CORRECTION EXERCICE DENOMBREMENT

EXERCICE 1

1. b)

2. b)

3. a) et b)

4. a) et b)

5. c)

6. a) et b) et c)

EXERCICE 2

1. card(A) = 5, card(B) = 5, card($A \cap B$) = 2, card($A \cup B$) = 8, card(E) = 11.
2. L'égalité liant les quatre premiers nombres est la suivante : card($A \cup B$) = card(A) + card(B) - card($A \cap B$).

EXERCICE 3

1. le nombre de tirages possibles est : $12^3 = 1728$

2. La probabilité :
   a) d'obtenir trois boules rouges est : $5^3/12^3$;
   b) d'obtenir deux boules rouges exactement est : (5 × 5 × 7 + 5 × 7 × 5 + 7 × 5 × 5) / 1728 = 525 / 1728 ;
   c) d'obtenir au moins une boule rouge est: 1 - (7^3 / 12^3) = 1385 / 1728 ;
   d) d'obtenir deux boules vertes et une noire est : (3 × 3 × 4 + 3 × 4 × 3 + 4 × 3 × 3) / 1728 = 108 / 1728 ;
   e) d'obtenir trois boules de la même couleur est : ($5^3 + 4^3 + 3^3$) / 1728 = 216 / 1728 ;
   f) d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est : (5 × 4 × 3 × 6) / 1728 = 360 / 1728.

EXERCICE 4

La classe comprend 36 élèves.

1. Le nombre d'élèves étudiant l'espagnol est égal à : 8 + 4 + 10 = 22. Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie l'espagnol est donc égale à : 22 / 36 (= 11 / 18).
2. Le nombre d'élèves étudiant uniquement l'espagnol est égal à 8. Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie uniquement l'espagnol est donc égale à 8 / 36 (= 2/9).
3. Le nombre d'élèves étudiant l'espagnol et le latin est égal à 4. Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie l'espagnol et le latin est donc égale à 4 / 36 (= 1/9).
4. Le nombre d'élèves étudiant l'espagnol ou le latin est égal à 8 + 10 + 4 + 3 + 6 = 31. Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie l'espagnol ou le latin est donc égale à 31 / 36.
5. Le nombre d'élèves étudiant l'espagnol, l'espagnol et la musique, le latin, le latin et la musique

est égal à 8 + 10 + 3 + 6 = 27. Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie l'espagnol, l'espagnol et la musique, le latin, le latin et la musique est donc égale à 27 / 36 (= 3/4).
6. Le nombre d'élèves étudiant une seule des trois options est égal à 8 + 6 + 5 = 19. Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie une seule des trois options est donc égale à 19 / 36.

EXERCICE 5

1. a) Un tirage est constitué d'une suite de trois boules distinctes choisies parmi 8. Le nombre de tirages possibles est donc : $A_8^3 = 336$ (tous équiprobables).

b) La probabilité d'obtenir trois boules rouges est : $\frac{A_3^3}{A_8^3} = \frac{1}{56}$.

c) La probabilité d'obtenir deux boules rouges est :
Le nombre de façons de tirer successivement deux boules rouges distinctes est A_3^2.
Le nombre de façons de tirer une boule blanche est A_5^1.
Le nombre de façons de placer deux boules rouges parmi trois positions est $\binom{3}{2}$.
Donc, la probabilité cherchée est : $\frac{A_3^2 \times A_5^1 \times C_3^2}{A_8^3} = \frac{15}{56}$.

2. a) Un tirage revient à prendre trois éléments dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de tirages possibles est donc le nombre de parties à 3 éléments dans un ensemble à 8 éléments, c'est-à-dire $\binom{8}{3}$.
Il y a donc 56 tirages possibles (tous équiprobables).

b) La probabilité d'obtenir trois boules rouges est : $\frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$.

c) La probabilité d'obtenir deux boules rouges est : $\frac{\binom{3}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$.
(où $\binom{3}{2}$ correspond au nombre de façons de tirer simultanément deux boules rouges et $\binom{5}{1}$ correspond au nombre de façons de tirer une boule blanche parmi 5 boules).
On peut remarquer que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux de la question 1.

EXERCICE 6

1. CHERS contient cinq lettres distinctes. Le nombre d'anagrammes est donc: 5! = 120.

2. CHERE contient aussi cinq lettres, mais il y a deux E. Notons les E_1 et E_2 pour commencer. Les classements RE_1CHE_2 et RE_2CHE_1donnent le même mot.
D'une manière générale, toute anagramme est obtenue deux fois, une fois avec E_1 en premier, une fois avec E_2 en premier; le nombre d'anagrammes est donc égal au nombre de classements des cinq lettres, divisé par le nombre de classements des deux E.
Le nombre d'anagrammes de CHERE est égal à : (5!) / (2!) = 60.

3. CHERCHER contient huit lettres. On doit diviser 8! par $(2!)^4$ (une fois parce qu'une permutation des deux E ne modifie pas une anagramme, une fois à cause des deux R, une autre à cause des deux C, une dernière à cause des deux H).
On a donc : (8!) / $(2!)^4$ = 2 520 anagrammes.

4. RECHERCHER contient 10 lettres dont 3 R, 3 E, 2 C et 2 H. Le nombre d'anagrammes est donc : (10!) / (3! × 3! × 2! × 2!) = 25 200 anagrammes.

EXERCICE 7

1. Un circuit correspond à un arrangement de 4 éléments de l'ensemble des 12 capitales de la C.E.E. (l'ordre intervient et les éléments doivent être distincts).

   Le nombre des circuits est : A_{12}^{4} = 11 880 circuits différents.

   2. Chacune des capitales a la même probabilité d'être choisie en premier. Comme il y a 12 capitales, chacune d'entre elles, et en particulier Paris, a une chance sur 12 d'être la première étape du circuit.
   La probabilité cherchée est donc : 1/12.

   3. Le circuit commence à Paris.
   ► le nombre de circuits possibles : il faut compléter par trois capitales distinctes en tenant compte de l'ordre dans lequel elles sont visitées.
   Il y a donc A_{11}^{3} = 990 circuits possibles.
   ► circuits favorables : (P, R, M, X); (P, R, X, M); (P, M, R, X); (P, M, X, R); (P, X, R, M); (P, X, R, M).
   Dans chacun des cas, il y a 9 circuits possibles (ce qui correspond au choix de la quatrième capitale). Le nombre de circuits favorables est donc : 9 × 6.
   D'où : la probabilité cherchée est alors : (9 × 6) / (11 × 10 × 9) = 3 /55.

EXERCICE8

a.) 66^8= 360 040 606 269 696. b.) $26^2\ 10^3$ = 676 000.

EXERCICE9

Il y a 23! permutations des livres de mathématiques et 9! permutations des livres de physique. Ensuite il y a 2! permutations des deux groupes. Le nombre de dispositions possibles est alors:

23! 9! 2! = 18 762 359 668 413 160 646 246 400 000 (i.e. $1{,}876.. \cdot 10^{28}$)

EXERCICE10

Il y a 4! permutations des 4 Américains, 3! permutations des 3 Suisses et 5! permutations des 5 Anglais. Ensuite il y a 3! permutations des trois groupes. La réponse cherchée est:

4! 3! 5! 3! = 103680

EXERCICE11

C^4_{23}= 23!/(4!·19!) = 8855

EXERCICE12

.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ -5 \\ 1-a \end{pmatrix} \perp \vec{v}\begin{pmatrix} 1+b \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$a(1+b)+(-5)+b(1-a)=0 \Leftrightarrow$$

$$a+ab-5+b-ab=0 \Leftrightarrow$$

$$a+b=5$$

Notons Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire :
Ω = {(1; 1) , (1 ; 2) .....}, card Ω = 4^2
(Il y a $4^2 = 4 \times 4$ tirages possibles pour comprendre dénombrer avec un arbre)
Soit O l'événement : " Obtenir une somme égale à 5 ".
O est composé de 4 éléments (1 ;4) , (2 ; 3) , (3 ; 2) et (4 ; 1)
(Il y a 4 tirages favorables, on peut obtenir une somme égale à 5 en tirant 1, 4 ou 4, 1 ou 2, 3 ou 3, 2)

$$p(O)=\frac{card(O)}{card(\Omega)}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

La probabilité que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives
(a; -5; 1 - a) et (1+b; 1 ;b) soient orthogonaux est égale à 1/4.

2. La probabilité que les vecteurs soient orthogonaux est de 1/4, donc la probabilité qu'ils ne le soient pas est de 3/4.
les évènements "A obtient des vecteurs orthogonaux " et"B obtient des

vecteurs orthogonaux " sont indépendants il en est de même de leurs contraires :

a. A_1 : " A gagne la première partie "

B_1 : " B gagne la première partie "

C_1: " Le jeu continue après la première partie

$$p(A_1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$p(B_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$p(C_1) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

(C_1 : " les deux perdent ou les deux gagnent à la première partie ")

b.

$p(C_{n+1}) = p(C_n) \times p(C_1)$

$p(C_{n+1}) = p(C_n) \times 5/8$

$(p(C_n))$ est donc une suite gométrique de premier terme $p(C_1) = 5/8$ et de raison 5/8, par conséquent :

$$p(C_n) = \frac{5}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n}$$

$$p(A_{n+1}) = P(A_1) \times p(Cn) = \frac{3}{16}\ p(C_n)$$

$$\text{donc } p(A_n) = \frac{3}{16} p(C_{n-1}) = \frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

3. a. $0 < 5/8 < 1$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} p(A_n) = 0$$

b.

$$p(A_n) \leq 0,01 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{16} \times \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \leq 0,01 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \leq \frac{0,16}{3} \Leftrightarrow \quad \left(\frac{0,16}{3} = \frac{16}{300} = \frac{4}{75}\right)$$

$$(n-1) \ln \frac{5}{8} \leq \ln \frac{4}{75} \quad \text{(car la fonction ln est croissante)}$$

$$n - 1 \geq \frac{\ln \frac{4}{75}}{\ln \frac{5}{8}} \quad \left(\ln \frac{5}{8} < 0\right)$$

$$n \geq 1 + \frac{\ln \frac{4}{75}}{\ln \frac{5}{8}} \approx 7,2$$

EXERCICE14

1. Il y a 4 rois dans le jeu de 32 carte avant le premier tirage donc la probabilité de tirer un roi est de :

$$P(R_1) = \frac{\text{card}\, R_1}{\text{card}\, \Omega} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

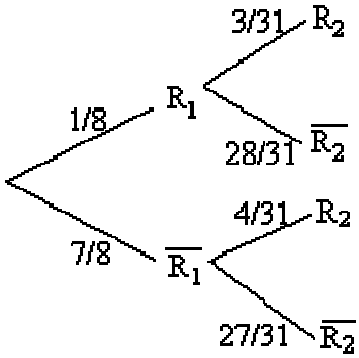
Au deuxième tirage sachant qu'un roi a été tiré, il ne reste plus que 3 rois et le jeu ne compte plus que 31 cartes soit :

$$P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{31}$$

Au deuxième tirage sachant qu'aucun roi n'a été tiré au premier tirage il y toujours les 4 rois mais une carte de moins dans le jeu donc la probabilité d'obtenir un roi est de :

$$P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{4}{31}$$

2.



3.

$$P(A) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \approx 0{,}012$$

$$P(B) = P\left((R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (\overline{R_1} \cap R_2)\right) = P\left(R_1 \cap \overline{R_2}\right) + P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{28}{31} + \frac{7}{8} \times \frac{4}{31} = \frac{7}{62} + \frac{7}{62} = \frac{14}{62} = \frac{7}{31} \approx 0{,}226$$

4.

Nombre de bonbons x_i	0	10	20
$P(X = x_i)$	0,762	0,226	0,012

5. Calculer l'espérance mathématique E de cette loi, arrondie au millième.

E $\simeq$ 2,5 bonbons