 0.

EXERCICE 7

$S_n = u_3 + \ldots + u_n = (n-2)\left[u_3 + \frac{(n-3)r}{2}\right]$, $u_3 = 2 + 3 \times 5 = 17$

On cherche donc n tel que : $(n-2)\left(17 + \frac{5(n-3)}{2}\right) = 6456$; soit encore : $(n - 2)(5n + 19) = 12\,912$. Il faut donc trouver les racines du polynôme $5n^2 + 9n - 12950 = 0$:

$n_1 = \frac{-9-509}{10} = 51.8$ qui n'est pas un entier ! et $n_2 = \frac{-9+509}{10} = 50$

EXERCICE 8

Soit (u_n) une telle suite de premier terme u_0 et de raison r.

Il existe k tel que : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 12$ et $u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = 116$

Or : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 4u_k + 6r$

et $u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = u_k^2 + (u_k + r)^2 + (u_k + 2r)^2 + (u_k + 3r)^2$

Or $4u_k + 6r = 12$ donc $2u_k + 3r = 6$

Ainsi : $6^2 + 5r^2 = 116$

Soit : $r = \pm 4$

Puis $2u_k + 3r = 6$ donc $u_k = -3$ ou $u_k = 9$

Ainsi : -3 , 1 , 5 , 9 conviennent ainsi que : 9 , 5 , 1 , -3.

EXERCICE 9

Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison b, alors pour tout entier n : $v_n = v_0 b^n$.

1. Si (v_n) est croissante et ses termes sont strictement négatifs alors $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, c'est-à-dire $0 < b < 1$.

2. $v_1 v_3 = v_1^2\, b^2$ et $v_1 + v_2 + v_3 = v_1 \frac{1-b^3}{1-b}$; $1 - b^3 = (1 - b)(1 + b + b^2)$
On obtient donc le système :
soit encore :
Soit $6b^2 + 25b + 6 = 0$ ou $6b^2 - 13b + 6 = 0$
La première équation a deux solutions négatives (cf première questions)
Donc $b = \frac{2}{3}$.
$v_1 = -1$; $v_2 = -\frac{2}{3}$; $v_3 = -\frac{4}{9}$.

EXERCICE 10

S = 2 + 6 + 18 + ... + 118 098
S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3.
$u_0 = 2$; $u_1 = 2 \times 3$; $u_2 = 2 \times 3^2$ ... $118\,098 = 2 \times 59\,049 = 2 \times 3^{10}$.

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_10 = u_0 \frac{1-3^{11}}{1-3} = 177\ 146.$$

$$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + ... + \frac{2}{59049}$$

S' est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{3}$.

De plus : $59049 = 3^{10}$. Donc $S' = 2\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{177\ 146}{59\ 049}$.

EXERCICE 11

1 + 2 + 3 + ... + 12 + 1 + 2 + ... + 12 = 2(1 + 2 + ... + 12).
Somme des 12 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1
: $1 + 2 + ... + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78$
Donc en 24 heures la pendule aura sonné (2 × 78) fois, soit **156 fois.**

EXERCICE 12

Soit u_0 l'âge de la plus jeune personne. L'âge des autres personnes sont respectivement : u_1, u_2, u_3 et u_4 ; avec $u_1 = u_0 + r$, ...
On a donc :
$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1980$ et $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 90$
Pour la résolution, cf exercice 8 : 6 ans, 12 ans, 18 ans, 24 ans et 30 ans.

EXERCICE 13

Soit u_0 la taille du nénuphar le jour 0. Au bout d'un jour il mesure $u_1 = 2u_0$, ... ; au bout de 40 jours il mesure $u_{40} = u_0 2^{40}$.

On cherche l'entier p tel que $u_p = u_0 \times 2^p = \frac{u_{40}}{2}$.
On obtient facilement p = 39.

EXERCICE 14

En 1985 le prix du livre est $u_0 = 150$. En 1986 il vaut : $u_1 = 150 \times 0{,}88$, ... ; en 1990 (donc 5 ans après), il vaut : $u_5 = 150 \times 0{,}88^5 = 79{,}2$ F.
Et en 1995, il ne vaut plus que : $u_{10} = 150 \times 0{,}88^{10} = 41{,}8$ F.

EXERCICE 15

a) An, l'aire inférieure, est délimitée par des rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et de longueur $f\left(\frac{k}{n}\right)$. Donc : $A_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1)\right]$

$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1) = n - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^2}$

Ainsi $A_n = \frac{1}{n}\left[n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right] = 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{4n^2 - 3n - 1}{6n^2}$

c) pour tout n, $A_n < A < A'_n$.

Et quand n tend vers l'infini, A_n et A'_n tendent vers $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; donc $A = \frac{2}{3}$.

EXERCICE 16

Il y a n cercle de rayons r_n. Calculons ce rayon : l'angle au centre de chaque portion est $\frac{2\pi}{n}$ et le rayon du cercle initial est 1. On applique le théorème d'Al Kashi qui nous donne : $r_n^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$. D'où : $r_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
$l_n = n \times 4\pi \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Or, grâce à l'inégalité proposée on obtient : $\frac{\pi}{n} - \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^3}{6} \leqslant \sin\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{n}$

Soit : $\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3} \leqslant \sin\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{n}$

Donc : $4\pi^2 - \frac{2\pi^4}{3n^3} \leqslant l_n \leqslant 4\pi^2$ qui nous permet de conclure que l_n tend vers $4\pi^2$ quand n tend vers l'infini.

$a_n = n \times \pi \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2$; avec l'inégalité on peut conclure que la somme des aires tend vers 0.

EXERCICE 17

a) $p_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$

b) $p_n = S_{2n-1} - 4S_{n-1}$.

c) $p(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$

d) $p_n = P(2n-1) - 4P(n-1)$; $p_n = \frac{4n^3 - n}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

e) Pour $n = 6$, $p_6 = \frac{6 \times 11 \times 13}{3} = \boxed{286}$

Donc le nombre de cubes utilisés est de **286**.

EXERCICE 18

a) AHD triangle rectangle en H. [HD] est une demi-diagonale de carré.

$\mathrm{HD} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Puis $\mathrm{AH} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

b) Niveau 3 : 9 billes ; Niveau 4: 16 billes ; …. Niveau n : n^2 billes.

c) $h_n = n\frac{R}{\sqrt{2}}$

EXERCICE 19

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+3) = +\infty$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{N} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

De même: $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{N} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

b) $+\infty + 1 = +\infty$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + 5) = +\infty$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{N} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n + \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = +\infty + 0 = +\infty$

e) Au numérateur on a déjà une forme indéterminée. Remarquons que $2n^2 - 3n + 2 = 1 - (1-n)(2n-1)$. Ainsi $u_n = \frac{1}{1-n} - (2n-1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-n} - \lim\limits_{n\to+\infty} (2n-1) = 0 - (+\infty) = -\infty$.
Pas de difficulté pour v_n.

f) Forme indéterminée: le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini; il va donc falloir factoriser par n le dénominateur: $u_n = \frac{2n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$.
Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

EXERCICE 20

a) $u_n = \frac{3}{2\sqrt{n}+7}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
v_n est une forme indéterminée, factorisons par n le numérateur et le dénominateur : $v_n = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(n+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$. Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers l'infini.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Même méthode pour w_n : factoriser le numérateur et le dénominateur par n². $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\frac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$.

EXERCICE 21

a) (u_n) est une suite géométrique de raison q = 2, q > 1 donc la suite tend vers l'infini : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

b) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, |q| < 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$, |q| < 1 donc la suite converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 7$.

d) (u_n) est une suite géométrique de raison q = 5, q > 1 donc la suite tend vers l'infini : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$; puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

EXERCICE 22

a) Pour tout n, $|\cos(n)| \leqslant 1$; donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Donc : $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) Pour tout n, $\sin(2n) \geqslant -1$, donc $u_n \geqslant n-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) $|u_n| = \dfrac{|n+(-1)^n|}{|n^2+1|} \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$. On en déduit : $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$, soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d) $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $-1+n \leqslant (-1)^n + n \leqslant 1+n$ et $1 \leqslant (-1)^n + 2 \leqslant 3$, soit : $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{(-1)^n+2} \leqslant 1$ et $\dfrac{n-1}{3} \leqslant u_n \leqslant n+1$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{3} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

EXERCICE 23

a) Posons $u_n = \dfrac{4^n}{n^2}$.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{4^n}{n^2(n+1)^2}(3n^2-2n-1)$.

Pour étudier le signe de cette différence, il suffit donc d'étudier celui du facteur $(3n^2-2n-1)$ (montrer qu'il est positif pour $n \geqslant 3$).

b) $\dfrac{4^n}{n} \geqslant \dfrac{4^n}{n^2}$ et la suite (u_n) définie précédemment est croissante et non majorée donc converge vers l'infini ; ainsi la suite $v_n = \dfrac{4^n}{n}$ tend vers l'infini.

c) , et grâce à b), on peut conclure que cette limite est 1.

EXERCICE 24

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
e) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ f) (u_n) n'admet pas de limite.

EXERCICE 25

a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$

b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

d) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 + 1 = 1$

e) $u_n = \dfrac{2^n\left(1+\dfrac{n}{2^n}\right)}{3^n(1+n)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \dfrac{1+\dfrac{n}{2^n}}{1+n}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3} < 1$) et le deuxième terme tend également vers 0; donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 26

a) **Déterminons les cinq premiers termes de cette suite :**

$u_0 = 0$

$u_1 = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{u_0^2 + 12} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{0+12} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$

La suite (u_n) semble converger vers 2.

b) Pour tout entier naturel n, on a :

On en conclut que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

La raison $\dfrac{1}{4} < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n^2 - 4$, donc $u_n = \sqrt{v_n + 4}$ (tous les termes de (u_n) sont positifs).

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$

EXERCICE 27

a) $u_1 = 1{,}667$; $u_2 = 1{,}909$; $u_3 = 1{,}977$; $u_4 = 1{,}994$; $u_5 = 1{,}999$.

b) Hypothèse de récurrence : "$0 \leqslant u_n \leqslant 2$".
La proposition est vraie pour n = 0, n = 1, …, n = 5.
Supposons la vraie au rang $p : 0 \leqslant u_p \leqslant 2$. Alors :
$2 \leqslant 3u_p + 2 \leqslant 8$ et $2 \leqslant u_p + 2 \leqslant 4$, donc $1 \leqslant u_{p+1} \leqslant 2$.
La proposition est alors vérifiée au rang (p + 1).

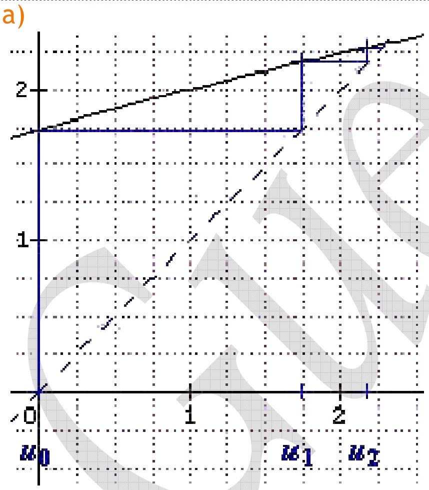
On en conclut que la proposition est vraie pour tout entier n : u_n est bornée par 0 et 2.

c) L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$ est l'intervalle $S = [-1\ ;\ 2]$.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$. Le numérateur est positif car pour tout n, $u_n \in S$, et le dénominateur est positif car u_n est positif pour tout n. Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. On en conclut que la suite (u_n) est croissante.

d) $|u_{n+1} - 2| = \dfrac{|u_n - 2|}{|u_n + 2|}$; or pour tout n : $u_n + 2 \geqslant 2$, donc $\dfrac{1}{u_n + 2} \leqslant \dfrac{1}{2}$
et $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$.
Alors $u_n - 2 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.
$|u_0 - 2| = 1$, donc pour tout n : $|u_{n+1} - 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison < 1)
On en déduit que $u_n - 2$ tend vers 0 puis u_n tend vers 2.

EXERCICE 28

a)



(u_n) semble converger vers 2,3.
De même en choisissant une valeur intiale $u_0 \geqslant -3$

b) (u_n) est une suite stationnaire si pour tout n : $u_{n+1} = u_n = u_0$, c'est-à-dire si : $u_0 = \sqrt{3 + u_0}$ ou encore : $u_0^2 - u_0 - 3 = 0$. Ce polynôme a deux racines, dont une dans l'intervalle [-3;+∞[: $u_0 = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

c) $(u_{n+1} - \ell)(u_{n+1} + \ell) = u_{n+1}^2 - \ell^2 = 3 + u_n - \ell^2$.
Or $\ell^2 = 3 + \ell$ donc $3 - \ell^2 = -\ell$; ainsi : $(u_{n+1} - \ell)(u_{n+1} + \ell) = u_n - \ell$, pour tout entier n.

On en déduit que : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{|u_n - \ell}{|u_{n+1} + \ell|}$ et $u_{n+1} + \ell| \geqslant \ell$ donc $u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{|u_n - \ell|}{\ell}$

et par récurrence : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{|u_0 - \ell|}{\ell^n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Ainsi : $u_n - \ell|$ tend vers 0 et donc u_n tend vers ℓ.
