Systèmes de deux équations à deux inconnues.

1. Généralités.

1.1. Equation à deux inconnues du premier degré

Définition: Soient a, b et c trois nombres réels donnés. Une équation du type $ax+by=c$, ou s'y ramenant, est une équation à deux inconnues du premier degré

Exemple: $3x+7y=5$ est une équation à deux inconnues du premier degré.

Définition: On appelle solution d'une équation à deux inconnues du premier degré du type $ax+by=c$ tout couple (x;y) tel que l'égalité soit vraie.

Exemple: $(3;5)$ n'est pas un couple solution de $3x+7y=5$, car $3\times 3+7\times 5=9+35=44\neq 5$.

Par contre, le couple $(4;-1)$ est solution de $3x+7y=5$, car $3\times 4+7\times(-1)=12-7=5$.

1.2. Système de deux équations à deux inconnues du premier degré.

Définition: On appelle système de deux équations à deux inconnues du premier degré la donnée simultanée de deux équations à deux inconnues du premier degré.

Exemple : $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -4x+3y=7 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues du premier degré.

Définition: Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples, si ils existent pour lesquels les deux égalités soient vraies simultanément.

Nota Bene: En classe de troisième, on supposera systématiquement que les systèmes résolus sont des « bons systèmes » admettant toujours une unique solution.

Méthode de résolution :

Le principe général est d'éliminer une inconnue pour se ramener à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

On distingue deux méthodes par le calcul et une graphique.

2. Résolution par substitution.

Principe : On exprime une des deux inconnues en fonction de l'autre à l'aide d'une des équations, et l'on substitue le résultat obtenu dans l'équation restante.

Exemple : $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 3y = 7 \end{cases}$.

Dans la première équation : y = 2x – 1.

Puis en substituant y dans la deuxième équation :

$$\begin{gathered} -4x+3(2x-1)=7 \\ -4x+6x-3=7 \\ 2x=10 \\ x=5 \end{gathered}$$

d'où, en reportant la valeur dans la première équation :

$$\begin{gathered} y=2\times 5-1 \\ y=9 \end{gathered}$$

Si un couple (x;y) est solution alors x=5 et y=9

Réciproquement su x=5 et y=9, alors:

$2\times 5 - 9 = 10 - 9 = 1$ et $-4\times 5 + 3\times 9 = -20 + 27 = 7$.

Le système $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 3y = 7 \end{cases}$ a pour unique solution le couple (5 ; 9).

Avantage de cette méthode :

Elle permet un calcul rapide lorsque l'on peut exprimer l'une des inconnues simplement en fonction de l'autre.

3. Résolution par combinaison.

Principe : On multiplie l'une ou les deux équations par des nombres convenablement choisis de manière à ce que l'une des inconnues disparaisse par addition membre à membre.

Exemple : $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$.

$\begin{cases} 15x-6y=12 \\ 4x+6y=26 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 15x+4x-6y+6y=12+26 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 19x=38 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ x=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 10-2y=4 \\ x=2 \end{cases}$
$\begin{cases} 2y=6 \\ x=2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases}$

Si un couple (x;y) est solution alors x=2 et y=3

Réciproquement si x=2 et y=3, alors:

$5\times 2-2\times 3=10-6=4$ et $2\times 2+3\times 3=4+9=13$

donc le système $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$ a pour unique solution (2;3)

4. Résolution par interprétation graphique.

Principe : On associe aux deux équations du système deux équations de deux droites. Le problème revient alors à chercher, s'il existe, le point d'intersection des deux droites. Les coordonnées de ce point constituent alors la solution du système.

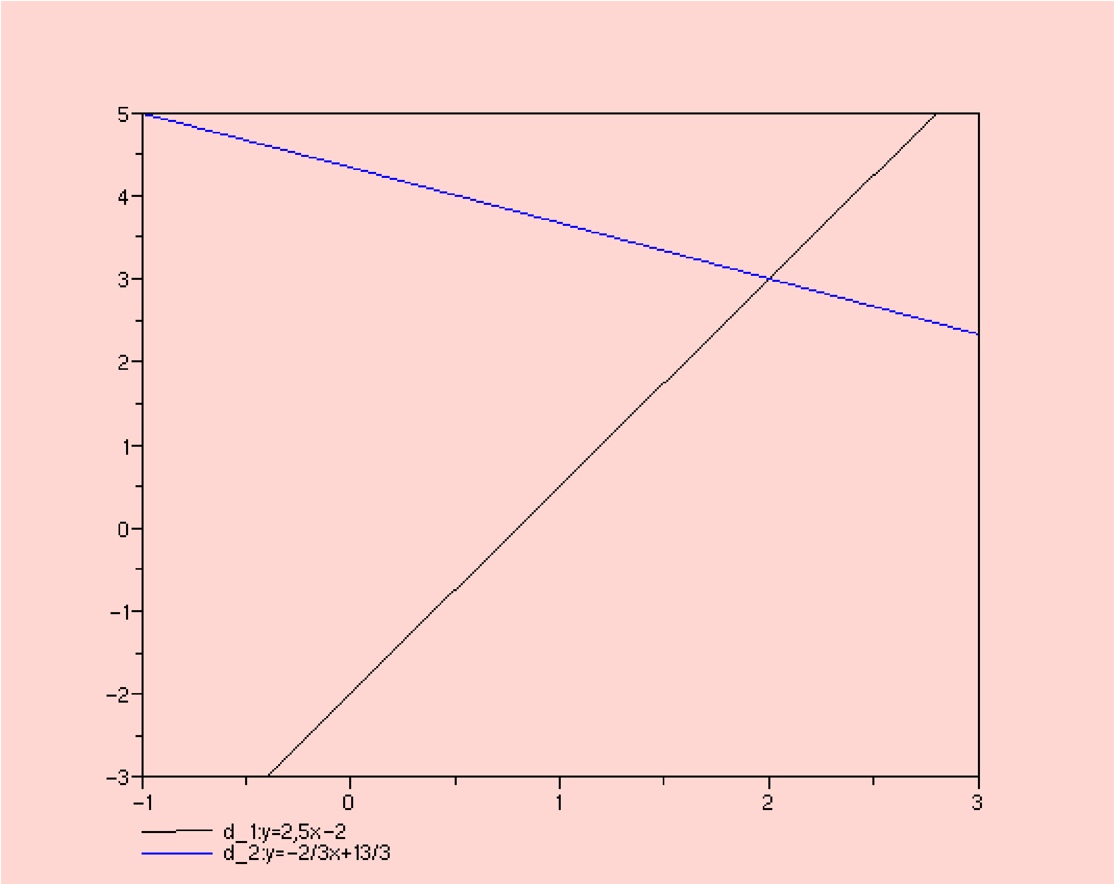
Intérêt : - Cela permet de contrôler les résultats obtenus par le calcul.

- Cela permet de prédire l'existence ou non de solution, en se souvenant que :

- Deux droites parallèles ont même coefficient directeur. Dans ce cas le système correspondant n'a pas de solution.
- Deux droites confondues ont la même équation. Dans ce cas le système correspondant admet une infinité de solution.
- Deux droites sécantes ont un seul point d'intersection : le système correspondant admet alors une unique solution.

Exemple : $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$ $\begin{array}{l} d_1 : y=2{,}5\ x-2 \\ d_2 : y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{13}{3} \end{array}$

Tracé des droites associées aux fonctions affines:



SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

, Exercices 6 et 7

I - L'ESSENTIEL DU COURS A MAÎTRISER PARFAITEMENT :

Peu de choses à maîtriser sur le plan du cours dans ce chapitre.

Ici encore c'est à travers les explications des méthodes et les résolutions détaillées des exemples et des exercices que l'on parvient à savoir faire.

Définition :

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues x et y, c'est chercher tous les couples (x,y) vérifiant les deux égalités données.

Règle: soient quatre nombres a, b, c, et d.

$$\left.\begin{array}{l} \text{si} \quad a = b \\ \text{et} \\ \text{si} \quad c = d \end{array}\right\} \quad \text{alors} \quad \left\{\begin{array}{l} a = b \\ \text{et} \\ a + c = b + d \end{array}\right.$$

MÉTHODE pour résoudre un système par substitution :

A/ On exprime x en fonction de y en l'extrayant de la première ou de la	**<u>Exemple:</u>**

seconde équation, c'est à dire celle qui paraît la plus simple.

B/ On reporte la valeur de x dans la seconde équation qui devient donc une équation du premier degré en y.

Remarque:

dans tous les cas, on peut choisir x ou y comme inconnue à substituer, mais c'est celle qui donne le calcul le plus simple qu'il vaut mieux prendre.

résoudre le système:

$$\begin{cases} 5\mathbf{x} + 2\mathbf{y} = 4 & (1) \\ 4\mathbf{x} - 3\mathbf{y} - 17 & (2) \end{cases}$$

Solution:

Transformer une des égalités (1) pour exprimer l'une des inconnues x ou y en fonction de l'autre:

(1) 5x + 2y = a d'où 2y = - 5x

$$\mathbf{y} = \frac{4 - 5\mathbf{x}}{2} \text{ (a)}$$

Remplacer, dans l'autre égalité (2) cette inconnue par l'expression (a) trouvée précédemment:

$$4\mathbf{x} - 3\mathbf{y} = 17 \qquad (2)$$

$$4\mathbf{x}3\left(\frac{4 - 5\mathbf{x}}{2}\right) = 17 \qquad (2')$$

Résoudre l'équation (2') à une inconnue ainsi obtenue:

$$4\mathbf{x} - 3\left(\frac{4 - 5\mathbf{x}}{2}\right) = 17$$

$$\frac{8\mathbf{x} - 12 - 15\mathbf{x}}{2} = \frac{34}{2}$$

$$23\mathbf{x} - 12 = 34$$

$$23\mathbf{x} = 46$$

$$\mathbf{x} = 2$$

Reporter la valeur ainsi trouver dans l'égalité (a):

	$y = \frac{4-5(2)}{2}$ d'où $y = \frac{4-10}{2} = -3.$ **Le couple (2 , - 3) est solution du système.**

Exercice 1 et 2 :

Résoudre par substitution les systèmes:

$A\begin{cases}4x \quad 2y - 14 \\ 3x + 5y = 4\end{cases}$	**Solution:** $A\begin{cases}4x - :4 = 2y \\ 3x + 5y = 4\end{cases}$ $\begin{cases}2x - 7 = y \\ 3x + 5(2x - 7; = 4\end{cases}$ $\begin{cases}2x - 7 = Y \\ 3x + 10x - 35 = 4\end{cases}$ $\begin{cases}2x - 7 = y \\ 13x = 39\end{cases}$ $\begin{cases}6 \quad 7 - y \\ x = 3\end{cases}$ $\begin{cases}Y = -1 \\ X = -3\end{cases}$ **La solution est: x = 3 et y = 1 ou (3 ; - 1)**
$B\begin{cases}5x + 3y = -4 \\ x - 9y = -20\end{cases}$	**Solution B :** $B\begin{cases}5x + 3y = -4 \\ x = 9y - 20\end{cases}$ $\begin{cases}5(9y - 20) + 3y = -4 \\ x = 9y - 20\end{cases}$ $\begin{cases}45y - 100 + 3y = -4 \\ x = 9y - 20\end{cases}$ $\begin{cases}48y = 96 \\ x = 9y - 20\end{cases}$ $\begin{cases}Y = 2 \\ X = 18 - 20 = -2\end{cases}$ **la solution est x = - 2 et y = 2 ou (- 2 ;2)**

MÉTHODE pour résoudre un système par addition ou combinaison.

On cherche à éliminer l'une des deux inconnues.	**<u>Exemple:</u>** **résoudre le système:** $7\mathbf{x}-4\mathbf{y}=5 \quad (1)$ $5\mathbf{x}+6\mathbf{y}=-2 \quad (2)$ **<u>Solution:</u>** **L'équation (1) : 7x - 4y = 5 sera remplacée par :** $5\times(7\mathbf{x}-4\mathbf{y})=5\times 5$ **et l'équation (2) : 5x + 6y = - 2 sera remplacée par :** $(-7)\times(5\mathbf{x}+6\mathbf{y})=(-7)\times(-2)$ **On obtient le système :** $\begin{cases}35\mathbf{x}-20\mathbf{y}=25\\ -35\mathbf{x}-42\mathbf{y}=14\end{cases}$ **On fait la somme des deux égalités membre à membre:** **35x - 20y - 35 - 42y = - 62 y ; 25+14 = 39** **La sommes des deux égalités donne donc:** $-62\mathbf{y}=39, \quad \textbf{d'où} \quad \mathbf{y}=-\dfrac{39}{62}.$

	En remplacant y par $-\frac{39}{62}$ dans l'une des équations données, par exemple dans (1), on obtient x $7x - 4y = 5$ $7x - 4(-\frac{39}{62}) = 5$ $7x = -\frac{156}{62}$ $7x = \frac{310 - 156}{62}$ $7x = \frac{154}{62}$ $x = \frac{1}{7} \times \frac{154}{62} = \frac{11}{31}$ **Il est aussi possible de multiplier la première égalité par 3 et la seconde par 2 pour éliminer y en sommant, puis résoudre l'équation ainsi trouvée.** **Le couple $(\frac{11}{31}, -\frac{39}{62})$ est solution du système**

EXERCICES 3 et 4

Résoudre par addition (ou combinaison) les systèmes suivants:

<table>
<tr>
<td>

$$A\begin{cases}3\mathbf{x} - 10\mathbf{y} = 3 \\ 2\mathbf{x} + 15\mathbf{y} = -2\end{cases}$$

</td>
<td>

<u>Solution: du système I</u>

A/ On multiplie la première équation par 2 et la seconde équation par (- 3) puis on additionne les deux équations obtenues membre à membre

On trouve alors y dont on reporte la valeur dans une équation pour trouver x.

$$\begin{cases}3\mathbf{x} - 10\mathbf{y} = -4 \\ 2\mathbf{x} + 15\mathbf{y} = 62\end{cases} \qquad \begin{cases}6\mathbf{x} - 20\mathbf{y} = 6 \\ -6\mathbf{x} - 45\mathbf{y} = 6\end{cases}$$

$$\begin{cases}-65\mathbf{y} = 12 \\ 3\mathbf{x} - 10\mathbf{y} = 3\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{y} = -\dfrac{12}{65} \\ 3\mathbf{x} - 10(-\dfrac{12}{65}) = 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{y} = -\dfrac{12}{65} \\ 3\mathbf{x} = 3 - \dfrac{10 \times 12}{65}\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{y} = -\dfrac{12}{65} \\ 3\mathbf{x} = \dfrac{39}{13} - \dfrac{2 \times 12}{13}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{y} = -\dfrac{12}{65} \\ \mathbf{x} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{15}{13}\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{y} = -\dfrac{12}{65} \\ \mathbf{x} = \dfrac{5}{13}.\end{cases}$$

La solution est $\mathbf{x} = \dfrac{5}{13}$ **et** $\mathbf{y} = -\dfrac{12}{65}$ **ou** $(\dfrac{5}{13}; -\dfrac{12}{65})$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$B\begin{cases}6\mathbf{x} + 1\mathbf{y} = 2 \\ 9\mathbf{x} + 14\mathbf{y} = -1\end{cases}$$

</td>
<td>

<u>Résolution du système B :</u>

B/ On multiplie la première équation par 3 et la seconde équation par (-2):

</td>
</tr>
</table>

	$\begin{cases} 6x + 21y = 2 \\ 9x + 14y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 18x + 63y = 6 \\ -18x - 28y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 35y = 8 \\ 6x + 21y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{8}{35} \\ 6x + 21y = 2 \end{cases}$ **On vient d'obtenir la valeur de y.** **On multiplie ensuite la première équation par 2 et la seconde équation par (-3):** **puis on additionne les deux équations membre à membre , on obtient ainsi - 15x = 7** $\begin{cases} 6x + 21y = 2 \\ 9x + 14y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 12x + 42y = 4 \\ -27x - 42y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -15x = 7 \\ y = \dfrac{8}{35} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\dfrac{7}{15} \\ y = \dfrac{8}{35} \end{cases}$ La solution est : $x = -\dfrac{7}{15}$ et $y = \dfrac{8}{35}$ ou $(-\dfrac{7}{15};\dfrac{8}{35})$

Résoudre un système graphiquement.

MÉTHODE **A/ Transformer chaque équation pour l'écrire sous la forme y = ax + b.** **B/ Représenter graphiquement les droites D1 et D2 ainsi définies.** **C/ Lire les coordonnées de leur point d'intersection (cf chapitre "équation de droite").**	**<u>Exemple:</u>** **Résoudre le système:** $\begin{cases} 3x - y = 13 \\ 4x + 5y = -8 \end{cases}$ **<u>Solution:</u>**

	les équations $\begin{cases} 3x - y = 13 \\ 4x + 5y = -8 \end{cases}$

s'écrivent aussi

$\begin{cases} -y = -3x + 13 \\ 5y = -4x - 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 3x - 13 \\ y = -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5} \end{cases}$

Les points de coordonnées (x ; y) tels que y = 3x - 13 sont les points d'une droite D1.

Pour tracer cette droite, cherchons deux points:

Déterminons par exemple les points d'abscisses 2 et 4.

Si x = 2, y = - 7 A(2,-7)

Si x = 4, y = - 1 B(4;-1)

Plaçons ces deux points et traçons la droite (AB) ou D1.

Les points de coordonnées (x;y) tels que

$y = -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}$ sont les points

d'une droite D2.

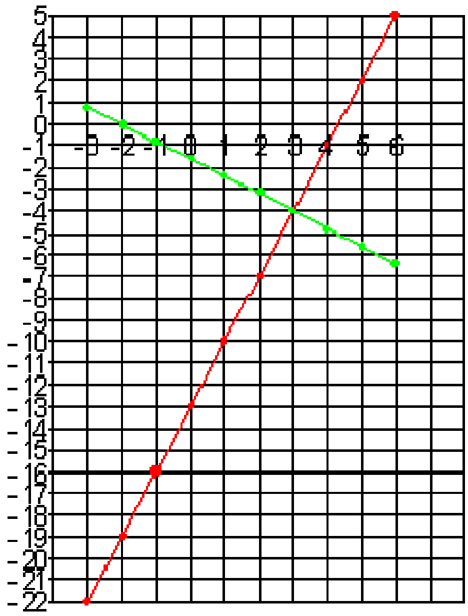
Pour tracer cette droite, cherchons deux points.

Déterminons par exemple les points d'abscisses -2 et 8.

Si x = - 2 , y = 0 , A (- 2 ; 0)

Si x = 8 , y = -8 , B (8 ; - 8).

Plaçons ces deux points et traçons la droite (EF) ou D2.



Le point d'intersection de D1 et D2 est le point C de coordonnées (3 ; - 4).

ON LE LIT SUR LE GRAPHIQUE.

Ces coordonnées vérifient les équations des deux droites et sont donc solution du système d'équations.

Remarque:

On aurait pu déterminer d'autres points des droites D1 et D2 en choisissant d'autres valeurs de x. On choisit en général des valeurs de x qui permettent un calcul facile de y.

EXERCICE 6 ET 7

Résoudre graphiquement les systèmes suivants:

$$A\begin{cases}3x - y = -8\\ 2x + 3y = 2\end{cases}$$

Solution : A/

$$\text{Les équations}\begin{cases}3x - Y = -8\\ 2x + 3y = 2\end{cases}$$

$$\text{s'écrivent aussi}\begin{cases}y = 3x + 8\\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\end{cases}$$

Les points de coordonnées (x ; y) tels que y = 3x + 8 sont les points d'une droite D1.

Pour tracer cette droite, cherchons deux points:

Si x = 0 , y = 8

Si x = - 3 , y = - 1 .

Les points A (0 ;8) et B (- 3 ; - 1) sont deux points de D1.

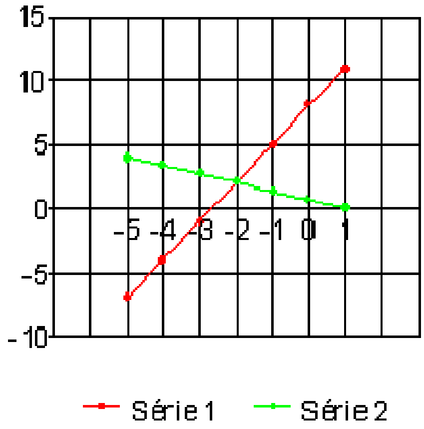
Les points de coordonnées $(x; y)$ tels que $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ sont les points d'une droite D2.

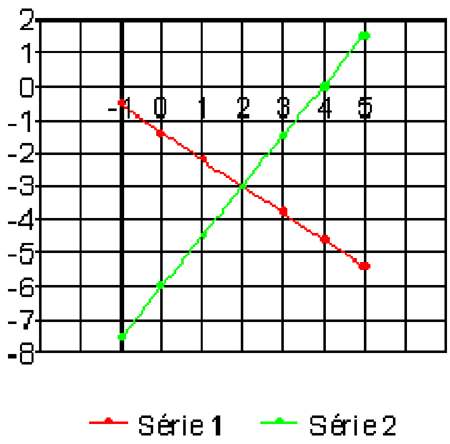
Prout tracer cette droite, cherchons deux points:

si x = 1 , y = 0

si x = 4, y = - 2

Les points E (1 ,0) et F (4 ; -2) sont des points de D2.

	 **Le point d'intersection de D1 et D2 a pour coordonnées (- 2 ;2) donc la solution est x = -2 et y = 2 .**
B $\begin{cases} 4x + 5y = -7 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$	**Solution du système B/ :** Les équations $\begin{cases} 4x + 5y = -7 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$ s'écrivent aussi $\begin{cases} y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5} \\ y = \frac{3}{2}x - 6 \end{cases}$ **Pour représenter les droites D1 et D2 d'équations respectives :** $y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$ et $y = \frac{3}{2}x - 6.$ **Cherchons deux points pour chaque droite.** **Les points A (2 ; -3) et B (- 3 ; 1) sont des points de D1.** **Les points E (0 ; - 6) et F (4 ; 0) sont des points de D2.**



le point d’intersection de D1 et D2 a pour coordonnées (2 ;- 3),

la solution est donc: x = 2 et y = - 3 .