CORRECTION DES DEVOIRS

DEVOIR2

Partie A . 1) $p(x) = x^3 - 3x + 2$

p(1) = $(1)^3$ - 3(1) + 2 = 0 donc 1 est une racine de p(x) . $p(x) = x^3 - 3x + 2$, d'ou p(x) peut se mettre sous la forme p(x) = (x -1)(ax^2 + bx + c)

$ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c =$

$ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = -3 \\ -c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$p(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

2) Etude du signe de p(x)

x – 1 > 0 si et seulement si x > 1

Δ = 9 > 0, donc le polynôme $x^2 + x - 2$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad x_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

par conséquent $x^2 + x - 2$ est positif à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x - 1		-		-	0	+	
$x^2 + x - 2$		+	0	-	0	+	
p(x)		-	0	+	0	+	

Partie B

$$I-4)\ f(x) - x = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - x$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{3x-1}{x^2}$$

x^2 est toujours strictement positif sur l'intervalle $]-\infty; 0[$

si x < 0 , 3x < 0 et donc 3x – 1< -1 donc l'expression f(x) – x est toujours strictement négative.

On en déduit que la courbe représentative de f est située au dessous (strictement) de la droite d'équation y = x.

$$III-1)\ z_2 = 2\left[\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right] =$$

$$2\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$$z_3 = \frac{4i}{z_1} = \frac{4i}{1-\sqrt{3}\,i} = \frac{4i\left(1+\sqrt{3}\,i\right)}{\left(1-\sqrt{3}\,i\right)\left(1+\sqrt{3}\,i\right)}$$

$$= \frac{4i - 4\sqrt{3}}{1-3i^2} = \frac{-4\sqrt{3}+4i}{4} = -\sqrt{3} + i$$

$f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = x + 3x^{-1} - x^{-2}$

Pour tout $x \in]-\infty;0[$:

$f'(x) = 1 - 3x^{-2} + 2x^{-3}$

$= 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^3}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3} = \frac{p(x)}{x^3}$

sur]- ∞ ; 0[, x^3 est strictement négatif on en déduit avec les résultats de la question 2) partie A, le signe de f '(x) puis les variations de f sur]- ∞ ; 0[:

x	$-\infty$		-2		0
p(x)		$-$		$+$	
f '(x)		$+$	0	$-$	‖
f(x)		$\nearrow$	-4	$\searrow$	‖

$f(-2) = -2 + \frac{3}{-2} - \frac{1}{4} = \frac{-8-6-2}{4} = -4$

3) $f'(-1) = \frac{(-1)^3 - 3(-1) + 2}{(-1)^3} = -4$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -1 de C_f.

$f(-1) = -1 - 3 - 1 = -5$ est l'ordonnée du point d'abscisse -1 de C_f , on en déduit l'équation de la tangente : $y = -4(x+1) - 5$ ce qui donne après simplification : $y = -4x - 9$

2) $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$

$|z_1| = |1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

soit θ_1 un argument de z_1

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_1 = \frac{1}{2}\\ \sin\theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\theta_1 = \frac{-\pi}{3}$$

$z_1 = 2\left[\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right]$

$z_2 = 2\left[\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right]$

$z_3 = -\sqrt{3} + i$

$|z_3| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

soit θ_3 un argument de z_3

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_3 = \frac{1}{2}\end{array}\right\}\theta_3 = \frac{5\pi}{6}$$

$z_3 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$

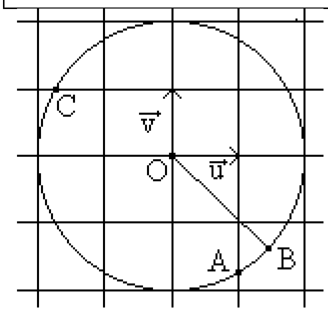
IV - 1) $f'(x) = 3(2x+3)(x^2+3x-5)^2$

2) $f'(x) = \frac{(2x+4)(x^2-1) - 2x(x^2+4x-2)}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{2x^3 - 2x + 4x^2 - 4 - 2x^3 - 8x^2 + 4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x^2 + 2x - }{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = \sqrt{3x-6} + \frac{3x}{2\sqrt{3x-6}} - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \sqrt{3x-6} + \frac{3x}{2\sqrt{3x-6}} - \frac{1}{x^2}$



DEVOIR4

I- Etude de fonction -1)

$$f(x)=\frac{x^2-4x+7}{x-1}$$

$$\frac{x^2-4x+7}{x-1}=3$$

$$x^2-4x+7=3x-3$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$\Delta=49-4\times1\times10=9>0$$

donc 2 racines réelles :

$$x_1=\frac{7-3}{2}=2 \quad et \quad x_2=\frac{7+3}{2}=5$$

La droite d'équation *y =3* coupe la courbe représentative de *f* en deux points d'abscisses 2 et 5. A(2 ; 3) et B(5 ;3) sont donc les deux points recherchés.

2)

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+7)\times1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-7}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

f'(x) est du signe de x^2-2x-3 car $(x-1)^2>0$ sur $]1\,;+\infty[$.

Calculons les racines du polynôme x^2-2x-3

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=4+12=16>0$$

donc 2 racines réelles :

$$x_1=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \quad et \quad x_2=\frac{2+4}{2}=3$$

Ce polynôme admet deux racines réelles –1 et 3 donc x^2-2x-3 est positif à l'extérieur de ces racines –1 et 3 on en déduit le signe de *f'(x)* puis les variations de *f*

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	2	↗	

f admet un minimum en 3 qui est : $f(3)=\dfrac{3^2-4\times3+7}{3-1}=\dfrac{9-12+7}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

3) déterminons les équations réduites des tangentes (T_A) et (T_B) aux points d'abscisses 2 et 5 de la courbe :

<u>coefficient directeur de la tangente au point A :</u>

$$f'(2)=\frac{2^2-2\times2-3}{(2-1)^2}=\frac{4-4-3}{1}=-3$$

<u>Equation de la tangente au point A :</u>

y = f'(2)(x – 2) + f(2)

y = -3(x - 2) + 3

y = -3x + 6 + 3

(T_A) : *y = -3x + 9*

<u>coefficient directeur de la tangente au point B :</u>

$$f'(5)=\frac{5^2-2\times5-3}{(5-1)^2}=\frac{25-10-3}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

<u>Equation de la tangente au point B :</u>

y = f'(5) (x-5) + f(5)

$$y=\frac{3}{4}(x-5)+3 \quad y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}+\frac{12}{4} \quad \boxed{(T_B): y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}}$$

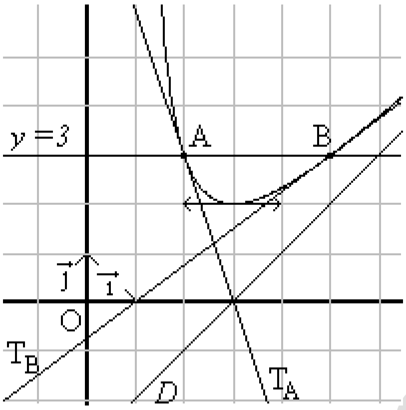
4) $x-3+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-1)}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{x^2-x-3x+3+4}{x-1}=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}=f(x)$

donc $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x-1}$

5) $f(x)-(x-3)=\dfrac{4}{x-1}>0 \text{ sur }]1;+\infty[$

donc la courbe représentative de f est au dessus de la droite (D) d'équation *y = x-3*

6) Construction de la courbe C_f et des droites (D), (T_A), (T_B)



7) le coefficient directeur de la droite (D) est 1,
cela revient donc à résoudre l'équation *f'(x)* = 1

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=1$$

$$x^2-2x-1=x^2-3x-3$$

$$-1=-3$$

cette équation n'a pas de solutions dans IR donc il n'existe aucun point de la courbe tel que la tangente en ce point est parallèle à la droite (D)

II – Nombres complexes

$$1)\left|z_A\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

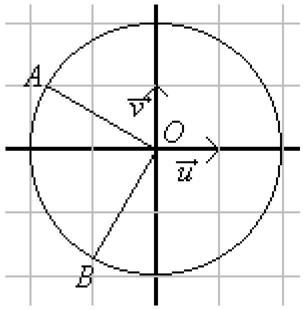
$$\left|z_B\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

soient θ_{A} et θ_{B} des arguments de z_A et z_B

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_{\mathrm{A}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_{\mathrm{A}} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_{\mathrm{B}} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_{\mathrm{B}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_{\mathrm{B}} = \frac{-2\pi}{3}$$

2)



3) Deux méthodes pour démontrer que OAB est rectangle en O :

<u>Avec les arguments</u>

$$mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OA}}) = \frac{5\pi}{6} \quad mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}}) = \frac{-2\pi}{3}$$

$$mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\vec{u}}) + mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}}) + k2\pi$$

$$= \frac{-5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} + k2\pi = \frac{-5\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} + k2\pi$$

$$= \frac{-9\pi}{6} + k2\pi = -\frac{3\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$mes_{principale}(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{AOB rectangle en O}$$

<u>Avec la réciproque du théorème de Pythagore :</u>

$$AB = \left|z_B - z_A\right| = \left|-1 - \sqrt{3}i + \sqrt{3} - i\right|$$

$$= \left|-1 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3} - 1)i\right| = \sqrt{(-1+\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= \sqrt{1 \cancel{-2\sqrt{3}} + 3 + 3 + \cancel{2\sqrt{3}} + 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$OA = \left|z_A\right| = 2 \quad OB = \left|z_B\right| = 2$$

AB² = 8

OA² + OB² = 4 + 4 = 8 donc AB² = OA²+OB² d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en O
De plus OA = OB , le triangle est donc isocèle et rectangle en O .

4) $z_A{}^2 z_B = \left(-\sqrt{3}+i\right)^2\left(-1-\sqrt{3}i\right) = \left(3-2\sqrt{3}i+i^2\right)\left(-1-\sqrt{3}i\right)$

$= \left(2-2\sqrt{3}i\right)\left(-1-\sqrt{3}i\right) = -2-2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i+6i^2 = -8$

III – Fonctions dérivées

1) $f(x) = (x^2+3x-5)^2$

f est de la forme u^n avec $u(x) = x^2+3x\text{-}5$ *et* $n = 2$

$f' = nu'u^{n-1}$

$u'(x) = 2x+3$

$f'(x) = 2(2x+3)(x^2+3x-5)^1 = 2(2x+3)(x^2+3x-5)$

2) $f(x) = x^3\sqrt{4-x^2}$

f est de la forme uv avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \sqrt{4\text{-}x^2}$

$f' = u'v+uv'$

$u'(x) = 3x^2 \quad v'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$ (forme $\sqrt{\text{u}}$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$)

$f'(x) = 3x^2\sqrt{4-x^2} + x^3\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$

3) $f(x) = \sin(3x-5)$

f est de la forme $\sin u$ avec $u(x) = 3x\text{-}5$

$f' = u'\cos u$

$u'(x) = 3$

$f'(x) = 3\cos(3x-5)$

DEVOIR5

1) pour tout réel $x \neq 0$ et $x \neq -1$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{2x + 2} = \frac{x^2\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right]}{x\left[2 + \frac{2}{x}\right]} = \frac{x\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right]}{2 + \frac{2}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2 + \frac{2}{x} = 2 \end{array}\right\} \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{2}{x} = 2 \end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} x^2 - x + 2 = 4 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} 2x + 2 = 0^- \end{array}\right\} \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 - x + 2 = 4 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} 2x + 2 = 0^+ \end{array}\right\} \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

des deux dernières limites, on en déduit que la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à C_f

2) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{2x + 2} = \frac{u(x)}{v(x)}$

$u(x) = x^2 - x + 2 \Rightarrow u'(x) = 2x - 1$

$v(x) = 2x + 2 \Rightarrow v'(x) = 2$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(2x+2) - 2(x^2 - x + 2)}{(2x+2)^2} = \frac{4x^2 + 4x - 2x - 2 - 2x^2 + 2x - 4}{(2x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(2x+2)^2} = \frac{2(x^2 + 2x - 3)}{(2x+2)^2}$$

3) $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 3$ car $(2x + 2)^2 > 0$ sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ donc deux racines réelles pour $x^2 + 2x - 3$:

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \; et \; x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

<u>Calcul des extremums :</u>

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 - (-3) + 2}{2(-3) + 2} = \frac{9 + 3 + 2}{-6 + 2} = \frac{14}{-4} = \frac{-7}{2}$$

$$f(1) = \frac{1 - 1 + 2}{2 + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

<u>tableau de variation de *f* :</u>

4) $f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)=\frac{x^2-x+2}{2x+2}-\frac{x-2}{2}=\frac{x^2-x+2}{2x+2}-\frac{(x-2)(x+1)}{2x+2}$

$=\frac{x^2-x+2-(x-2)(x+1)}{2x+2}=\frac{x^2-x+2-(x^2-2x+x-2)}{2x+2}=$

$=\frac{x^2-x+2-(x^2-x-2)}{2x+2}=\frac{4}{2x+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+2=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+2=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x-1\right)=0$

donc la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-1$ est asymptote à C_f en -∞ et +∞

<u>position de la courbe C_f par rapport à l'asymptote (D') :</u>

2x + 2 < 0 si et seulement si x < - 1

2x + 2 > 0 si et seulement si x > -1

donc sur l'intervalle]-∞ ; -1[, C_f est strictement au dessous de la droite (D')

et sur l'intervalle]-1 ; + ∞[, C_f est strictement au dessus de la droite (D')

5) $f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+2}{2x+2}=1 \Leftrightarrow x^2-x+2=2x+2 \Leftrightarrow x^2-3x=0$

$\Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$

la droite d'équation y = 1 coupe la courbe en deux points A et B de coordonnées A(0 ; 1) et B(3 ; 1).

6) Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 :

$f'(0)=\frac{2\times(-3)}{2^2}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$

l'ordonnée du point A est f(0) = 1 d'après la question 5)

Equation de la tangente au point d'abscisse 0 : *y = f'(0) (x – 0) + f(0)*

$(T_A): y=\frac{-3}{2}x+1$

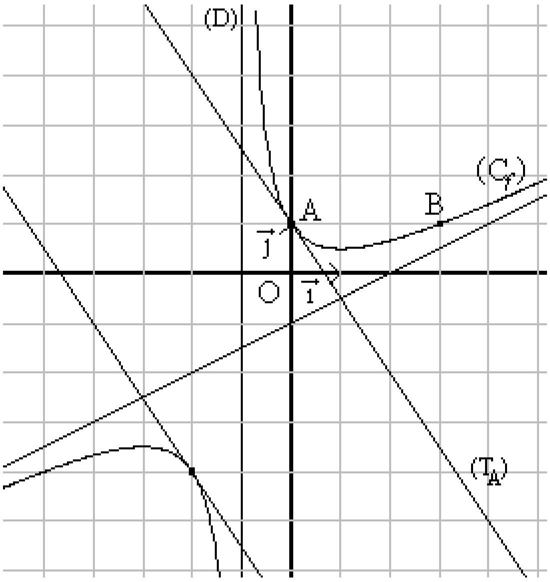
7) soit *x* l'abscisse d'un point éventuel où la tangente est parallèle à (T_A)

deux droites sont parallèles (où confondues) si leurs coefficients directeurs sont égaux :

$f'(x)=\frac{-3}{2} \Leftrightarrow \frac{2x^2+4x-6}{(2x+2)^2}=\frac{-3}{2} \Leftrightarrow -3(2x+2)^2=4x^2+8x-12$

$\Leftrightarrow -3(4x^2+8x+4)=4x^2+8x-12 \Leftrightarrow -12x^2-24x-12=4x^2+8x-12$

$\Leftrightarrow -16x^2-32x=0 \Leftrightarrow -16x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ où $x=-2$



II – 1)

$$z_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = 3 - 3i\sqrt{3}$$

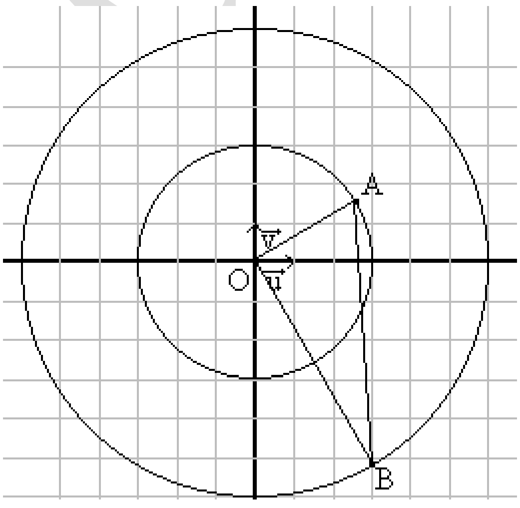
$$|z_2| = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

soit θ_2 un argument de z_2

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 &= \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{-\pi}{3}$$

$$z_2 = 6\left[\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right]$$

2)



3)

$$mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OA}}) = \arg z_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}}) = \arg z_2 = \frac{-\pi}{3}$$

$$mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\vec{u}}) + mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}}) + k2\pi$$

$$mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

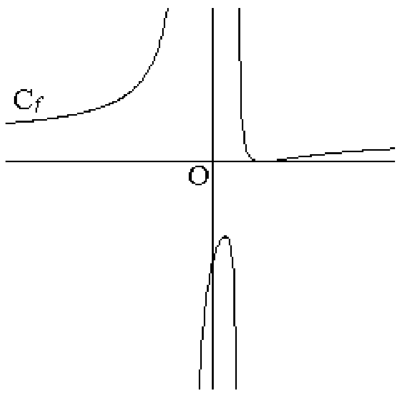
où k est un entier relatif .

donc AOB est rectangle en O

4) $z_2^{\ 2} = (3-3i\sqrt{3})^2 = 9-18i\sqrt{3}+27i^2 = -18-18\sqrt{3}i$

DEVOIR6

I – Problème



On considère la fonction *f* définie sur

$]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1}$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm

(l'allure de C_f est donnée ci-contre, à titre indicatif)

1) pour $x \neq 0,\ f(x) = \dfrac{x^2\left[1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right]}{x^2\left[1 - \dfrac{1}{x^2}\right]} = \dfrac{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right] = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[1 - \dfrac{1}{x^2}\right] = 1\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right] = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 - \dfrac{1}{x^2}\right] = 1\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-} x^2 - 1 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to-1^-} x^2 - 4x + 4 = 9\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^+} x^2 - 1 = 0^- \\ \lim\limits_{x\to-1^+} x^2 - 4x + 4 = 9\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} x^2 - 1 = 0^- \\ \lim\limits_{x\to1^-} x^2 - 4x + 4 = 1\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+} x^2 - 1 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to1^+} x^2 - 4x + 4 = 1\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+	

on en déduit l'existence de trois asymptote d'équations x = -1 , x = 1 , y = 1.

$$2)\ f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2-1) - (x^2-4x+4)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 4x^2 + 4 - (2x^3 - 8x^2 + 8x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 4x^2 + 4 - 2x^3 + 8x^2 - 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^2 - 10x + 4}{(x^2-1)^2} = \frac{2(2x^2 - 5x + 2)}{(x^2-1)^2}$$

3) $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 5x + 2$ car $(x^2 - 1)^2 > 0$ sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

$\Delta = (-5)^2 - 16 = 25 - 16 = 9 > 0$ donc deux racines réelles distinctes pour $2x^2 - 5x + 2$:

$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

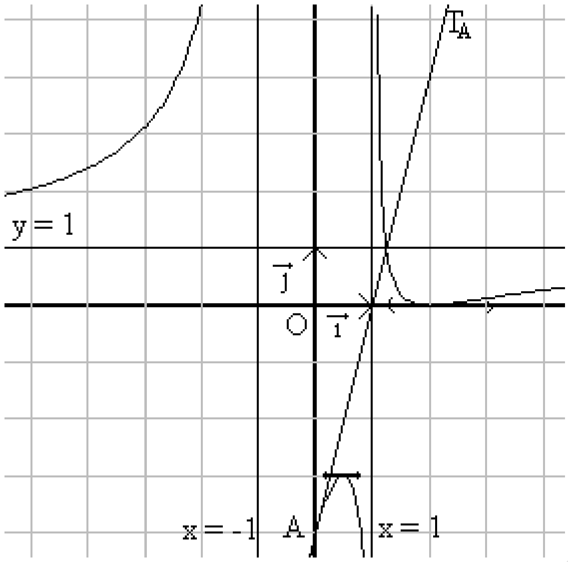
on en déduit que le polynôme $2x^2 - 5x + 2$ est du signe de 2 à l'extérieur des racines et de –2 à l'intérieur . Calculons les extremums :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times\frac{1}{2} + 4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{1}{4} - 2 + 4}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{-3}{4}} = -\frac{9}{4}\times\frac{4}{3} = -3 \qquad f(2) = \frac{2^2 - 4\times2 + 4}{2^2 - 1} = \frac{0}{3} = 0$$

x	$-\infty$		-1		$1/2$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

4) Le point A et le point de coordonnées : A(0 ; f(0)), $f(0) = \dfrac{4}{-1} = -4$ donc A(0 ; - 4)

5) Coefficient de la tangente au point A de C_f : $f'(0) = 4/(-1)^2 = 4$.



$$4)\ f(x) = 4x - 4 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = 4x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = (4x - 4)(x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cancel{-4x} + \cancel{4} = 4x^3 \cancel{-4x} - 4x^2 + \cancel{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ou } 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{4}$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25/16 - 5 + 4}{25/16 - 1} = \frac{9/16}{9/16} = 1$$

donc la droite (T_A) coupe C_f en un autre point le point de coordonnées (5/4 ; 1).

II – Fonction avec logarithme népérien

1) $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

ln *x* > 0 si et seulement si ln *x* > ln 1 si et seulement si *x* > 1 (*f* (1) = ln1 – 1 = -1)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	-	0	+	
$f(x)$	||	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln x - x = 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$ puisque $x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e \Leftrightarrow x = e$

donc la courbe coupe l'axe des abscisse au point d'abscisse e.

3) $f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln\sqrt{e} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

Il existe un point de la courbe ou la tangente admet un coefficient directeur de ½ , c'est le point

d'abscisse $\sqrt{e}$ et d'ordonnée : $f(\sqrt{e}) = \sqrt{e}\ln\left(\sqrt{e}\right) - \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2}\ln e - \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2} - \sqrt{e} = \frac{-\sqrt{e}}{2}$

4)Ordonnée du point d'abscisse ½ : *f*(1/2) = (½) ln (1/2) – ½ = - ½ ln 2 – ½

DEVOIR7

Correction I

1) Pour tout réel x différent de 0 et de 2 on a :

$$f(x)=\frac{x^2-10x+32}{4x-8}=\frac{x^2\left[1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}\right]}{x\left[4-\frac{8}{x}\right]}=\frac{x\left[1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}\right]}{\left[4-\frac{8}{x}\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 4-\frac{8}{x}=4\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=-\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1-\frac{10}{x}+\frac{32}{x^2}\right]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 4-\frac{8}{x}=4\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} x^2-10x+32=16\\ \lim\limits_{x\to2^-} 4x-8=0^-\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+} x^2-10x+32=16\\ \lim\limits_{x\to2^+} 4x-8=0^+\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$$

des deux dernières limites on en déduit l'existence d'une d'asymptote, la droite d'équation x = 2.

2) $f(x)=\dfrac{x^2-10x+32}{4x-8}$

$u(x)=x^2-10x+32\Rightarrow u'(x)=2x-10$

$v(x)=4x-8\Rightarrow v'(x)=4$

$$f'(x)=\frac{(2x-10)(4x-8)-4(x^2-10x+32)}{(4x-8)^2}=\frac{8x^2-16x-40x+80-4x^2+40x-128}{(4x-8)^2}$$

$$=\frac{4x^2-16x-48}{(4x-8)^2}=\frac{4(x^2-4x-12)}{16(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-12}{4(x-2)^2}$$

3) *f'*(*x*) est du signe de x^2 - 4*x* – 12 car 4(*x*-2)² > 0 sur l'ensemble $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-12)=16+48=64>0$ donc 2 racines réelles :

$x_1=\dfrac{4-8}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \quad x_2=\dfrac{4+8}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

on en déduit le signe de *f'*(*x*) et les variations de *f*

calculons les extremums :

$$f(-2)=\frac{(-2)^2-10(-2)+32}{4(-2)-8}=\frac{4+20+32}{-16}=\frac{48}{-16}=-3$$

$$f(6)=\frac{6^2-10\times 6+32}{4\times 6-8}=\frac{36-60+32}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		-2		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	$+\infty$

4) $\frac{1}{4}x-2+\frac{4}{x-2}=\frac{x-8}{4}+\frac{4}{x-2}=\frac{(x-8)(x-2)}{4(x-2)}+\frac{16}{4(x-2)}=$

$\frac{x^2-2x-8x+16+16}{4(x-2)}=\frac{x^2-10x+32}{4(x-2)}=f(x)$

$f(x)-\left(\frac{1}{4}x-2\right)=\frac{1}{4}x-2+\frac{4}{x-2}-\left(\frac{1}{4}x-2\right)=\frac{4}{x-2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 4=4\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x-2=-\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to-\infty} f(x)-\left(\frac{1}{4}x-2\right)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 4=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(\frac{1}{4}x-2\right)=0$$

donc la droite d'équation $y=\frac{1}{4}x-2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ et $-\infty$

5) Pour cette question, on peut se servir de la question 3) , *f* atteint admet –3 comme maximum sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$ donc $f(x)<0$ sur $]-\infty\,;2[$ et *f* atteint comme minimum ½ sur $]2\,;+\infty[$ donc $f(x)>0$ sur $]2\,;+\infty[$ on peut donc en déduire que la courbe représentative de *f* sera strictement en dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;2[$ et strictement au dessus de l'axe des abscisses sur $]2\,;+\infty[$. On peut sinon étudier le signe de $x^2-10x+32$ et le signe de $4x-8$ et en déduire le signe de $f(x)$.

6) $f(x)=\frac{1}{4}x-2+\frac{4}{x-2}\quad F(x)=\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}-2x+4\ln|x-2|$

or $x-2>0$ sur $]2;+\infty[$ donc $F(x)=\frac{x^2}{8}-2x+4\ln(x-2)$

d'après la question 5) la courbe représentative de f est strictement au dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle [3 ; 6] donc l'aire en unités d'aire de la partie grisée est :

$$\int_3^6 f(x)dx=\left[F(x)\right]_3^6=\left[\frac{x^2}{8}-2x+4\ln(x-2)\right]_3^6=$$

$$\left[\frac{36}{8}-12+4\ln 4-\left(\frac{9}{8}-6+4\ln 1\right)\right]=\frac{27}{8}-6+4\ln 4=8\ln 2-\frac{21}{8}u.a\approx 2,9\ u.a$$

II

$$1)g'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}=\ln x+1-\frac{3}{2}=\ln x-\frac{1}{2}$$

ln x – ½ > 0 ⇔ ln x > ½ ⇔ ln x > ½ ln e

⇔ ln x > ln $\sqrt{e}$ ⇔ x > $\sqrt{e}$

$$g(\sqrt{e})=\sqrt{e}\ln\sqrt{e}-\frac{3}{2}\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{2}\ln e-\frac{3\sqrt{e}}{2}=\frac{\sqrt{e}}{2}-\frac{3\sqrt{e}}{2}=-\sqrt{e}$$

on en déduit les variations de f :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
$g(x)$	‖	↘	$-\sqrt{e}$	↗	

2) Coefficient directeur de la tangente et ordonnée du point :

$$g'(e)=\ln e-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad g(e)=e\ln e-\frac{3}{2}e=e-\frac{3}{2}e=\frac{-e}{2}$$

Equation de la tangente au point d'abscisse e de la courbe représentative de g :

$$y=g'(e)(x-e)+g(e)\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x-e)-\frac{e}{2}\Rightarrow\boxed{y=\frac{1}{2}x-e}$$

III- Nombres complexes

On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i \quad z_2 = -2 - 2i\sqrt{3} \quad z_3 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

1) $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = \boxed{2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]} = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

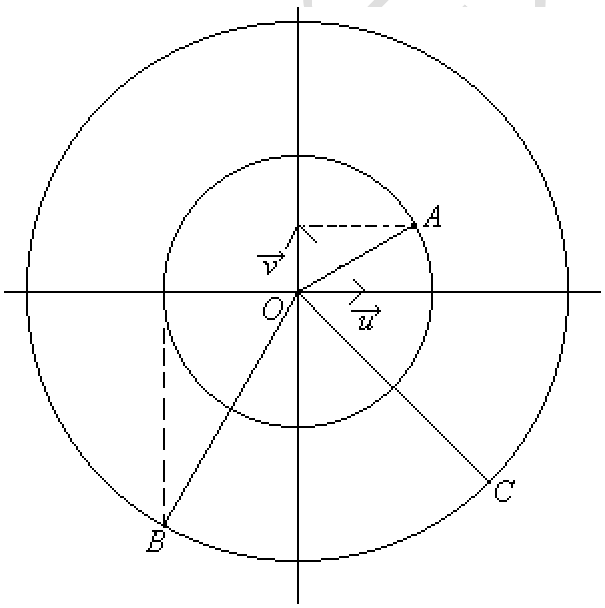
$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta_2 &= \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \frac{-2\pi}{3}$$

$$z_1 = \boxed{4\left[\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right]} = \boxed{4e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$

2) $z_3 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = 4\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \boxed{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}$

3)



DEVOIR8

I- Etude de fonction -1)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1} = 3$$

$$x^2 - 4x + 7 = 3x - 3$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \times 1 \times 10 = 9 > 0$$

donc 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \quad et \quad x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$$

La droite d'équation $y = 3$ coupe la courbe représentative de f en deux points d'abscisses 2 et 5. A(2 ; 3) et B(5 ;3) sont donc les deux points recherchés.

2)

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-1) - (x^2 - 4x + 7) \times 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - x^2 + 4x - 7}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

f'(x) est du signe de $x^2 - 2x - 3$ car $(x-1)^2 > 0$ sur $]1 ;+\infty[$.

Calculons les racines du polynôme $x^2 - 2x - 3$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

donc 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad et \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Ce polynôme admet deux racines réelles –1 et 3 donc x^2-2x-3 est positif à l'extérieur de ces racines –1 et 3 on en déduit le signe de *f'(x)* puis les variations de *f*

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

f admet un minimum en 3 qui est : $f(3)=\dfrac{3^2-4\times 3+7}{3-1}=\dfrac{9-12+7}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ 3) déterminons les équations réduites des tangentes (T_A) et (T_B) aux points d'abscisses 2 et 5 de la courbe : <u>coefficient directeur de la tangente au point A :</u> $f'(2)=\dfrac{2^2-2\times 2-3}{(2-1)^2}=\dfrac{4-4-3}{1}=-3$ <u>Equation de la tangente au point A :</u> *y = f'(2)(x – 2) + f(2)* *y = -3(x - 2) + 3* *y = -3x + 6 + 3* (T_A) : *y = -3x + 9* <u>coefficient directeur de la tangente au point B :</u> $f'(5)=\dfrac{5^2-2\times 5-3}{(5-1)^2}=\dfrac{25-10-3}{16}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$ <u>Equation de la tangente au point B :</u> *y = f'(5) (x-5) + f(5)* $y=\dfrac{3}{4}(x-5)+3 \quad y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{15}{4}+\dfrac{12}{4} \quad \boxed{(T_B): y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}}$	

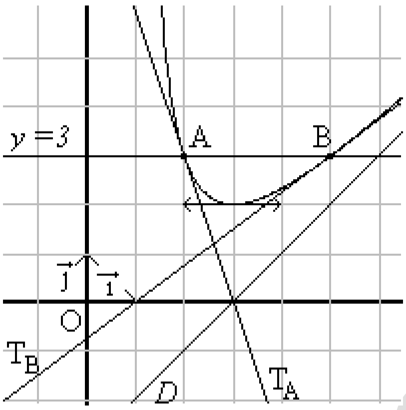
4) $x-3+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-1)}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{x^2-x-3x+3+4}{x-1}=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}=f(x)$

donc $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x-1}$

5) $f(x)-(x-3)=\dfrac{4}{x-1}>0 \text{ sur }]1;+\infty[$

donc la courbe représentative de f est au dessus de la droite (D) d'équation *y = x-3*

6) Construction de la courbe C_f et des droites (D), (T_A), (T_B)



7) le coefficient directeur de la droite (D) est 1,
cela revient donc à résoudre l'équation *f'(x)* = 1

$\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=1$

$x^2-2x-1=x^2-3x-3$

$-1=-3$

cette équation n'a pas de solutions dans IR donc il n'existe aucun point de la courbe tel que la tangente en ce point est parallèle à la droite (D)

II – Nombres complexes

1) $|z_A| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

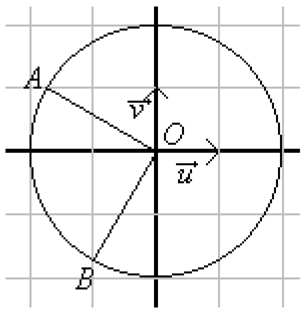
$|z_B| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

soient θ_A et θ_B des arguments de z_A et z_B

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_A = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_A = \dfrac{5\pi}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_B = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_B = \dfrac{-2\pi}{3}$$

2)



3) Deux méthodes pour démontrer que OAB est rectangle en O :

<u>Avec les arguments</u>

$$mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OA}}) = \frac{5\pi}{6} \quad mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}}) = \frac{-2\pi}{3}$$

$$mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{OA};\vec{u}}) + mes(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}}) + k2\pi$$

$$= \frac{-5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} + k2\pi = \frac{-5\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} + k2\pi$$

$$= \frac{-9\pi}{6} + k2\pi = -\frac{3\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$mes_{principale}(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{AOB rectangle en O}$$

<u>Avec la réciproque du théorème de Pythagore :</u>

$$AB = |z_B - z_A| = \left|-1 - \sqrt{3}i + \sqrt{3} - i\right|$$

$$= \left|-1 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3} - 1)i\right| = \sqrt{(-1+\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= \sqrt{1 \cancel{-2\sqrt{3}} + 3 + 3 + \cancel{2\sqrt{3}} + 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$OA = |z_A| = 2 \quad OB = |z_B| = 2$

$AB^2 = 8$

OA² + OB² = 4 + 4 = 8 donc AB² = OA²+OB² d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en O

De plus OA = OB , le triangle est donc isocèle et rectangle en O .

4)
$$z_A{}^2 z_B = \left(-\sqrt{3}+i\right)^2\left(-1-\sqrt{3}i\right) = \left(3-2\sqrt{3}i+i^2\right)\left(-1-\sqrt{3}i\right)$$
$$= \left(2-2\sqrt{3}i\right)\left(-1-\sqrt{3}i\right) = -2-2\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i+6i^2 = -8$$

III – Fonctions dérivées

1) $f(x) = (x^2+3x-5)^2$

f est de la forme u^n avec $u(x) = x^2+3x\text{-}5$ *et* $n = 2$

$f' = nu'u^{n-1}$

$u'(x) = 2x+3$

$f'(x) = 2(2x+3)(x^2+3x-5)^1 = 2(2x+3)(x^2+3x-5)$

2) $f(x) = x^3\sqrt{4-x^2}$

f est de la forme uv avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \sqrt{4\text{-}x^2}$

$f' = u'v+uv'$

$u'(x) = 3x^2 \quad v'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$ (forme $\sqrt{\text{u}}$ $\quad \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$)

$f'(x) = 3x^2\sqrt{4-x^2} + x^3\,\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$

3) $f(x) = \sin(3x-5)$

f est de la forme $\sin u$ avec $u(x) = 3x\text{-}5$

$f' = u'\cos u$

$u'(x) = 3$

$f'(x) = 3\cos(3x-5)$

DEVOIR9

correction

1)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 2\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} 3 = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} 2\ln x + 3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f.

$$f(x) = \frac{2\ln x + 3}{x} = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{3}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 2\frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3}{x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

donc la droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe représentative de f.

2) $$f'(x) = \frac{2\frac{1}{x}x - (2\ln x + 3)}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x - 3}{x^2} = \frac{-2\ln x - 1}{x^2}$$

3) $f'(x)$ est du signe de $-2\ln x - 1$ car $x^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$,

$$-2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow -2\ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x < \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x < -\ln\sqrt{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln\frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

calculons le maximum en $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$: $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}+3}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \dfrac{-2\ln\sqrt{e}+3}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \dfrac{-2\frac{1}{2}\ln e+3}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \dfrac{-1+3}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = 2\sqrt{e}$

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	↗	$2\sqrt{e}$	↘	
	$-\infty$				0

4) $f(x)$ est du signe de $2\ln x + 3$ car $x > 0$ sur $]0;+\infty[$,

$$2\ln x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > -3 \Leftrightarrow \ln x > \frac{-3}{2} \Leftrightarrow \ln x > -\frac{3}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{-3}{2}} \Leftrightarrow x > e^{\frac{-3}{2}}$$

x	0		$exp(-3/2)$		∞
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	

sur l'intervalle $]0;e^{-3/2}[$ C_f est au dessous de l'axe des abscisses, sur $[e^{-3/2};+\infty[$ C_f est au dessus de l'axe des abscisses.

5) Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 : $f'(1) = (-2\ln 1 - 1)/1^2 = -1$
Ordonnée du point d'abscisse 1 : $f(1) = (2\ln 1 + 3)/1 = 3$
l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
soit $y = -(x - 1) + 3$, donc $y = -x + 4$. (construction voir figure)

6) La fonction H est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel x > 0 on a :

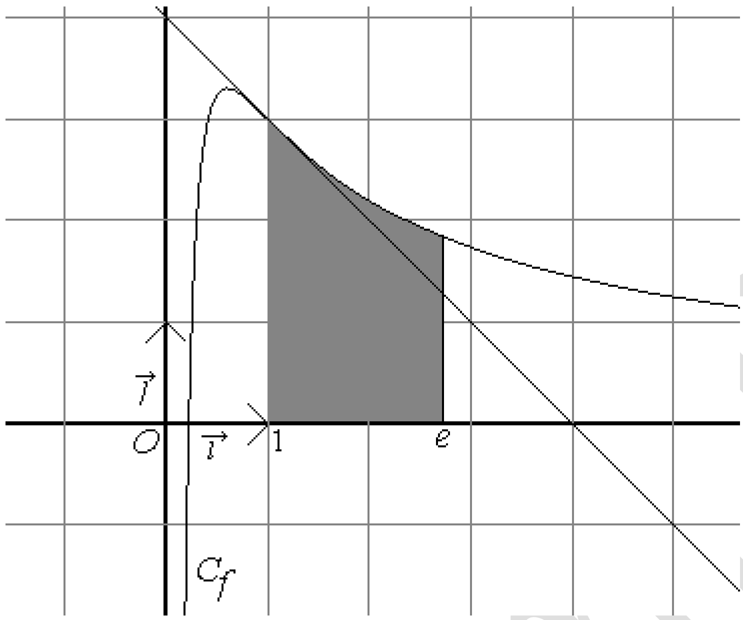
$$H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad H'(x) = \frac{1}{2}2\frac{1}{x}\ln x = \frac{\ln x}{x} = h(x)$$

$$f(x) = 2\frac{\ln x}{x} + \frac{3}{x}$$

$$F(x) = 2\frac{1}{2}(\ln x)^2 + 3\ln|x| = (\ln x)^2 + 3\ln x$$

7) Voir figure , sur [1 ; e] , la courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses (question

$$\int_1^e f(x)dx = [F(x)]_1^e = [(\ln x)^2 + 3\ln x]_1^e = [(\ln e)^2 + 3\ln e - 2(\ln 1)^2 - 3\ln 1] = 1 + 3 = 4u.a$$



DEVOIR10

$I-1)\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x=0\\ \lim\limits_{x\to 0} -4\ln x=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ on en déduit que la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à Cf . 2) $f(x)=x-4\ln x=x\left[1-4\dfrac{\ln x}{x}\right]$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-4\dfrac{\ln x}{x}\right]=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 3) f est dérivable sur]0 ; +∞[et pour tout réel x de]0 ; +∞[, on a : $f'(x)=1-\dfrac{4}{x}=\dfrac{x-4}{x}$ x > 0 sur]0 ; +∞[, donc f '(x) est du signe de x - 4. x - 4 = 0 si et seulement si x = 4. f(4) = 4 – 4ln 4 = 4 – 4 ln 2^2 = 4 – 8 ln 2	**II – 1)** g(x) = $x+2-e^{2x}$ la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : g'(x) = 1 – 2 e^{2x} Etudions le signe de g'(x) 1 – 2 e^{2x} > 0 - 2 e^{2x} > -1 e^{2x} < ½ ln e^{2x} < ln ½ 2x < - ln 2 x < (-ln2)/2 On en déduit les variations de g.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$4 - 8\ln 2$	↗	$+\infty$

4) f(1) = 1 – 4ln 1 = 1 > 0
f(e) = e – 4 ln e = e – 4 < 0
f'(x) est strictement négative sur]0 ; 4 [donc aussi sur l'intervalle]1 ; e [, par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur [1 ; e] et l'équation f(x) = 0 admet une solution α unique sur cette intervalle.
α appartient à]1,4 ; 1,5[
puisque f(1,4) > 0 et f(1,5) < 0. On peut donc prendre $\alpha \approx 1{,}5$.

5) Courbe représentative de la fonction f

6) Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 : f '(1) = - 3
ordonnée du point d'abscisse 1 : f(1) = 1 – 4 ln 1 = 1.

L'équation de tangente au point d'abscisse 1 est donc :
y = f'(1)(x – 1) + f(1)
y = -3 (x – 1) + 1

y = -3x + 3 + 1
y = -3x + 4.

x	$-\infty$		$\frac{-\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$\frac{3}{2}-\frac{\ln 2}{2}$	↘	

$$g(\frac{-\ln 2}{2}) = \frac{-\ln 2}{2} + 2 - e^{-2\frac{\ln 2}{2}} =$$
$$\frac{-\ln 2}{2} + 2 - e^{-\ln 2} = \frac{-\ln 2}{2} + 2 - e^{\ln\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{-\ln 2}{2} + 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[g(x) - (x+2)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

donc la droite d'équation y = x + 2 est asymptote à C_g en $-\infty$.

3) sur l'intervalle [-1 ; 0] la courbe représentative de g est au dessus de l'axe des abscisses. Le domaine grisé est le domaine plan délimité par les droite d'équation x = -1 et x = 0 , la courbe représentative de g et l'axe des abscisses on en déduit :

$$\int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_{0}^{1} x + 2 - e^{2x} dx =$$
$$\left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0} =$$
$$\left[\frac{-1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2}e^{-2}\right)\right] =$$
$$\left[\frac{-1}{2} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2e^2}\right] = 1 + \frac{1}{2e^2}$$

L'aire du domaine grisé en unité d'aire est $1 + \frac{1}{2e^2}$

III – 1) Placement des points A, B C (voir figure)

$$2)\left|z_A\right| = \left|\sqrt{3}+3i\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2+9} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{3}$$

$$3) CA = \left|z_A - z_C\right| = \left|\sqrt{3}+3i-2i\right| = \left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

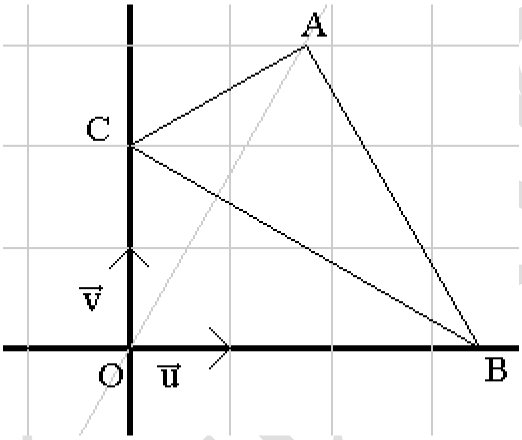
$$AB = \left|z_B - z_A\right| = \left|2\sqrt{3}-\sqrt{3}-3i\right| = \left|\sqrt{3}-3i\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$CB = \left|z_B - z_C\right| = \left|2\sqrt{3}-2i\right| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} CA^2 + AB^2 = 4+12 = 16 \\ CB^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow CA^2 + AB^2 = CB^2$$

d’après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Annexe construction des figures :



Courbe représentative de la fonction f :