CORRECTION DU DEVOIR N°4

Exercice1

Guesmi.B

1)a) $\forall z \in \mathfrak{C}$;$z^4$-1=0⇔(z-1)(z+1)($z^2$-1)=0⇔z=1 ou z=-1 ou z=i ou z=-i

b)$(\frac{2z+1}{z-1})^4 = 1\,; on\ pose\ Z = \frac{2z+1}{z-1}\ pour\ z \neq 1$ donc l'équation est équivalente à

$$Z^4 = 1 \Leftrightarrow Z = 1ou\ Z = -1ou\ Z = i\ ou\ Z = -i$$

en remplaçant Z par $\frac{2z+1}{z-1}$ on aura z=0 ou z=-2 ou z=$\frac{1}{5}(-1+3i)$ ou $z = \frac{1}{5}(-1-3i)$

2)a)(O ;$\vec{u}$; $\vec{v}$)un repere orthonormé direct A(-2) ;B($\frac{-1-3i}{5}$) et C($\frac{-1+3i}{5}$)

b) montrons que O ;A ;B et C sont sur un même cercle

on a :$|0-1| = |-2-1| = \left|\frac{-1-3i}{5} - 1\right| = \left|\frac{-1+3i}{5} - 1\right| = 1$ d'où le résultat

3)D($\frac{-1}{2}$) donc et puisque d=$\frac{-1}{2}$ on a alors $\frac{a-c}{d-c} = 2 - 2i = 2(1-i) = 2\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$

Donc $\frac{CA}{CD} = 2\sqrt{2}$

EXERCICE2

Partie(1)

1)on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ donc la doite D :y=1 est une asymptote à la courbe

(C) au voisinage de +∞

2)$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+1}{x^3} e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{x\to 0}(x^2+x+1)(\frac{1}{x})^3 e^{(\frac{-1}{x})}$

En effectuant un changement de variable X=$\frac{1}{x}$ quand X→ $+\infty$ car (x>0)

On obtient$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{(\frac{e^X}{X^3})} = 0$

Donc f est dérivable à droite en 0 et(C) admet une demi tangente horizontale

3) f'(x)=$\frac{1-x}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$; le seul problème $(e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Le signe de f'(x) est celui de (1-x)

Le tableau de signe est évident

$2^{ème}$ partie

On pose g(x)=f(x)-xf'(x)   pour x>0

1)g(x)=0⇔f(x)=xf'(x)⇔$e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^3+x^2+2x-1}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$ résultat demandé

2) soit h(x)=$x^3 + x^2 + 2x - 1$ on a : h'(x)=$3x^2+2x+2$

On remarque que h(0)=-1 et h(1)=3 donc l'équation h(x)=0 admet au moins une solution α

Dans]0 ;1[un petit calcul donne h(0 ;39)xh(0 ;4)<0   donc 0.39<α<0.4

3)A=$\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ $=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^3}e^{\frac{1}{\alpha}}$; f étant croissante sur]0.39 ;0.40[et en utilisant les propriétés

Des inégalités et que 0.36<α<0.4   on a :$\frac{f(0.39)}{0.4} < \frac{f(\alpha)}{\alpha} < \frac{f(0.4)}{0.39}$

Donc A≈ 2

On a :A=$\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ or α est solution de $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ or vu la question (a)

Donc $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = f'(\alpha)$

4) pour α>0 on a :$T_\alpha : y = f'(\alpha)(x-\alpha) + \alpha f'(\alpha)$

=f'(α)x=$\frac{f(\alpha)}{\alpha}x = Ax$

5) d'après (4) y=Ax   sa représentation est une droite qui passe par l'origine du repère

(fonction lineaire)

6) discutions graphique

devoir N°4