THEOREME DE L'ANGLE INSCRIT : ENSEMBLE DES POINTS *M* DU PLAN TELS QUE L'ANGLE ORIENTE DE DROITES OU DEMI-DROITES (*MA, MB*) SOIT CONSTANT. COCYCLICITE. APPLICATIONS.

Niveau : complémentaire.

Pré-requis : Vecteurs – Angles – Relation dans un triangle –

Nous nous placerons dans le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$.

I INTRODUCTION.

Cette leçon a pour objet de caractériser géométriquement les lignes de niveau qui à un point M du plan nous lui associons l'angle orienté $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ et la cocyclicité, *via* le théorème de l'angle inscrit. Dans un premier temps, nous verrons donc le théorème de l'angle inscrit. Il nous permettra de déterminer la cocyclicité de quatre points. Puis, nous étudierons les lignes de niveau. Nous verrons enfin deux applications

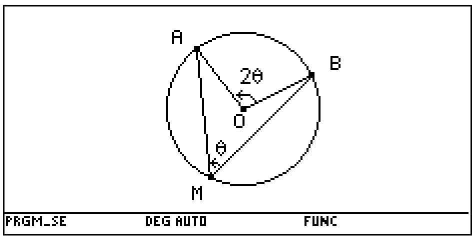
II THEOREME DE L'ANGLE INSCRIT.

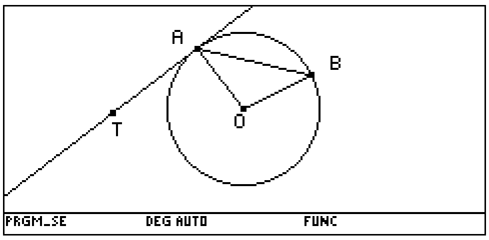
Théorème 1 :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. Soient A et B deux points de $\mathscr{C}$ distincts. Nous avons :

-*i*- Si $M \in \mathscr{C}$ distinct de A et B, alors $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$.

-*ii*- T (distinct de A) appartient à la tangente à $\mathscr{C}$ en A si et seulement si $2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$.





Démonstration :

-*i*- La somme des mesures des angles d'un triangle vaut π radians modulo 2π. De plus, les triangles MOA et MOB sont isocèles en O. Il vient donc :

$$2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)+\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\right)=\pi\,[2\pi],$$

$$2\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right)=\pi\,[2\pi].$$

En ajoutant les deux membres, nous obtenons l'égalité : $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=0\left[2\pi\right]$.

-*ii*- $[\Rightarrow]$ Si T (distinct de A) appartient à la tangente à $\mathscr{C}$ en A, alors :

$$\begin{aligned}2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)&=2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AO}\right)+2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)+2\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{AB}\right)\left[2\pi\right],\\&=\pi+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)+2\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{AB}\right)\left[2\pi\right],\\&=\pi+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)+2\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)\left[2\pi\right],\\&=\pi+\pi+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}\right)\left[2\pi\right].\end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne vient du fait que la somme des mesures d'un triangle vaut π radians modulo 2π.

$[\Leftarrow]$Soit T (distinct de A) vérifiant $2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\left[2\pi\right]$. Soit T_0 (distinct de A) un point de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
Si $T=T_0$, alors T est sur la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
Sinon, T_0 vérifie l'égalité $2\left(\overrightarrow{AT_0},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\left[2\pi\right]$. Par suite, il vient $2\left(\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{AT_0},\overrightarrow{AB}\right)\right)=0\left[2\pi\right]$, *i.e.* $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AT_0}\right)=0\left[\pi\right]$. Ainsi, A, T, T_0 sont alignés, donc T appartient à la tangente à $\mathscr{C}$ en A. □

III COCYCLICITE.

Théorème 2 :

Soit *A, B, C* et *D* quatre points distincts du plan.
A, B, C et *D* sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\left[\pi\right]$.

Démonstration :

Si *A, B, C* et *D* sont alignés, alors $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\left[\pi\right]$.
Si *A, B, C* et *D* sont cocycliques, alors d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\begin{cases}2\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\left[2\pi\right],\\2\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\left[2\pi\right].\end{cases}$$

D'où $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\left[\pi\right]$.

Réciproquement, si $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\left[\pi\right]$, alors deux cas se présentent :

- $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)=0\left[\pi\right]$ et *A, B, C* et *D* sont alignés.
- $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\neq 0\left[\pi\right]$.

Soit $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}'$) le cercle circonscrit au triangle ABC (resp. ABD).
Soit T (resp. T') (distincts de A) un point de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ (resp. au cercle $\mathscr{C}'$) au point A.
Alors $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[\pi]$ et $\left(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)[\pi]$ et il vient donc $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}\right)[\pi]$. Par suite, $(AT)=(AT')$. La droite (AT) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ et au cercle $\mathscr{C}'$ au point A. Ces deux cercles sont donc confondus, et D est un point du cercle $\mathscr{C}$. □

Dans la suite, pour A et B deux points distincts du plan fixés et $\theta \in \mathbb{R}$, nous noterons :

$$E_\theta = \left\{M \in \mathscr{P}\setminus\{A,B\} \text{ tel que} \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\theta\ [\pi]\right\},$$

$$E'_\theta = \left\{M \in \mathscr{P}\setminus\{A,B\} \text{ tel que} \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\theta\ [2\pi]\right\}.$$

IV DETERMINATION DE E_θ :

Théorème 3 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

-*i*- Si $\theta = 0[\pi]$, alors $E_\theta = (AB)\setminus\{A,B\}$.

-*ii*- Si $\theta \neq 0[\pi]$, alors E_θ est le cercle passant par A et B, privé des points A et B, tangent à la droite (AT) en A, où T est un point du plan défini par $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\theta\ [\pi]$.

Démonstration :

-*i*- Trivial.

-*ii*- Si $\theta \neq 0[\pi]$, alors le cercle défini précédemment existe bien et est unique. En effet, soit T un point du plan (distinct de A) tel que $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\theta\ [\pi]$. Si T appartient à la tangente à un cercle en A, alors le centre O de ce cercle appartient à la perpendiculaire à (AT) en A. Et O appartient à la médiatrice de $[AB]$, donc O est défini de manière unique. Par suite, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon OA.

Soit $M \in \mathscr{C}\setminus\{A,B\}$. Alors, par le théorème de l'angle inscrit, $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$ et $2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$ et il vient donc $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)[\pi]$ et $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\theta\ [\pi]$. Ainsi, $\mathscr{C}\setminus\{A,B\}\subset E_\theta$.

Réciproquement, si $N \in \mathscr{P}$ (distinct de A et B) satisfait $\left(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB}\right)=\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)[\pi]$, alors d'après le théorème de cocyclicité, $N \in \mathscr{C}\setminus\{A,B\}$. D'où $E_\theta = \mathscr{C}\setminus\{A,B\}$. □

V DETERMINATION DE E'_θ.

Théorème 4 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

-*i*- Si $\theta = 0\left[2\pi\right]$, alors $E'_\theta = (AB)\setminus[AB]$.

-*ii*- Si $\theta = \pi\left[2\pi\right]$, alors $E'_\theta =]AB[$.

-*iii*- Si $\theta \neq 0\left[\pi\right]$, soit *T* un point du plan (distinct de *A* et *B*) tel que $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\theta\left[2\pi\right]$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par *A* et *B*, tangent à la droite (AT) en *A*. Alors E'_θ est l'arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de *A* et *B*, contenu dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas *T*.

Démonstration :

-*i*- et -*ii*- Trivial.

-*iii*- Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0\left[\pi\right]$.

Nous avons alors les équivalences suivantes, compte tenu que $\sin(\theta)\neq 0$:

$$M \in E'_\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\theta\left[\pi\right], \\ \sin\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\sin(\theta)>0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in E_\theta, & (1) \\ \sin\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\sin(\theta)>0. & (2) \end{cases}$$

Plaçons-nous dans un repère orthonormé direct du plan $\left(I,\vec{i},\vec{j}\right)$ construit comme suit : *I* est le milieu du segment $[AB]$, $\vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ et $\vec{j}$ tel que $\left(I,\vec{i},\vec{j}\right)$ soit direct. Alors le signe de $\sin\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ est donné par le signe de $\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ (cela vient de la formule suivante : $\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=MA\cdot MB\cdot\sin\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$).

De plus, dans ce repère, les coordonnées de *A* et de *B* sont respectivement de la forme $\begin{pmatrix}-\alpha\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$, où $\alpha\in\mathbb{R}$ et notons $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

D'où $\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=2\alpha y$.

Ainsi, si $y>0$, alors $\sin\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)>0$ et si $y<0$, alors $\sin\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)<0$ ($y\neq 0$ par hypothèse).

La condition (2) définit l'un des demi-plans de frontière la droite (AB).

De plus, par la condition (1), nous obtenons que E'_θ est l'un des deux arcs $\overset{\frown}{AB}$ privé des points *A* et *B*.

Il reste à montrer que si T un point du plan (distinct de A et B) tel que $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\theta\,[2\pi]$, alors E'_θ est l'arc $\widehat{AB}$ privé des points A et B contenu dans le demi-plan de frontière la droite (AB) ne contenant pas T.

Soit $T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ un tel point. Alors, nous avons : $\det\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=-2\alpha y'$.

D'où $\det\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\sin(\theta)<0$, et ainsi, le point T n'appartient pas au demi-plan défini par la condition (2). □

Définition1 :

E'_θ est appelé arc capable associé à l'angle θ modulo 2π et au bipoint (A, B).

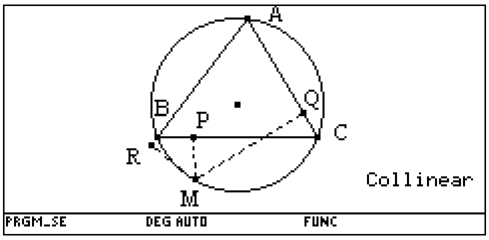
VI APPLICATIONS.

A) DROITE DE SIMPSON.

Théorème 5 : Droite de Simpson.

Soit A, B et C trois points du plan et soit $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. Soit M un point du plan. Nous notons P (resp. Q, R) le projeté de M sur la droite (BC) (resp. (CA), (AB)). Alors $M\in\mathscr{C}$ si et seulement si P, Q et R sont alignés.

Le dessin fait avec l'application Cabri-Géomètre de la T.I. voyage 200. Elle répond que les trois points P, Q et R sont alignés pour $M\in\mathscr{C}$.



Démonstration :

- Si $M\in\{A,B,C\}$ l'équivalence est claire.
- Si $M\notin\{A,B,C\}$. Les points M, Q, C et P sont cocycliques, car P et Q appartiennent au cercle de diamètre $[MC]$. De même, M, A, R et Q sont cocycliques.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QR}\right)&=\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{MQ}\right)+\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{QR}\right)[\pi],\\&=\left(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AR}\right)[\pi],\\&=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BA}\right)[\pi],\\&=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BA}\right)[\pi],\\&=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)[\pi].\end{aligned}$$

Ainsi, P, Q et R sont alignés $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QR}\right)=0[\pi]$,

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)[\pi]$,

$\Leftrightarrow$ M, A, B et C sont cocycliques,

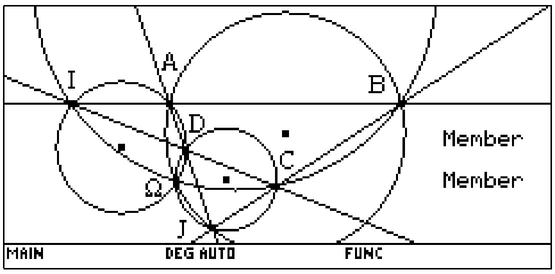
$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC) □

B) POINT DE MIQUEL D'UN QUADRILATERE COMPLET.

Théorème 6 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère. Nous supposons que les droites (AB) et (CD) se coupent en I, que les droites (AD) et (BD) se coupent en J, et que tous les points A, B, C, D, I, J sont distincts. Les cercles circonscrits aux triangles IAD, IBC, JAB et JCD passent alors par un même point Ω appelé point de Miquel du quadrilatère $ABCD$.

De nouveau Cabri-géomètre sur la T.I. Voyage 200. Pour construire les différents cercles, nous pouvons utiliser une macro en donnant comme objets initiaux : les points I, A et D par exemple, et en objets finaux le centre du cercle et le cercle passant par I. Pour construire le centre du cercle, utiliser « Perpendicular bissector » plutôt que passer par le milieu (« Midpoint »), puis « Perpendicular line », car dans ce dernier cas, la macro ne marche pas. J'ignore pourquoi, alors si quelqu'un a une explication, merci de m'en faire part !!



Il apparaît qu'effectivement les quatre arcs se coupent en un point Ω. En utilisant l'option « Member », il est possible de voir que le point d'intersection de deux des cercles, Ω, appartient aux deux autres, comme il est vu sur la figure. Il ne reste plus qu'à le démontrer…

Démonstration :

Les cercles $\mathcal{C}_{IAD}$ et $\mathcal{C}_{JCD}$ se coupent en deux points distincts Ω et D. Dans le cas contraire, ils seraient tangents en D et en notant T la tangente commune :

$$\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CJ}\right)=\left(T,\overrightarrow{DJ}\right)=\left(T,\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IA}\right)[\pi],$$

d'où le parallélisme entre (CJ) et (IA), ce qui est impossible car ces droites doivent se couper en B.

Les égalités précédentes, symétriques, se déduisent du -*i*- et du -*ii*- du théorème de l'angle inscrit.

Montrons que $\Omega \in \mathcal{C}_{IBC}$: si $\Omega = I$ ou C, c'est bon. Sinon, par les deux cocyclicités précédemment évoqués, nous avons, modulo π :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega C}\right)&=\left(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega D}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C}\right),\\&=\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JC}\right),\\&=\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{JC}\right)=\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC}\right).\end{aligned}$$

De même, $\Omega \in \mathcal{C}_{JAB}$: si $\Omega = J$ ou A, c'est bon. Sinon :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega C}\right)&=\left(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega D}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C}\right),\\&=\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JC}\right),\\&=\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{JC}\right)=\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC}\right).\end{aligned}$$

Le point Ω appartient donc aux quatre cercles de l'énoncé. En fait :

$\mathcal{C}_{IAD}\cap\mathcal{C}_{IBC}\cap\mathcal{C}_{JCD}\cap\mathcal{C}_{JAB}=\{\Omega\}$.

En effet, dans le cas contraire, soit K différent de Ω et appartenant aux quatre cercles. L'égalité $\mathcal{C}_{IAD}\cap\mathcal{C}_{JCD}=\{\Omega,D\}$ montre que $K = D$, mais alors D appartiendrait à $\mathcal{C}_{IBC}$ et la droite (IDC) couperait le cercle $\mathcal{C}_{IBC}$ en trois points distincts, ce qui est absurde. □

VII CONCLUSION.

Des théorèmes précédents, celui sur la cocyclicité permet de déterminer géométriquement l'appartenance à un même cercle de quatre points distincts (sinon, quel intérêt ?). Il existe cependant une vision analytique qui n'a pas été évoquée ici.

Guesmi.B