CORRECTION EXERCICES PROBABILITE

EXERCICE1

1.

	Magie	Théatre	Photo numérique	Total
Adultes	18	45	27	90
Enfants	30	24	6	60
Total	48	69	33	150

2. a) $p(\overline{A}) = \text{card}\,\overline{A}/\text{card }\Omega = 60/150 = 2/5$

La probabilité que la personne appelée soit un enfant est de 2/5

b) $p_A(N) = \text{card}(A \cap N)/\text{ card } A = 27/90 = 3/10$

La probabilité que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte est de 3/10

c) $p(A \cap T) = \text{card}(A \cap T)/\text{card }\Omega = 45/150 = 3/10$

La probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre est de 3/10

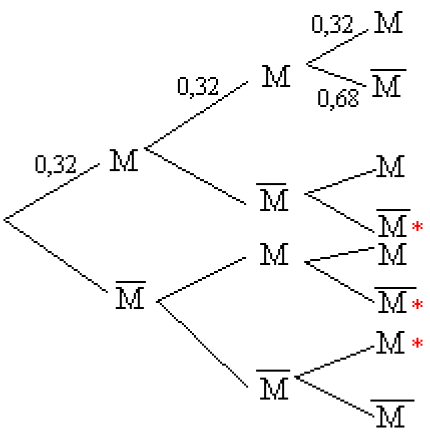
3. $p(M) = \text{card } M / \text{card }\Omega = 48/150 = 8/25 = 0{,}32$

La probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est bien de 0,32.

4. $p_M(\overline{A}) = \text{card}(\overline{A} \cap M)/\text{ card } M = 30/48 = 5/8 \neq 2/3$ donc il a tord

5. C : " parmi les personnes qui désirent suivre un stage, trois personnes au hasard, une seule personne a choisi la magie "

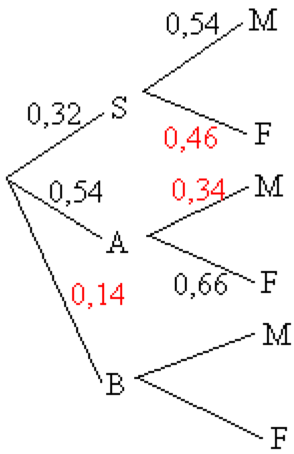
$p(C) = 3 \times 0{,}32 \times 0{,}68^2 = 0{,}44$



Guesmi.B

EXERCICE2

1. a) $p(S) = 0{,}32$; $p(A) = 0{,}54$; $p_S(M) = 0{,}54$; $p_A(F) = 0{,}66$; $p(M) = 0{,}4096$



b)

2. a) $p(M \cap S) = p_S(M) \times p(S) = 0{,}54 \times 0{,}32 = 0{,}1728$

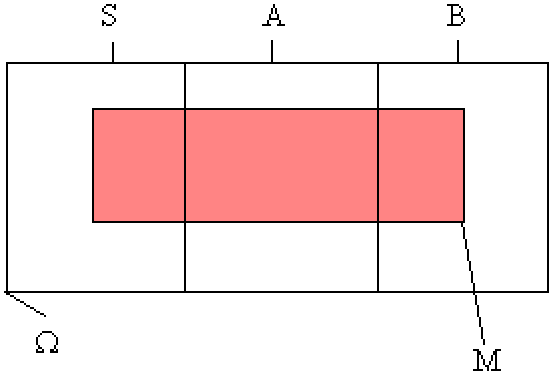
La probabilité que Pierre achète un chaton mâle Siamois est de 0,1728

b) $p_A(M) = 1 - p_A(F) = 1 - 0{,}66 = 0{,}34$

$p(M \cap A) = p_A(M) \times p(M) = 0{,}34 \times 0{,}54 = 0{,}1836$

La probabilité que Rida achète un chaton mâle Abyssin est de 0,1836

c)



$p(M \cap S) + p(M \cap A) + p(M \cap B) = p(M)$

$p(M \cap B) = p(M) - p(M \cap S) - p(M \cap A) = 0{,}4096 - 0{,}1728 - 0{,}1836 = 0{,}0532$

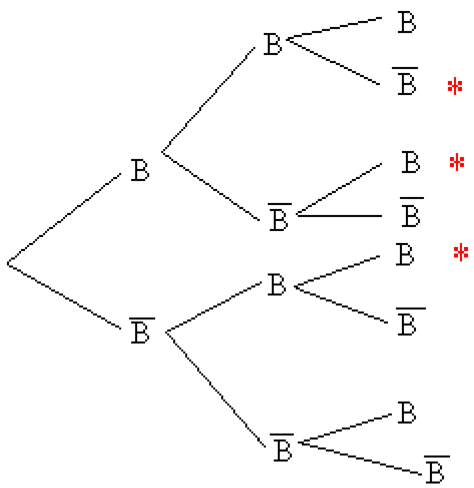
La probabilité que Rida achète un chaton mâle Birman est donc bien égale à 0,0532.

d) $p(B) = 1 - p(S) - p(A) = 1 - 0{,}32 - 0{,}54 = 0{,}14$

$p_B(M) = p(M \cap B)/p(B) = 0{,}0532/0{,}14 = 0{,}38$

La probabilité que le chaton acheté par Rida soit un mâle sachant que c'est un Birman est de 0,38

3. Notons $\overline{B}$ l'évenement contraire de B. L'univers associé à cet expérience aléatoire peut être décrit avec un arbre :



Probabilité qu'il y ait, parmi ces trois chatons, exactement deux mâles Birmans

$3 \times p(B)^2 \times p(\overline{B}) = 3 \times 0{,}14^2 \times 0{,}86 = 0{,}051$ à 10^{-3}

EXERCICE3

1. **a)**

roue n° 1 / roue n° 2	10	0	5	0
10	20	10	15	10
0	10	0	5	0
5	15	5	10	5
0	10	0	5	0

b) p(G ≥ 10) = P(G = 10) + P(G = 15) + P(G = 20) = 5/16 + 2/16 + 1/16 = 8/16 = 1/2 = 0,5 soit 50 %.

c) P(G = 0) = 4/16 = 1/4 ; P(G = 5) = 4/16 = 1/4 ; P(G = 10) = 5/16
P(G = 15) = 2/16 = 1/8 ; P(G = 20) = 1/16.

d) P(G > 10) = P(G = 15) + P(G = 20) = 2/16 + 1/16 = 3/16.

e)

$$E(G) = \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times 5 + \frac{5}{16}\times 10 + \frac{1}{8}\times 15 + \frac{1}{16}\times 20$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{25}{8} + \frac{15}{8} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} + \frac{40}{8} = 2{,}5 + 5 = 7{,}5$$

le gain moyen est donc de 7,5 D . L'espérance de gain est donc plus petite que la mise.

2. B = m - G

a) E(B) = E(m - G) = m - E(G) = m - 7,5.

b) E(B) ≥ 5 équivaut à m - 7,5 ≥ 5 soit m ≥ 12,5 D

Il faut donc que la mise soit d'au moins 12,5 D pour que l'espérance de bénéfice soit de 5 D.

EXERCICE4 Guesmi.B

Un jeu consiste à jeter un dé de forme tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

Ce dé est pipé de telle façon que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro porté par cette face.

On note p_i, la probabilité d'obtenir le nombre i pour $i \in \{l;2;3;4\}$.

1. La probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro porté par cette face donc,

il existe un réel k tel que $p_i = ki$ pour tout $i \in \{l;2;3;4\}$.

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ équivaut à $k + 2k + 3k + 4k = 1$ donc $10\ k = 1$; $k = 1/10$

on en déduit : $p_1 = 1/10$; $p_2 = 2/10 = 1/5$; $p_3 = 3/10$; $p_4 = 4/10 = 2/5$.

A : " obtenir un nombre pair " = {2 ; 4 }

p(A) = $p_2 + p_4 = 1/5 + 2/5 = 3/5$

2. a On peut résumer cette expérience par un arbre :

100 × 1,1 × 1,1 × 1,1 = 133 € ; 100 × 1,1 × 1,1 - 11 = 110 D

(100 × 1,1 -11) × 1,1 = 109 € ; (100 × 1,1 -11) - 11 = 88 D

(100 - 11) × 1,1 × 1,1 = 108 € ; (100 - 11) × 1,1 - 11 = 87D

(100 - 11 - 11) × 1,1 = 86 € ; (100 - 11 - 11) - 11 = 67D

b) Le joueur perd si son gain est inférieur à sa mise.

B : " gagner 110 Dinars " ; P(B) = (3/5) × (3/5) × (2/5) = 18/125

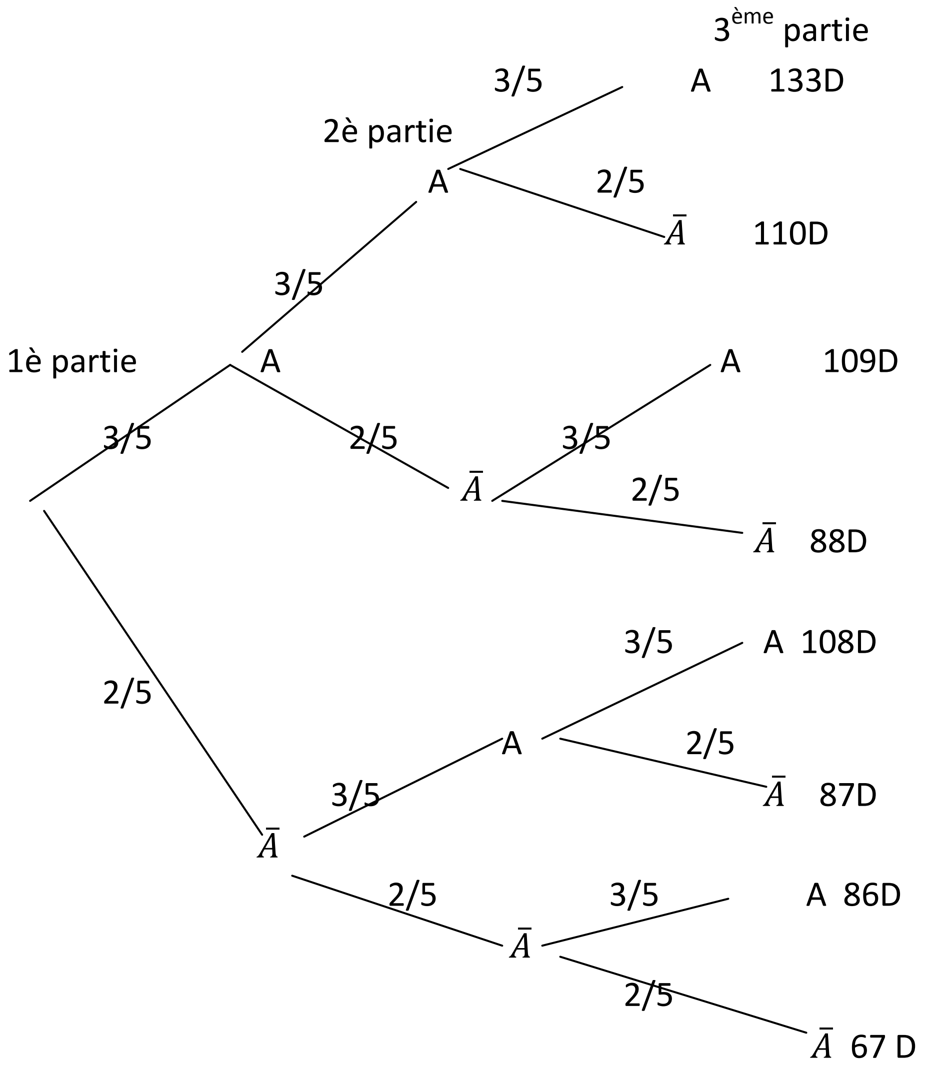
c) " gagner 67 D " a pour probabilité : (2/5) × (2/5) × (2/5) = 8/125

" gagner 86 D " a pour probabilité : (2/5) × (2/5) × (3/5) = 12/125

" gagner 87 D " a pour probabilité : (2/5) × (3/5) × (2/5) = 12/125

" gagner 88 D " a pour probabilité : (3/5) × (2/5) × (2/5) = 12/125

d) " gagner moins de 100 D " a pour probabilité : 8/125 + 3 ×12/125 = 8/125 + 36/125 = 44/125



" gagner plus de 100 D " : 1 - 44/125 = 81/125 > 44/125

donc la probabilité, pour ce joueur, de gagner de l'argent est supérieure à celle d'en perdre

EXERCICE5

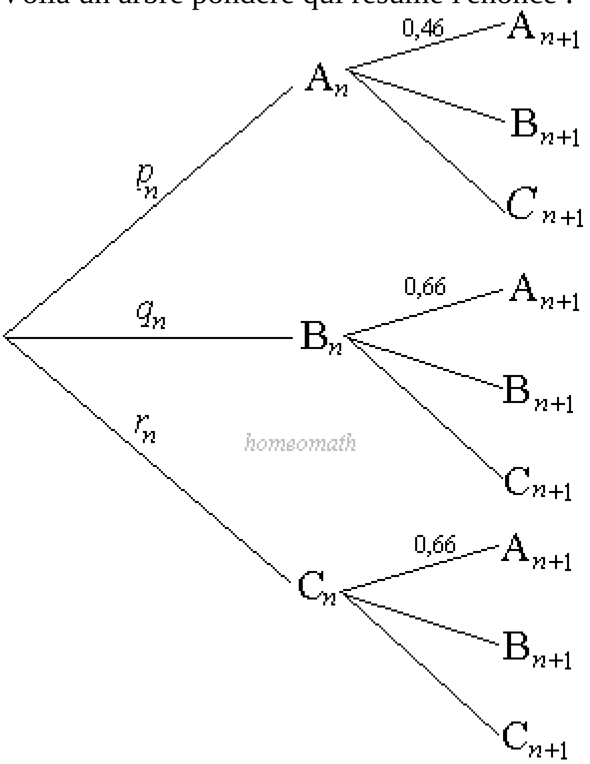
On a posé à 1000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ».

Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant.

Nombre de retards le 1er mois / Nombre de retards le 2ème mois	0	1	2 ou plus	*Total*
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1.On choisit au hasard un individu de cette population.

a) A : " l'individu choisi a eu au moins un retard le premier mois "
$\overline{A}$: " l'individu choisi n'a eu aucun retard le premier mois "
P($\overline{A}$) = card $\overline{A}$ / card Ω = 572/1000 = 143/250 = 0,572
P(A) = 1- P($\overline{A}$) = 107/250 = 0,428
b) B : " l'individu choisi a eu au moins un retard le deuxième mois "
card (B $\cap$ $\overline{A}$) = 250 + 60 = 310
on veut calculer
P(B\ $\overline{A}$) = P(B $\cap$ $\overline{A}$)/P($\overline{A}$) = card (B $\cap$ $\overline{A}$)/card ($\overline{A}$) = 310/572 = 155/286 $\simeq$ 0,542
2. Voila un arbre pondéré qui résume l'énoncé :



Guesmi.B

On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul).
On fait les hypothèses suivantes :
- si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est 0,46.
- si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est 0,66.
- si l'individu a eu deux retards ou plus le mois , la probabilité de ne pas en avoir le mois n + 1 est encore 0,66.

On note A_n l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n »,
B_n l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », C_n l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».
Les probabilités des événements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n, r_n. a)
a) p_1 = 0,572 (voir question 1) ; q_1 = 318/1000 = 0,318 ; r_1 = 110/1000 = 0,110
b)

$$p_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n)$$

$$\boxed{p_{n+1} = 0,46 p_n + 0,66 q_n + 0,66 r_n}$$

c) Pour tout entier naturel non nul on a :

$$p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66q_n + 0,66r_n = 0,46p_n + 0,66(q_n + r_n)$$
$$p_n + q_n + r_n = 1 \Rightarrow p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66(q_n + r_n) = 0,46p_n + 0,66(1 - p_n)$$
$$p_{n+1} = 0,46p_n + 0,66 - 0,66p_n = -0,2p_n + 0,66$$

d) Pour tout entier naturel non nul on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,55 = -0,2p_n + 0,66 - 0,55 = -0,2p_n + 0,11 = -0,2(p_n - 0,55) = -0,2u_n$$
$$u_{n+1} = -0,2u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison -0,2.

e) On en déduit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \quad (q = -0,2 \in]-1;1[)$$
$$p_n = u_n + 0,55$$
$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,55$$

EXERCICE6

1.

a. Le nombre total d'éventualités est 26 × 25 × 24 (on différentie chaque carte)

Il y a 5 mots "il" , 4 mots "dit", 2 mots "non "

soit A : " obtenir dans l'ordre " il dit non "

p(A) = (5 × 4 × 2)/ (26 × 25 × 24) = 1/390

b. Le nombre total d'éventualités est 26 × 26 × 26 (on différentie chaque carte)

Le mot "non " peut se trouver indifféremment à la première place, la deuxième place ou la la troisième place, les deux autres mots doivent être différents de "non" ce qui donne

3 × (2 × 24 × 24) possibilités

soit B : "obtenir exactement une fois le mot "non" "

p(B) = 6 × 24 × 24/(26 × 26 × 26) = 3 × 12 × 12/(13^3) = 432/2197

2. Le nombre total d'éventualités est

$$card\,\Omega = \binom{26}{3} = \frac{26!}{23!3!} = \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23!}{23!3!}$$
$$= \frac{26 \times 25 \times 24}{6} = 26 \times 25 \times 4 = 2600$$

a. A : "obtenir trois verbes "

il y a 5 verbes dans les 26 cartes donc il y a

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

choix possibles des trois verbes parmi 5 .

Guesmi.B

p(A) = 10/2600 = 1/260.

b. B : " obtenir il, dit et non "

$p(B) = (5 \times 4 \times 2)/2600 = 4/260 = 1/65$

c. S : " obtenir au moins une fois non "

$\overline{S}$: " ne pas obtenir non "

il faut choisir 3 cartes parmi 24 (les 26 cartes sauf les non)

$$p(\overline{S}) = \frac{\binom{24}{3}}{2600} = \frac{\frac{24!}{21!3!}}{2600} = \frac{\frac{24\times 23\times 22}{6}}{2600} = \frac{4\times 23\times 22}{2600}$$

$$p(\overline{S}) = \frac{23\times 11}{325} = \frac{253}{325}$$

$$p(S) = 1 - p(\overline{S}) = \frac{72}{325}$$

EXERCICE7

déterminons le pourcentage de chaque jetons :

jetons bleus : 10%

jetons blancs : 30 %

jetons rouges : 60 %

1. a.

Soit X le gain obtenu,

X peut prendre les valeurs 2 ; 2^2 ; -2^3 .

Loi de probabilité de X :

p(X = 2) = 60/100

p(X = 4) = 30/100

p(X = -8) = 10/100

1. b.

$E(X) = 2 \times 60/100 + 4 \times 30/100 - 8 \times 10/100 =$

$(120 + 120 - 80)/100 = 160/100 = 1,6$.

2.a.

Loi de probabilité de X dans le cas d'un gain de x Dinar:

X peut prendre les valeurs x ; x^2 ; $-x^3$.

Loi de probabilité de X :

p(X = x) = 60/100

p(X = x^2) = 30/100

p(X = $-x^3$) = 10/100

Guesmi.B

$E(X) = x \times 60/100 + x^2 \times 30/100 - x^3 \times 10/100 =$

$- 0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}6x$

On cherche à rendre maximal E(X) donc cela revient bien à étudier les éventuels extremums de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -0{,}1x^3 +0{,}3x^2 +0{,}6x$.

2. b.

$f'(x) = -0{,}3x^2 +0{,}6x +0{,}6 = -0{,}3(x^2 - 2x - 2)$

2.c.

$x^2 - 2x - 2$

$\Delta = 4 - 4\times1\times(-2) = 12 > 0$ donc 2 racines :

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$$

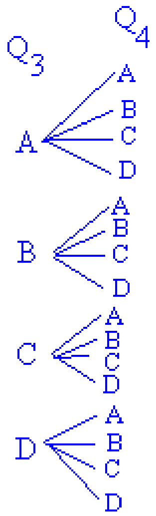
$$x_2 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3} \approx 2{,}73$$

x	0	$1-\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$g_0 = 2{,}73$ D est le gain de base tel que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal.

Guesmi.B

EXERCICE8 **Guesmi.B**



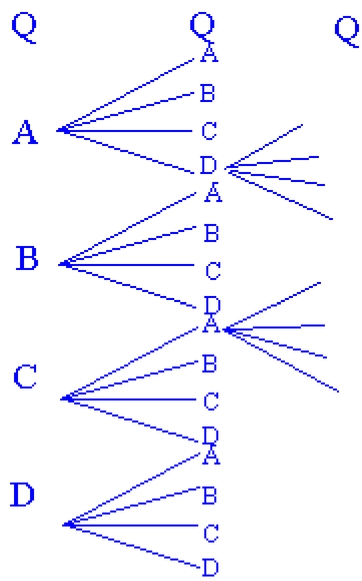
a. Il peut obtenir les notes suivantes : 0 ; 1,5 ; 3.

- Il peut obtenir 3 points au maximum en répondant correctement au deux dernières question. (1 + 2 points)
- Il peut obtenir 1,5 points en répondant correctement à l'une des deux dernières questions (1 + 1 - 0,5)
- Il peut obtenir 0 points en se trompant sur les deux dernières questions
(1 - 0,5 - 0,5)

b. Il peut remplir 16 grilles différentes (voir l'arbre ci-dessus)
c. Il ne fait aucune faute que si les deux dernières réponses sont justes, c'est à dire
1/16.
d. Il fait deux fautes si les deux dernières réponses sont fausses, il y a 9 (= 3^2) grilles fausses. La probabilité de faire deux fautes est de 9/16.
e.

Point xi	Probabilité pi	pixi
0	9/16	0,00
1,5	6/16	0,56
3	1/16	0,19
		0,75

L 'espérance mathématique de la note obtenue est 0,75.
2.



a. Il peut obtenir les notes suivantes : 0 ; 1 ; 2,5 ; 4.

- Il peut obtenir 4 points (trois dernières réponses justes)
- Il peut obtenir 2,5 points (2 réponses justes et une fausse)
- Il peut obtenir 1 point (2 réponses fausses et une juste)
- Il peut obtenir 0 point (3 réponses fausses)

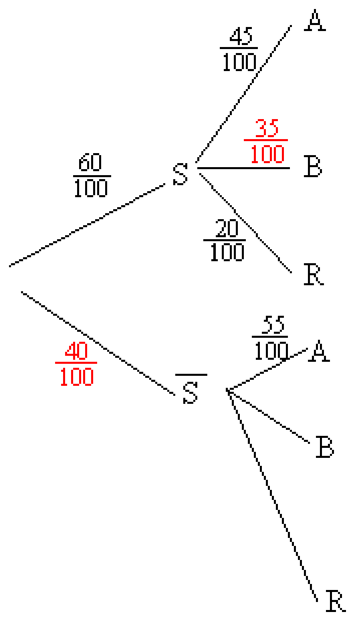
b. Il peut remplir $4^3 = 64$ grilles différentes
c. la probabilité de ne faire aucune faute est de 1/64 .
d. la probabilité de faire trois fautes est de 27/64 ($27 = 3^3$)
e.
Il y a 3 possibilités de se tromper sur la deuxième réponse et de répondre juste aux autres questions. Sachant qu'on peut se tromper à la deuxième , à la troisième ou à la quatrième question, cela fait en tout 9 possibilités de faire une faute sur les trois dernières questions. La probabilité de faire une faute est de 9/64.

Point xi	Probabilité pi	pixi
0	27/64	0,00
1	27/64	0,42
2,5	9/64	0,35
4	1/64	0,06
		0,84

3. Stratégie de Outail.
Classement des stratégies dans l'ordre décroissant des espérances mathématiques de note obtenue :
Stratégie de Outail; stratégie de Ala ; stratégie de Abdou.
La stratégie de Outail est celle qui est susceptible de rapporter le plus de points.

EXERCICE9

1. (en rouge les déductions simples)



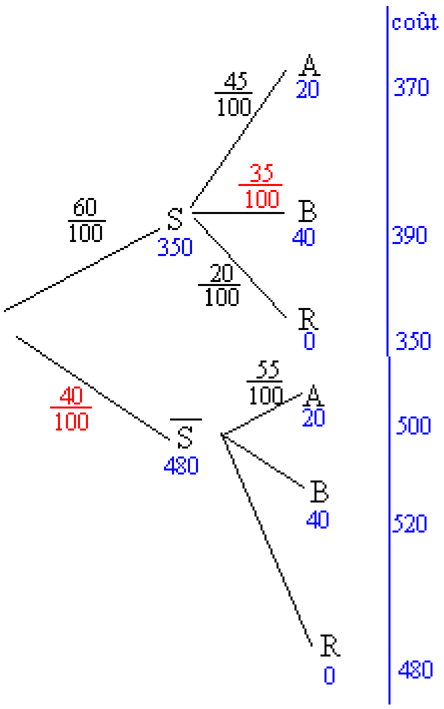
2. a .
p($\overline{S}$) = 1 - p(S) = 1 - 60/100 = 40/100 = 0,4.
2. b. $P_S(B)$ = 35/100
3. a.
$P(R\cap S) = P_S(R) \times p(S) = (20/100) \times (60/100) = 12/100 = 0,12$
$P(R\cap \overline{S}) + P(R\cap S) = p(R)$ donc :
$P(R\cap \overline{S}) = p(R) - P(R\cap S) = 0,18 - 0,12 = 0,06$
3.b. il s'agit de calculer la probabilité de R sachant $\overline{S}$:

$$p_{\overline{S}}(R) = \frac{p(R\cap \overline{S})}{p(\overline{S})} = \frac{0,06}{0,4} = 0,15$$

4.

$$p(A) = p(A\cap S) + p(A\cap \overline{S})$$
$$= p_S(A)p(S) + p_{\overline{S}}(A)p(\overline{S})$$
$$= \frac{45}{100}\times\frac{60}{100} + \frac{55}{100}\times\frac{40}{100} = \frac{27}{100} + \frac{22}{100} = \frac{49}{100} = 0,49$$

Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisit la formule simple et le résultat le confirme.



L_i	350	370	390	480	500	520
p_i	0,12	0,27	0,21	0,06	0,22	0,12

E(L) = 350 $\times$ 0,12 + 370 $\times$ 0,27 + 390 $\times$ 0,21 + 480 $\times$ 0,06 + 500 $\times$ 0,22 + 520 $\times$ 0,12

E (L) = 425 D, c'est le coût moyen d'une location.

EXERCICE10

1. X correspond au nombre de fois ou **Mohamed EL Bouazizi** est contrôlé sur les 40 trajets.
   Chaque variable aléatoire X_i ne prend que deux valeurs 0 ou 1 , 0 si Claude n'a pas été contrôlé et 1 sinon. L'expérience consistant à répéter n = 40 fois cette épreuve de façon indépendante, est donc un de paramètre p = p(X_i = 1) et n = 40.
   Pour tout entier naturel k compris entre 0 et 40 on a :

$$p(X = k) = \binom{40}{k} p^{k}(1-p)^{40-k}$$

2. *a*.

On sait que p = 1/20

$E(X_i) = np = 40 \times 1/20 = 2$

b.

$$p(X=0) = \binom{40}{0} p^0 (1-p)^{40-0} = (1-p)^{40} = \left(1-\frac{1}{20}\right)^{40} = \left(\frac{19}{20}\right)^{40} = 0{,}1$$

$$p(X=1) = \binom{40}{1} p(1-p)^{39} = 40p(1-p)^{39} = 40\,\frac{1}{20}(1-\frac{1}{20})^{39} = 2\left(\frac{19}{20}\right)^{39} =$$

$$p(X=2) = \binom{40}{2} p^2 (1-p)^{38} = 780p^2(1-p)^{38} = 780\,\frac{1}{400}\left(\frac{19}{20}\right)^{38} = 1{,}9\left(\frac{19}{20}\right.$$

c.

$$p(X \le 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 0{,}6767$$

3.

Le fraudeur économise 400 D si il ne se fait jamais prendre par contre si il se fait prendre k fois

où k est un entier naturel entre 0 et 40 , il devra payer 100k D, donc il aura économisé en fait 400-100k

Par conséquent : Z = 400 - 100X.

E(Z) = E(400 - 100X) = 400 - 100 E(X)

E(Z) = 400 - 100np = 400 - 100 $\times$ 40 $\times$ 1/5 = 400 - 800 = - 400

Sur 40 trajets il devra payer en moyenne 400 D

4. *a.*

$$p(X \le 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$$
$$= (1-p)^{40} + 40p(1-p)^{39} + 780p^2(1-p)^{38}$$
$$= (1-p)^{38}\left[(1-p)^2 + 40p(1-p) + 780p^2\right]$$
$$= (1-p)^{38}\left[1-2p+p^2+40p-40p^2+780p^2\right]$$
$$= (1-p)^{38}\left(741p^2+38p+1\right)$$

b.

$$f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2+38x+1\right)$$
$$f'(x) = -38(1-x)^{37}\left(741x^2+38x+1\right)+(1-x)^{38}(1482x+38)$$
$$= (1-x)^{37}\left[-38(741x^2+38x+1)+(1-x)(1482x+38)\right]$$
$$= (1-x)^{37}\left[\text{-}288249x^2-1444x-38+1482x+38-1482x^2-38x\right]$$
$$= (1-x)^{37}(\text{-}289731x^2) < 0$$
$$(\text{car si } x \in \left]0;1\right[\text{ alors } 1-x>0, \text{-}289731x^2<0)$$
$$f'(x) < 0 \text{ pour tout réel } x \text{ de } \left]0;1\right[$$
$$\text{donc } f \text{ strictement décroissante sur } [0;1]$$

$f(0) = 1$ et $f(1) = 0$
donc $f(0) > 0{,}01 > f(1)$ donc d'après le théorème de la bijection , l'équation $f(x) = 0{,}01$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle [0 ; 1].
D'après la calculatrice :
$f(0{,}19) > 0{,}01 > f(0{,}20)$ on peut en déduire :
$19/100 < x_0 < 20/100$
par conséquent n = 19.
c.
On veut déterminer la valeur minimale de p telle que $p(X \geq 3) \geq 0{,}99$

$$p(X \geq 3) \leq 0{,}99 \Leftrightarrow$$
$$1-p(X \leq 2) \leq 0{,}99 \Leftrightarrow$$
$$-p(X \leq 2) \leq -0{,}01 \Leftrightarrow$$
$$p(X \leq 2) \geq 0{,}01 \Leftrightarrow$$
$$f(p) \geq 0{,}01$$

la valeur minimale de p tel que $p(X \geq 3) \geq 0{,}99$ est $p = x_0$

EXERCICE11

1)

$$\int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 0{,}5 \Leftrightarrow \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{200} = 0{,}5 \Leftrightarrow$$
$$-e^{-200\lambda}+1 = 0{,}5 \Leftrightarrow -e^{-200\lambda} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow e^{-200\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -200\lambda = \ln\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -200\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{200}}$$

2)

$$p(t \geq 300) = 1 - p(0 \leq t < 300) = 1 - \int_0^{300} \frac{\ln 2}{200} e^{\frac{-\ln 2}{200}x} dx$$

$$= 1 - \left[-e^{\frac{-\ln 2}{200}x} \right]_0^{300} = 1 - \left[-e^{\frac{-3\ln 2}{2}} + 1 \right] =$$

$$e^{\frac{-3\ln 2}{2}} = e^{-3\ln\sqrt{2}} = e^{-\ln(\sqrt{2})^3} = e^{-\ln 2\sqrt{2}} = e^{\ln\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}} \simeq \boxed{0{,}35}$$

3) a) Une intégration par partie permet de calculer cette intégrale :

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u(x) = -e^{-\lambda x} \\ v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left[-A e^{-\lambda A} \right] + \int_0^A e^{-\lambda x} dx = -A e^{-\lambda A} + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^A$$

$$= -A e^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$$

3) b)

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{A \to +\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} = 0 \\ \lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-\lambda A} = 0 \\ \lim\limits_{A \to +\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{A \to +\infty} -\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{A \to +\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$d_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2} \simeq 288 \text{ semaines}$$

EXERCICE12

1.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ 1-a \end{pmatrix} \perp \vec{v} \begin{pmatrix} 1+b \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$a(1+b) + (-5) + b(1-a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a + ab - 5 + b - ab = 0 \Leftrightarrow$$

$$a + b = 5$$

Notons Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire :
$\Omega = \{(1; 1), (1 ; 2) ....\}$, card $\Omega = 4^2$
(Il y a $4^2 = 4 \times 4$ tirages possibles pour comprendre dénombrer avec un arbre)
Soit O l'événement : " Obtenir une somme égale à 5 ".
O est composé de 4 éléments (1 ;4) , (2 ; 3) , (3 ; 2) et (4 ; 1)
(Il y a 4 tirages favorables, on peut obtenir une somme égale à 5 en tirant 1, 4 ou 4, 1 ou 2, 3 ou 3, 2)

$$p(O) = \frac{card(O)}{card(\Omega)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

La probabilité que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives
(a; -5; 1 - a) et (1+b; 1 ;b) soient orthogonaux est égale à 1/4.

2. La probabilité que les vecteurs soient orthogonaux est de 1/4, donc la probabilité qu'ils ne le soient pas est de 3/4.
les évènements "A obtient des vecteurs orthogonaux " et"B obtient des vecteurs orthogonaux " sont indépendants il en est de même de leurs contraires :
a. A_1 : " A gagne la première partie "
B_1 : " B gagne la première partie "
C_1: " Le jeu continue après la première partie

$$p(A_1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$p(B_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$p(C_1) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

(C_1 : " les deux perdent ou les deux gagnent à la première partie ")
b.
$p(C_{n+1}) = p(C_n) \times p(C_1)$
$p(C_{n+1}) = p(C_n) \times 5/8$
$(p(C_n))$ est donc une suite géométrique de premier terme $p(C_1) = 5/8$ et de raison 5/8, par conséquent :

$$p(C_n) = \frac{5}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n}$$

$$p(A_{n+1}) = P(A_1) \times p(Cn) = \frac{3}{16}\ p(C_n)$$

$$\text{donc } p(A_n) = \frac{3}{16} p(C_{n-1}) = \frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

3. a. $0 < 5/8 < 1$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} p(A_n) = 0$$

b.

$$p(A_n) \leq 0,01 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \leq 0,01 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \leq \frac{0,16}{3} \Leftrightarrow \quad \left(\frac{0,16}{3} = \frac{16}{300} = \frac{4}{75}\right)$$

$$(n-1)\ln\frac{5}{8} \leq \ln\frac{4}{75} \quad (\text{ car la fonction } \ln \text{ est croissante })$$

$$n - 1 \geq \frac{\ln\frac{4}{75}}{\ln\frac{5}{8}} \quad \left(\ln\frac{5}{8} < 0\right)$$

$$n \geq 1 + \frac{\ln\frac{4}{75}}{\ln\frac{5}{8}} \approx 7,2$$

EXERCICE13

1. Parmis les 600 participants au repas il y a 200 membres , donc la probabilité que la personne choisie soit membre de l'association est de 200/600 soit 1/3.

2)

participant	10ans ou -	Entre11et16ans	+que16ans
membre	4D	6.4D	8D
Non membre	5D	8D	10D

Les personnes qui payent plus de 7 D sont les jeune âgé de 11 à 16 ans non membres et les plus de 16 ans. Parmis les 600 participants au repas il y a 100 + 300 personnes qui paient plus de 7 D donc la probabilité que la personne choisie paye plus de 7D est de : 400/600 = 2/3.

3.

p(X = 6,4) = 40/600 = 1/15

4. X prend ses valeurs dans l'ensemble {4 ; 5; 6,4 ; 8;

10}

p(X = 4) = 50/600 = 1/12

p(X = 5) = 110/600 = 11/60

p(X = 6,4) = 1/15

p(X = 8) = 210/600 = 7/20

p(X = 10) = 190/600 = 19/60

5.

E(X) = 2293/300 $\approx$ 7,64

Partie B

Le prix moyen payé par les participants est de 2293/300 D, donc la recette totale perçu par l'association à l'occasion de ce repas est de 2293/300 x 600 = 4586 D