I Suites Arithmétiques

1. Définition

Définition :

Une suite (u_n) est arithmétique si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
r est appelé **raison** de la suite.

2. Calcul de u_n

Théorème :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous les entiers naturels n et p, on a :
$u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_p + (n - p)\,r$.

Démonstration :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r. Donc, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = u_{n-1} + r$
$u_{n-1} = u_{n-2} + r$
...
$u_2 = u_1 + r$
$u_1 = u_0 + r$
En additionnant ces n égalités membre à membre, on obtient :
$u_n + u_{n-1} + \ldots + u_2 + u_1 = u_{n-1} + r + u_{n-2} + r + \ldots + u_1 + r + + u_0 + r$
soit : $u_n = u_0 + nr$

(u_n) est une suite arithmétique de raison r. Donc, pour tous entiers naturels n et p, on a :
$u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$
En soustrayant ces deux égalités, on obtient : $u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr$
soit : $u_n = u_p + (n - p)r$

Remarques :

- La première formule n'est qu'un cas particulier de la seconde.
- Si $u_n = an + b$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

3. Somme des n premiers termes

Cas particulier :

La somme des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Démonstration :

Soit S la somme des n premiers entiers naturels non nuls, $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n$.
Sur une première ligne, écrivons la somme dans l'ordre croissant, puis sur une deuxième ligne, la somme dans l'ordre décroissant :

En sommant ces deux égalités, on obtient :
$2S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \ldots + (n - 2 + 3) + (n - 1 + 2) + (n + 1)$
soit $2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) + (n + 1) + (n + 1)$
donc : $2S = n(n + 1)$
D'où : $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Théorème :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0,
alors pour tout entier n : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n\dfrac{u_0 + u_{n-1}}{2} = n\dfrac{2u_0 + r(n-1)}{2}$

S est appelée la somme des n premiers termes de la suite (u_n). Elle est égale au produit du nombre de termes par la demi-somme des termes extrêmes.

Démonstration :

Les n premiers termes de la suite arithmétique (u_n) sont u_0; $u_1 = u_0 + r$; $u_2 = u_0 + 2r$; ...; $u_{n-3} = u_0 + (n - 3)r$; $u_{n-2} = u_0 + (n - 2)r$ et $u_{n-1} = u_0 + (n - 1)r$. Donc :

$S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1}$

$S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + ... + (u_0 + (n - 3)r) + (u_0 + (n - 2)r) + (u_0 + (n - 1)r)$

$S = nu_0 + r + 2r + ... + (n - 3)r + (n - 2)r + (n - 1)r$

$S = nu_0 + r[1 + 2 + ... + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1)]$

Or, on a vu que $1 + 2 + ... + (n - 2) + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$. Donc :

II. Suites géométriques

1. Définition

Définition :

Une suite (u_n) est géométrique si il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q\, u_n$.
q est appelé **raison** de la suite.

2. Calcul de u_n

Théorème :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tous les entiers naturels n et p :
$u_n = u_0\, q^n$ et $u_n = u_p\, q^{n-p}$

Démonstration :

Remarques :

- la première formule n'est qu'un cas particulier de la seconde;
- si $u_n = b\, a^n$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

3. Somme des n premiers termes

Cas particulier :

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) et de premier terme 1 est égale à $1 + q + ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Démonstration :

Soit S la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$), $S = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1}$.

Donc : $qS = q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$

Donc : $qS = S - 1 + q^n$

Donc : $(1 - q)S = 1 - q^n$

Or, $q \neq 1$, donc $1 - q \neq 0$.

Donc : $S = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Théorème :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) et de premier terme u_0,
alors alors pour tout entier n : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

S est appelée la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

Démonstration :
Les n premiers termes de la suite géométrique (u_n) sont u_0; $u_1 = qu_0$; $u_2 = q^2u_0$; ...; $u_{n-3} = q^{n-3}u_0$; $u_{n-2} = {}^{n-2}u_0$ et $u_{n-1} = {}^{n-1}u_0$. Donc :
$S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1}$
$S = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + ... + q^{n-3}u_0 + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0$
$S = u_0(1 + q + q^2 + ... + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$

Or, on a vu que $1 + q + q^2 + ... + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Donc :

$$S = u_0\frac{1-q^n}{1-q}$$

Remarque : Dans le cas où q = 1, la suite géométrique (u_n) est constante : elle est toujours égale à u_0.
On a alors : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-2} + u_{n-1} = n\,u_0$

Guesmi.B