Guesmi.B

Systèmes d'équations dans un zoo.

Exercice :

Pour passer l'hivers, le gardien du zoo a acheté pour ses camélidés des pantoufles pour leurs pattes et des bonnets pour leurs bosses.

Il n'a que des chameaux et des dromadaires, et il a acheté 19 bonnets et 24 paires de pantoufles.

Combien a-t-il de chameaux et combien de dromadaires ?

Correction de l'exercice :

Exercice :

Soit x le nombre de dromadaires et y le nombre de chameaux .

Il y a 19 bonnets et un chameau a 2 bosses : $x+2y=19$

Il y a 24 paires de pantoufles, chaque camélidé a 4 pattes donc 2 paires de pantoufles : $x+y=12$

On est amené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x+2y=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ (x+2y)-(x+y)=19-12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x+2y-x-y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7 = 12 \\ \quad y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 - 7 \\ \quad y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$$

Conclusion : il y a 5 dromadaires et 7 chameaux .

1 Système de deux équations à deux inconnues

1.1 Equation à deux inconnues

$3x + 2y = 8$ est une équation a deux inconnues x et y.

Un couple de nombre (x ;y) est solution de cette équation si on a effectivement $3x + 2y = 8$.

Exemples :

(2 ;1) est une solution car $3 \times 2 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
(1 ;2) n'est pas solution car $3 \times 1 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$
(0 ;4) est aussi une solution car $3 \times 0 + 2 \times 4 = 8$

On peut ajouter, soustraire, multiplier, diviser par le même nombre chaque membre de l'équation. On obtient une équation dite équivalente qui a les mêmes solutions.

Exemples :

$3x + 2y = 8$ est équivalente à $3x = 8 - 2y$
$6x + 4y = 16$
$2y = 8 - 3x$
$x = \frac{8 - 2y}{3}$ On a exprimé x en fonction de y.
$y = \frac{8 - 3x}{2}$ ou $y = 4 - \frac{3}{2}x$ On a exprimé y en fonction de x

(on trouve ainsi une application affine de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$, d'ordonnée à l'origine 4).

Il existe donc une infinité de solutions a une équation à deux inconnues. A chaque choix de x correspond un y calculé par la formule $y = \frac{8 - 3x}{2}$

1.2 Système d'équations à deux inconnues

$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

Un couple de nombres est solution du système s'il est solution des deux équations à la fois.

Exemple :
(2 ;1) est une solution de $3x + 2y = 8$ mais pas de $x - 5y = 2$ car $2 - 5 \times 1 = -3$ donc (2 ;1) n'est pas une solution du système.

1.3 Résolution d'un système

Pour résoudre un système on peut utiliser des équations équivalentes.

<u>Méthode par substitution</u>

Dans l'une des deux équations on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre. On choisit l'équation et l'inconnue qui permettent de faire des calculs « simples ». Ici la deuxième inconnue, et x en fonction de y.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$

on remplace alors dans la première équation x par l'expression trouvée dans la seconde.

$$\begin{cases} 3\,(2 + 5y) + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$

On résout la première équation qui n'a plus qu'une seule inconnue.

$$\begin{cases} 3 \times 2 + 3 \times 5y + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \quad \begin{cases} 6 + 15y + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \quad \begin{cases} 6 + 17y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17y = 2 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{17} \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$

on remplace ensuite, dans la seconde équation, y par $\frac{2}{17}$

$$\begin{cases} y = 2/17 \\ x = 2 + 5 \times \frac{2}{17} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{17} \\ x = 2 + 10/17 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{17} \\ x = \frac{44}{17} \end{cases}$$

On vérifie alors que $(\frac{44}{17} ; \frac{2}{17})$ est bien une solution des deux équations

$$2 \times \frac{44}{17} + 2 \times \frac{2}{17} = \frac{132}{17} + \frac{4}{17} = \frac{136}{17} = 8$$

$$\frac{44}{17} - 5 \times \frac{2}{17} = \frac{44}{17} - \frac{10}{17} = \frac{34}{17} = 2$$

On conclut par une phrase : $(\frac{44}{17} ; \frac{2}{17})$ est la solution du système.

Méthode par élimination

Souvent utilisée quand l'expression d'une inconnue en fonction d'une autre n'est pas «simple».

$\begin{cases} 5x + 7y = 17 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ On utilise des équations équivalentes pour que les coefficients de x(ou de y) soient les mêmes dans les deux équations. Ici on peut multiplier les membres de la première équation par 3 et ceux de la seconde par 5.

$\begin{cases} 15x + 21y = 51 \\ 15x + 10y = 40 \end{cases}$ On soustrait au premier membre de la première équation le premier membre de la seconde équation ; même chose avec le second membre. Ainsi on obtient une équation sans x. On utilise une des deux équations de départ pour conclure.

$\begin{cases} 11y = 11 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ 3x + 2 \times 1 = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ 3x = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

On vérifie :

$5 \times 2 + 7 \times 1 = 10 + 7 = 17$
$3 \times 2 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$

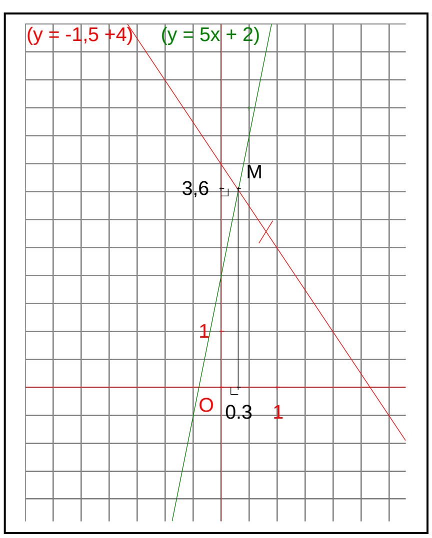
(2 ;1) est la solution du système.

1.4 Interprétation graphique

$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$ en exprimant y en fonction de x dans chacune des équations on obtient :

$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x + 4 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$ cela correspond à deux applications affines. Si l'on considère leurs représentations graphiques et la solution (x ;y) de ce système comme un point M (x ;y), M doit appartenir à la fois à la droite d'équation

$y = -\dfrac{3}{2}x + 4$ et à la droite d'équation $y = 5x + 2$. C'est donc leur intersection. On peut ainsi lire graphiquement une approximation de la solution du système.



Une solution <u>approximative</u> du système est (0.3 ;3.6)

Systèmes de deux équations à deux inconnues

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -x+2y=4 \end{array}\right.$$

Ce système est constitué de deux équations simultanées et deux inconnues x et y .

Méthodes algébriques de résolution :

Résoudre le système, c'est trouver toutes les solutions communes aux deux équations, c'est-à-dire trouver les couples $(x\,;\,y)$ pour lesquels les deux égalités sont vraies simultanément. Le principe général consiste à éliminer une inconnue pour se ramener à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

Par substitution

• On isole une des deux inconnues dans une des équations.
• On la remplace (substitue) par son expression dans l'autre équation.
• On détermine la valeur d'une des inconnues.
• On remplace celle-ci par sa valeur dans la première expression.
• On détermine la valeur de la seconde inconnue.

Exemple :

$$.\left\{\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ -3x+2y=4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \qquad \text{on a isolé } y \\ -3x+2y=4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \\ -3x+2(2x-1)=4 \quad \text{on a remplacé } y \text{ par sa valeur} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \\ -3x+4x-2=4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=2x-1 \\ x=6 \qquad \text{on a trouvé x} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=2\times 6-1 \quad \text{on a trouvé y} \\ x=6 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 11 \\ x = 6 \end{cases}$$

La solution est le couple $(6\,;\,11)$

Vérification

$2 \times 6 - 11$ est bien égal à 1
$(-3) \times 6 + 2 \times 11$ est bien égal à 4

*
* *

Par combinaison linéaire
• On multiplie les équations par des nombres choisis de manière à obtenir les coefficients égaux (ou opposés) dans chacune des deux équations pour une des deux inconnues.
• On soustrait (ou additionne) membre à membre les deux équations du système afin d'obtenir une équation à une seule inconnue.
• On détermine alors cette inconnue en résolvant cette équation.
• On détermine ensuite l'autre inconnue en reportant la valeur de la première inconnue dans une des équations de départ.

Exemple 1 :

$$.\begin{cases} 5x + 11y = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5x + 11y = 1 & \text{on multiplie cette équation par } 2 \\ 2x + 3y = 6 & \text{on multiplie cette équation par } 5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 10x + 22y = 2 & \text{on soustrait la première équation à la deuxième} \\ 10x + 15y = 30 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrcrcr} & 10\text{x} & + & 22\text{y} & = & 2 \\ - & 10\text{x} & + & 15\text{y} & = & 30 \\ \hline & & & 7\text{y} & = & -28 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-28}{7} & \text{on élimine ainsi les } x \text{ et on trouve } y \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ 2x + 3 \times (-4) = 6 & \text{on remplace } y \text{ par sa valeur} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ 2x = 18 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 9 \\ y = -4 \end{cases}$$

La solution est le couple $(9\,;\,-4)$

Vérification

$5 \times 9 - 11 \times 4$ est bien égal à 1

$2 \times 9 - 3 \times 4$ est bien égal à 6

Exemple 2 :

$$\begin{cases} 6x - 5y = 6 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} 6x - 5y = 6 \\ -3x + 2y = -5 \quad \text{on multiplie cette équation par 2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x - 5y = 6 \quad \text{on ajoute la première équation à la deuxième} \\ -6x + 4y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrcl} & 6x - 5y & = & 6 \\ + & -6x + 4y & = & -10 \\ \hline & -y & = & -4 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} -y = -4 \quad \text{on élimine ainsi les } x \text{ et on trouve } y \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 4 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 4 \\ -3x + 2 \times 4 = -5 \quad \text{on remplace } y \text{ par sa valeur} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 4 \\ -3x = -13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = 4 \end{cases}$$

La solution est le couple $(\frac{13}{3};4)$

Vérification

$6 \times \frac{13}{3} - 5 \times 4$ est bien égal à 6

$(-3)\times\frac{13}{3}+2\times4$ est bien égal à -5

Remarque
Lorsque l'un des coefficients est égal à 1 ou -1 on préfère prendre la méthode par substitution car elle simplifie les calculs mais dans le cas général c'est la méthode par combinaison qu'il faut utiliser.

Méthode et interprétation graphique :

Exemple :

$$\text{Résoudre graphiquement le système} \begin{cases} 2x-y=1 & (1) \\ -x+2y=4 & (2) \end{cases}$$

Le principe consiste à associer aux deux équations (1) et (2) les deux équations de droites suivantes :

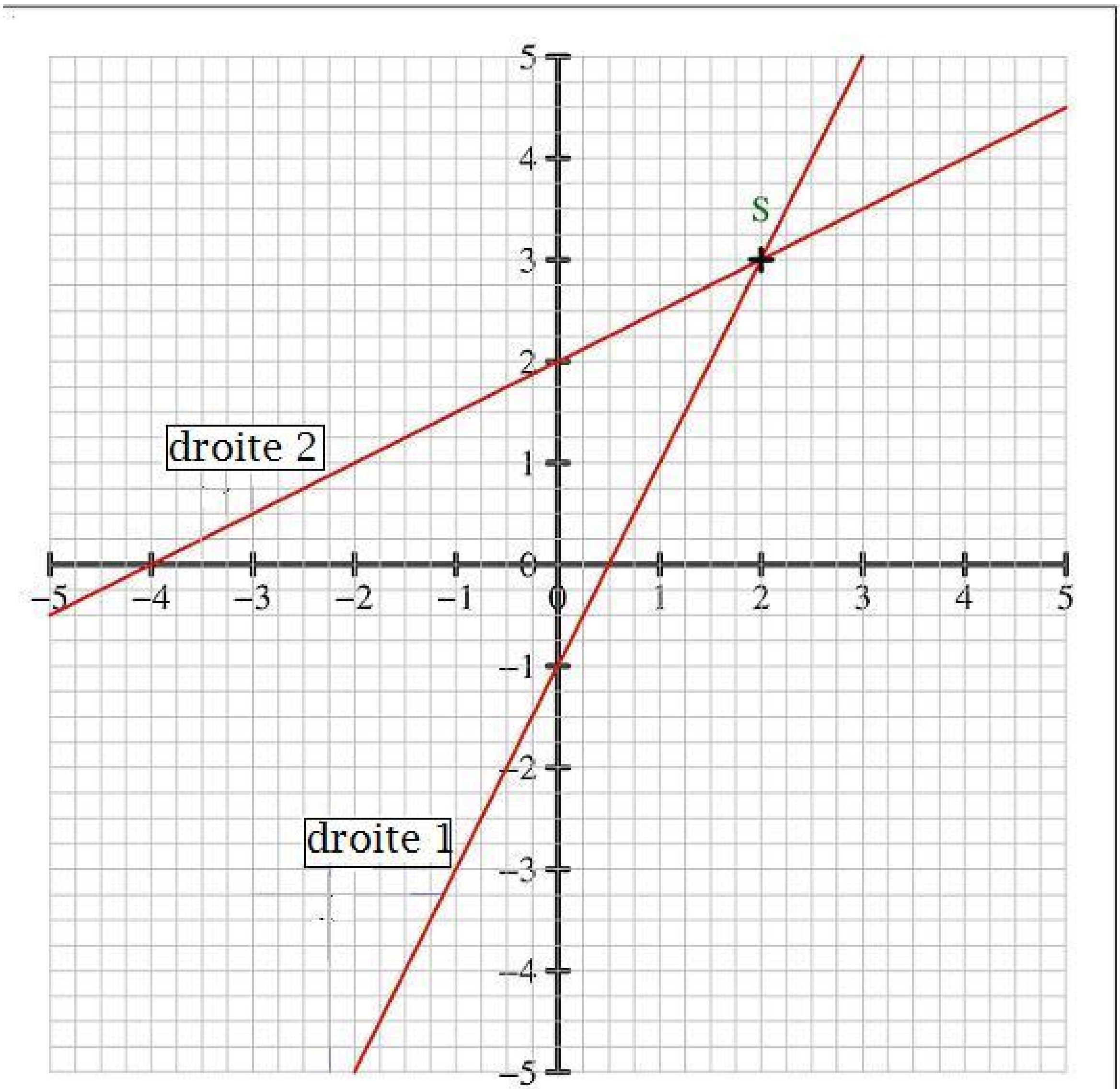
$y=2x-1$ et $y=\frac{1}{2}x+2$

Les deux droites sont sécantes car les coefficients directeurs ne sont pas égaux ($2\neq\frac{-1}{2}$).

Graphiquement, les coordonnées **(2;3)** de **l'unique point d'intersection** S des droites (1) et (2) constituent la **solution graphique** du système.

Commentaire :

Cette détermination graphique qui est **approximative** permet :
- de contrôler des résultats obtenus par calculs
- d'anticiper l'existence ou non de solution(s)
droites (1) et (2) sécantes : **1 solution**
droites (1) et (2) strictement parallèles : **0 solutions**
droites (1) et (2) confondues : **infinité de solutions**



droite 2
droite 1
S

Equation linéaire à deux inconnues

$2x + y = 4$ est une équation linéaire à deux inconnues x et y.

La résoudre, c'est rechercher tous les couples de solutions (x,y) qui vérifient l'équation $2x + y = 4$.

$(2, 3)$ n'est pas un couple solution car il ne vérifie pas l'équation : $2 \times 2 + 3 = 7 \neq 4$

$(1, 3)$, $(-2, 8)$ sont des couples solution : $2 \times 1 + 3 = 7$ et $2 \times (-2) + 8 = 7$

On dit que **deux équations sont équivalentes** si elles ont exactement les même solutions.

Si on multiplie, divise, additionne ou soustrait les deux membres d'une équation (E) par un même nombre non nul, on obtient une équation (E') équivalente à (E)

$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$ est un système linéaire à deux équations deux inconnues

Le résoudre, c'est rechercher tous les couples de solutions (x,y) qui vérifient **simultanément** les deux équations $2x + 3y = 8$ et $4x + y = 6$

$(1, 3)$ n'est pas un couple solution car il ne vérifie pas la première équation : $2 \times 1 + 3 \times 3 = 11 \neq 8$

$(2, -2)$ n'est pas une solution car il ne vérifie pas la première équation (il vérifie pourtant la seconde)

$(1, 2)$ est un couple solution : $2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$ **ET** $4 \times 1 + 2 = 6$

On dit que **deux systèmes sont équivalent** s'ils ont exactement les mêmes solutions.

Il existe des manipulations qui permettent de transformer un système (S) en un système (S') équivalent. Nous allons en étudier trois dans le paragraphe suivant

I Résolution d'un système

Les manipulations A, B et C présentées ci-dessous permettent de modifier un système sans en modifier ses solutions.

Manipulation A : modification d'une équation

On peut modifier un système sans en changer ses solutions en remplaçant une de ses équations par une équation équivalente :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

x = y – 1 est une équation équivalente à x – y = -1

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 0.5y = 1.5 \end{cases}$$

2x + 3y = 7 est une équation équivalente à $x + 0.5\,y = 1.5$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Manipulation B : substitution

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

On sait que x vaut $y - 1$, on remplace donc dans la première équation x par cette valeur : $y - 1$

$$\begin{cases} 2\,(y - 1) + y = 4 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

on peut maintenant terminer la résolution :

$$\begin{cases} 2y - 2 + y = 4 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 6 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (par substitution)}$$

$$\boxed{S = \{\, (1\,;2) \,\}}$$

Lorsque l'on résout un système en utilisant seulement la manipulation A et la manipulation B, on dit que l'on **résout le système par substitution**.

Manipulation C : combinaison linéaire

On peut remplacer une des deux équations d'un système par la somme (ou la différence) des deux équations du système. Il faut alors absolument garder l'autre équation.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

On remplace la seconde ligne par la différence des deux lignes du système et on garde la première.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ (\,2x + 3y\,) - (\,2x + y\,) = 7 - 3 \end{cases}$$

on peut maintenant terminer la résolution :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3 \times 2 = 7 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (par substitution)}$$

$$\begin{cases} x = 0.5 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \boxed{S = \{\, (0.5\,;2) \,\}}$$

Lorsque l'on résout un système en utilisant la manipulation C, on dit que l'on **résout le système par combinaisons linéaires**.

Quelle méthode utiliser ?

Vous êtes libre du choix à moins que l'énoncé impose la méthode à utiliser.

Ceci dit, je vous recommande la méthode par combinaisons linéaires car elle permet de limiter d'en beaucoup de cas les calculs avec des fractions.

III Interprétation graphique

Reprenons l'exemple du I : $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$

On peut écrire ce système sous la forme : $\begin{cases} y = 4 - 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$ (on a effectué une modification de type A)

On remarque que les deux équations sont écrites sous la forme d'équation de droite :
(d1) : $y = 4 - 2x$
(d2) : $y = x + 1$

Traçons ces deux droites :

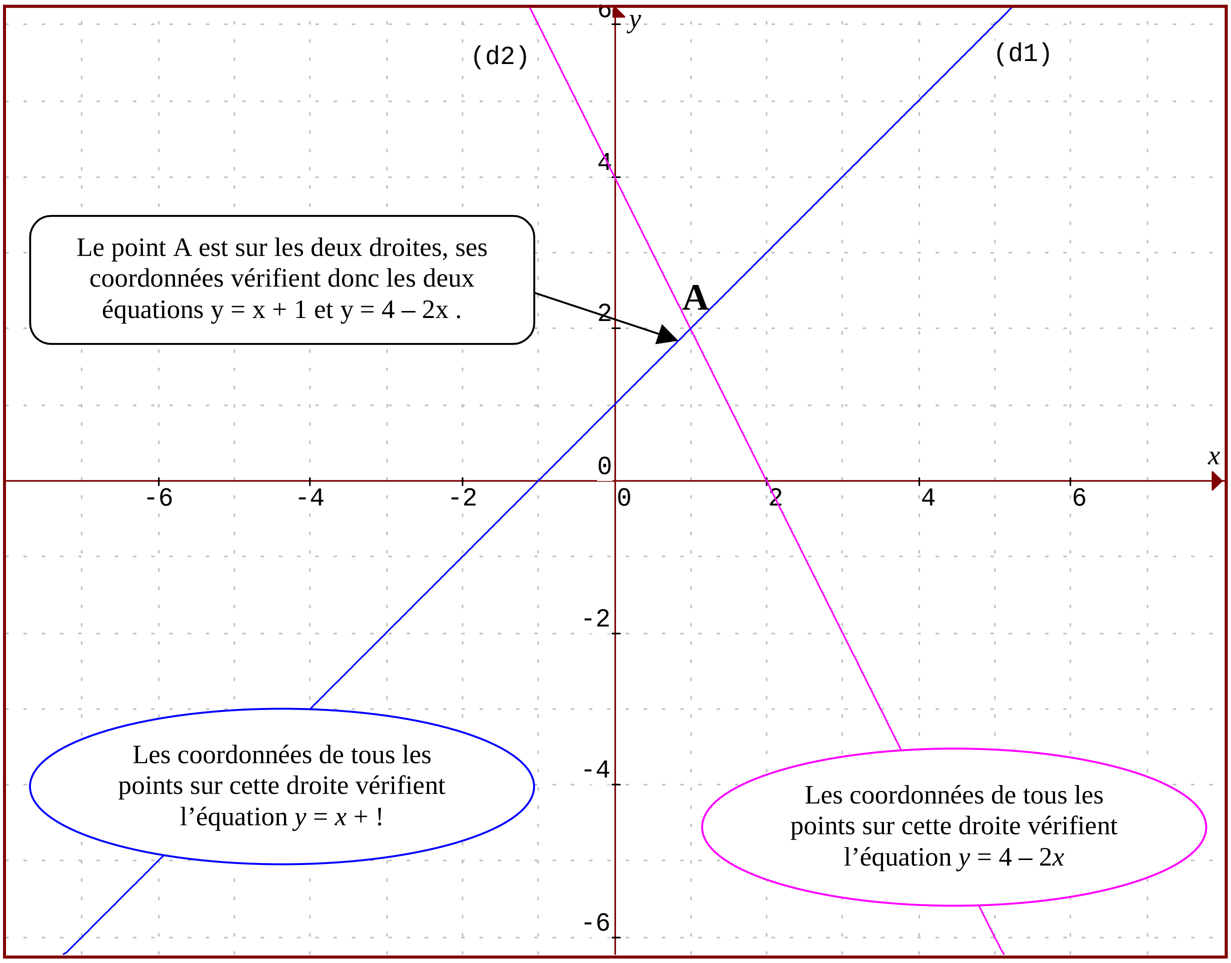
(d1) :

x	0	3
y	4	-2

(d2) :

x	0	4
y	1	5

Tableau de valeurs pour tracer la droite (d2)



Le couple de coordonnée (1 ; 2) point d'intersection des deux droites est donc solution du système.

Attention : il ne s'agit ici que d'une lecture graphique qui ne peut être une méthode valable pour obtenir les solutions exactes d'un système.

II Vérification, présentation

La résolution d'un système entraîne un nombre important de calculs. Il y a donc un grand risque que vous commettiez des erreurs d'étourderie. Pour minimiser ce risque vous ferez donc bien attention à vérifier votre résultat et à bien présenter votre résolution.

Vérification

Il est tout d'abord indispensable de toujours vérifier sa solution lors d'une résolution de système.

Reprenons un exemple du I : $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$ S = $\{ (1 ; 2) \}$

Vérifions : $2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4$ → pas de problème pour la première équation
$1 - 2 = -1$ → pas de problème pour la seconde équation

Conclusion : la solution trouvée est bonne

Remarque : cette vérification doit se faire sur votre brouillon, sauf si l'énoncé de l'exercice le demande.

Présentation

Si vous avez détecté une erreur il va donc falloir relire votre travail. Il est donc essentiel que celui-ci soit parfaitement présenté. D'autre part, une résolution de système non présentée correctement comme ci-dessous pourra ne pas être lue par un correcteur.

Méthode par substitution : il suffit juste d'indiquer le moment où vous effectuer la substitution.

Méthodes par combinaisons linéaires : il faut indiquer comme ci-dessous les opérations que vous effectuez sur les lignes.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & (L1) \\ x + 0.5y = 1.5 & (L2) \end{cases}$$

$$2 \times (L2) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 7 & (L1)' \\ 2x + y = 3 & (L2)' \end{cases}$$

$$(L1)' - (L2)' \quad \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3 \times 2 = 7 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{(par substitution)}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{ \left(\frac{1}{2} ; 2 \right) \right\}}$$

Définition 1 :

Un système de deux équations à deux inconnues est de la forme :
$\begin{cases} \boldsymbol{ax+by=c} \\ \boldsymbol{a'x+b'y=c'} \end{cases}$ **où a , b , c, a' , b' et c' sont des nombres relatifs ,**
les deux nombres inconnues sont désignés par les lettres $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$

Exemple :

$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x+4y=\ -1 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues. Les nombres x et y sont les inconnues.

Définition 2 :

a ,b , c, a' , b' , c' sont des nombres relatifs.
Résoudre un système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} \boldsymbol{ax+by=c} \\ \boldsymbol{a'x+b'y=c'} \end{cases}$
c'est trouver tous les couples de nombres $(\boldsymbol{x\,;y})$ qui sont à la fois solutions des deux équations

Exemple 1 :

Le couple (8 ; -2) est il une solution du système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x+5y=6 \\ 5x-3y=2 \end{cases}$

Si $x=8$ et $y=\ -2$ alors :

$2\times 8+5\times(-2)=\ 16-10=6$

donc le couple (8 ; -2) vérifie la **première équation**

$5\times 8-3\times(-2)=\ 40+6=46$ et $46\neq 2$

donc le couple (8 ; -2) ne vérifie pas la **deuxième équation**

Donc le couple (8 ; -2) n'est pas solution de ce système

Exemple 2 :

Le couple (9 ; 2) est il une solution du système d'équations suivant ?:

$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$

si $x = 9$ et $y = 2$ alors :

$2 \times 9 - 3 \times 2 = 18 - 6 = 12$ donc le couple de nombres (9 ; 2) vérifie la première équation

$9 + 2 \times 2 = 9 + 4 = 13$ donc le couple de nombres (9 ; 2) vérifie la deuxième équation

Le couple (9 ; 2) est bien solution de ce système

II) Méthode de résolution

1) Résolution par combinaison

Résoudre par la méthode de combinaison le système $\begin{cases} \mathbf{4}x + 3y = 2 \\ \mathbf{6}x + 7y = 13 \end{cases}$

a) On repère les coefficients devant une des deux inconnues, par exemple ceux de x, et on détermine un de leurs multiples communs non nuls :

12 est un multiple commun de 4 et 6

b) On rend égaux les coefficients devant l'inconnue choisie :

(dans notre cas, on rend égaux les coefficients devant x)

Pour avoir 12 comme coefficient devant les termes en x

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 & \textit{On multiplie par 3 cette ligne} \\ 6x + 7y = 13. & \textit{On multiplie par 2 cette ligne} \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} \mathbf{12}x + 9y = 6 \\ \mathbf{12}x + 14y = 26 \end{cases}$

c) On soustrait les égalités membre à membre et on résout l'équation obtenue :

$(12x - 12x) + (9y - 14y) = 6 - 26$

$0 - 5y = -20$

$-5y = -20$

$y = -20 \div -5 = 4$

$\boldsymbol{y = 4}$

d) On détermine la valeur de l'autre inconnue en remplaçant la valeur trouvée dans une des deux équations :

En remplaçant $y = 4$ dans la première équation obtient :

$4x + 3 \times 4 = 2$ ce qui donne : $4x + 12 = 2$

$4x = 2 - 12$

$4x = -10$

Soit $x = -\frac{10}{4}$

$\boldsymbol{x = -2,5}$

Le couple (- 2,5 ; 4) est solution du système

e) On vérifie si le couple trouvé est une solution du système de départ

$4 \times (-2,5) + 3 \times 4 = -10 + 12 = 2$ et

$6 \times (-2,5) + 7 \times 4 = -15 + 28 = 13$

6) Conclusion :

Le système possède une unique solution le couple de nombres : (-2,5 ; 4)

2) Résolution par substitution du système

Résoudre par la méthode de substitution le système : $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$

a) On exprime une des inconnues en fonction de l'autre

On choisit l'équation et l'inconnue afin d'avoir les calculs les plus simples.

Dans ce système, le plus simple et d'exprimer $\boldsymbol{y}$ **en fonction de** $\boldsymbol{x}$ de la première équation : $3x + y = 1$ et on obtient :

$\boldsymbol{y = 1 - 3x}$

b) On remplace cette inconnue par sa nouvelle expression dans l'autre équation:

On remplace y par l'expression $1 - 3x$ dans la deuxième équation :

$2x + 3(1 - 3x) = -4$

$2x + 3 - 9x = -4$

$-7x + 3 = -4$

$-7x = -4 - 3 = -7$

$-7x = -7$

$x = \frac{-7}{-7} = 1$ donc

$\boldsymbol{x = 1}$

c) On détermine la valeur de l'autre inconnue

On sait que $\boldsymbol{y = 1 - 3x}$ **.** Il suffit de remplacer x par 1 dans cette expression

On obtient : $\boldsymbol{y = 1 - 3 = -2}$

$\boldsymbol{y = -2}$

d) On vérifie si le couple trouvé est bien solution du système

$3 \times 1 + (-2) = 3 - 2 = 1$ et

$2 \times 1 + 3 \times (-2) = 2 - 6 = -4$

e) Conclusion :

Le couple (1 ; - 2) est solution de ce système

III) Méthode graphique :

Soit le système : $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

1) On exprime y en fonction de x dans les deux équations

on obtient un nouveau système qui a les mêmes solutions que le système de départ :

$6x - 3y = 9$ On a donc : $-3y = 9 - 6x$ soit $y = \frac{-6}{-3}x + \frac{9}{-3}$ on obtient donc : $y = 2x - 3$

$2x + y = 5$ On a donc $y = -2x + 5$. On obtient le système :

$\begin{cases} \boldsymbol{y = 2x - 3 \quad (1)} \\ \boldsymbol{y = -2x + 5 \quad (2)} \end{cases}$

2) Dans un repère, on représente graphiquement les fonctions affines associées au système

• La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 2x - 3$ est une droite d'équation $y = 2x - 3$ (qui est l'équation (1) du système).On notera cette droite (d1)

Si $\boldsymbol{x = 1}$ alors $y = 2 - 3 = \boldsymbol{-1}$ et si $\boldsymbol{x = 0}$ alors $\boldsymbol{y = -3}$

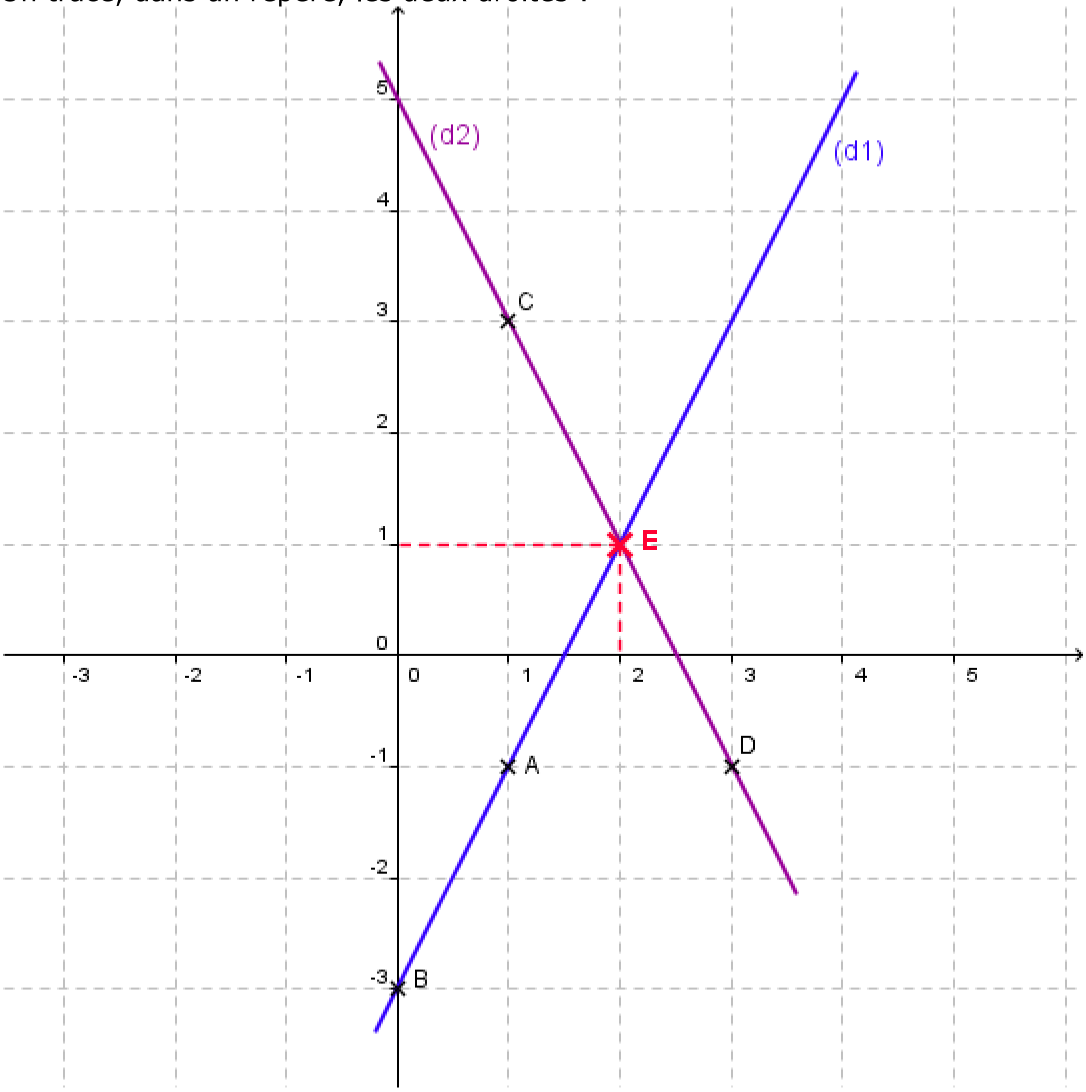
La droite (d1) passe par les points **A (1 ; -1)** et **B (0 ; -3)**

• La représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto -2x + 5$ est une droite d'équation $y = -2x + 5$ (qui est l'équation (2) du système).On notera cette droite (d2)

Si $\boldsymbol{x = 1}$ alors $y = -2 + 5 = \boldsymbol{3}$ et si $\boldsymbol{x = 3}$ alors $\boldsymbol{y} = -2 \times 3 + 5 = -6 + 5 = \boldsymbol{-1}$

La droite (d2) passe par les points **C (1 ; 3)** et **B (3 ; -1)**

On trace, dans un repère, les deux droites :



3) On lit les coordonnées du point d'intersection des droites (d1) et (d2)

Les coordonnées du point d'intersection E des deux droites sont : (2 ; 1)

Le couple (2 ; 1) est solution de ce système

4) On vérifie si le couple trouvé est bien solution du système

$6 \times 2 - 3 \times 1 = 12 - 3 = 9$ et

$2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Le couple (2 ; 1) est bien solution du système : $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Remarque :

Une lecture graphique conduit souvent à une solution approchée du système (coordonnées non entière, imprécision des tracés etc..).

Il faut donc toujours vérifier les résultats de la lecture graphique par le calcul.