EXERCICES

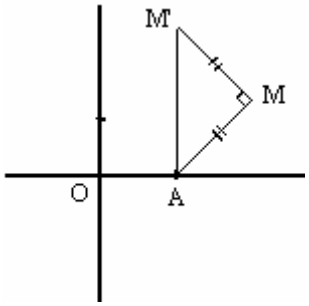
Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct .
On désigne par T l'application de P dans P qui, à tout point d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)\, z - i$.
1 : Montrer que T est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques.
On notera A le point invariant de T. Donner une mesure de l'angle ($\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MM'}$), en supposant que $M \neq A$.

2 : *a*) Construire M' pour un point M donné.
b) Déterminer l'image de D' par T de la droite D d'équation $y = x$. Construire D'.

3 : *a*) Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' = T(B) soient liées par la relation $z_0 z'_0 = 1$. Mettre en place B et B'.
b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les points A, A' , B et B' sont cocycliques.

CORRECTION

1 : L'application T est la similitude directe de rapport :
$|1 + i| = \sqrt{2}$ d'angle $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}$ et de centre le point A d'affixe z_1 solution de l'équation $z = (1 + i)\, z - i$. C'est donc le point d'affixe $z_1 = 1$.
Si M est un point du plan distinct de A, d'affixe z, et si M' = T(M) est d'affixe z', on a :
$z' = (1 + i)\, z - i$ d'où $z' - z = i(z - 1)$ ou encore : $\frac{z' - z}{z - 1} = i$.
On en déduit qu'un argument de ce nombre complexe est :
$\arg\left(\frac{z' - z}{z - 1}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Donc une mesure de l'angle demandé est $\frac{\pi}{2}$.



2 : *a*) On peut voir que la relation $z' - z = i\,(z - i)$ implique aussi que le triangle AMM' est rectangle en M isocèle et direct.
D'où le construction de M' à partir de M.

b) L'image de D par T est une droite D'.
Comme O et C d'affixe 1 + i sont sur D, il suffit de connaître les images de O et C par T pour connaître D'.
Or, T(O) a pour affixe –i et T(C) a pour affixe i (simple calcul)
On en déduit que D' = T(D) est la droite des ordonnées.

3: *a*) Il est demandé de déterminer l'ensemble des points M tels que $z\, z' = 1$.
Ceci conduit à l'équation, en reprenant la définition liant z' à z :
$z\,[(1 + i)\, z - i] = 1$ ou encore $z^2 (1 + i) - i\, z - 1 = 0$ ou encore $(z - 1)\,[z\,(1 + i) + 1] = 0$.
Le point cherché B doit être distinct de A donc son affixe est distincte de 1.
On a donc: $z\,(1 + i) + 1 = 0$ ce qui donne : $z = \frac{-1}{1 + i} = \frac{i - 1}{2}$.
D'où l'existence et l'unicité du point B.
Le point B a donc pour affixe $\frac{i - 1}{2}$ et B' = T(B) pour affixe $-(1 + i)$.
b) C'est un application de la question 2 :
Le triangle ABB' est rectangle en B.
Comme A' a pour cordonnées (– 1 ; 0), on remarque que AA'B' est rectangle en A'.
Les points A, A' , B et B' sont donc sur le cercle de diamètre [AB'].

Dans le plan orienté, ABCD est un carré de côté 1 et de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. I est le milieu du segment [AO]

a. Justifier une similitude directe et une seule telle que S(A) = O et S(B) = I
b. Déterminer le rapport et l'angle de S
c. Donne une écriture complexe de S dans le repère orthonormal direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
d. On note Ω le centre de S. Démontrer que les droites (AΩ) et (ΩD) sont perpendiculaires.

CORRECTION

a. $A \neq B$ et $O \neq I$ donc il existe une similitude directe et une seule telle que S(A) = O et S(B) = I

b Le carré est de côté 1 donc la diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$ donc $OI = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

Le rapport de S est $\frac{OI}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. L'angle de la similitude est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}) = \frac{5\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$

c. S est une similitude directe donc a une écriture complexe de la forme $z' = a z + b$
A a pour affixe 0 ; B a pour affixe 1 ; D a pour affixe i et C a pour affixe 1 + i

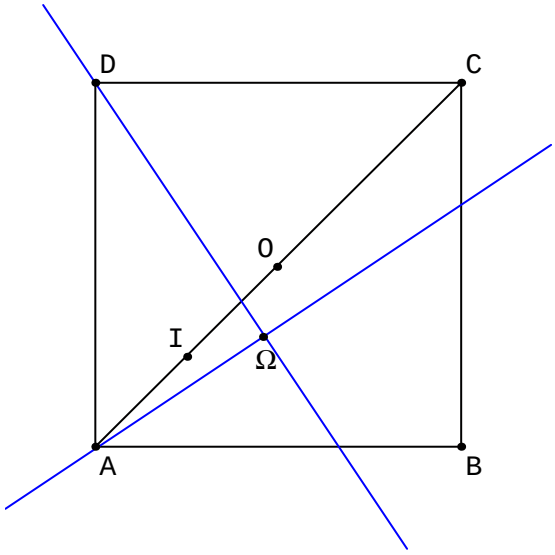
O a pour affixe $\frac{1}{2}(1 + i)$ et I a pour affixe $\frac{1}{4}(1 + i)$

S(A) = O donc $\frac{1}{2}(1 + i) = a \times 0 + b$ donc $b = \frac{1}{2}(1 + i)$

S(B) = I donc $\frac{1}{4}(1 + i) = a + b$ soit $a = \frac{1}{4}(1 + i) - \frac{1}{2}(1 + i)$

$a = -\frac{1}{4}(1 + i)$

S a pour écriture complexe $z' = -\frac{1}{4}(1 + i) z + \frac{1}{2}(1 + i)$



On pouvait obtenir a en tenant compte du fait que le rapport de la similitude est $|a|$ et l'angle de la similitude est arg (a)

donc $a = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}(1 + i)$

d. Ω est le centre de la similitude donc son affixe ω est la solution de $z' = z$

donc $z = -\frac{1}{4}(1 + i) z + \frac{1}{2}(1 + i) \Leftrightarrow 4 z = -(1 + i) z + 2(1 + i) \Leftrightarrow (5 + i) z = 2(1 + i) \Leftrightarrow z = 2\,\frac{1+i}{5+i}$

$z = 2\,\frac{(1+i)(5-i)}{(5+i)(5-i)}$ soit $z = \frac{6}{13} + \frac{4}{13} i$ donc $\omega = \frac{6}{13} + \frac{4}{13} i$.

$(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{\Omega D}) = \arg\left(\frac{d-\omega}{a-\omega}\right)$ ou $(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{\Omega D}) = \arg\left(\frac{\omega-d}{\omega-a}\right)$

$\omega - d = \frac{6}{13} + \frac{4}{13} i - i = \frac{6}{13} - \frac{9}{13} i = \frac{3}{13}(2 - 3 i)$ et $\omega = \frac{2}{13}(3 + 2 i)$

donc $\frac{\omega-d}{\omega-a} = \frac{3(2-3i)}{2(3+2i)}$ or $-i(3 + 2 i) = 2 - 3 i$ donc $\frac{3(2-3i)}{2(3+2i)} = -\frac{3}{2} i$ donc $\arg\left(\frac{\omega-d}{\omega-a}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2 k \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{\Omega D}) = -\frac{\pi}{2} + 2 k \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc les droites (AΩ) et (ΩD) sont perpendiculaires.

Soit f la similitude d'expression complexe : $z' = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1$

1. Déterminer le rapport k de la similitude f

2. *a.* Démontrer que $f \circ f$ est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{w}$

b. En déduire que f n'admet pas de point fixe

3. Soit t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{w}$. Démontrer que $f = t \circ s$, où s est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

CORRECTION

Soit f la similitude d'expression complexe : $z' = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1$

1. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ donc f est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$

2. *a.* Par f, le point M d'affixe z est transformé en M_1 d'affixe $z_1 = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1$

Par f, le point M_1 d'affixe z_1 est transformé en M' d'affixe $z' = \frac{4+3i}{5}\overline{z_1} + 1$

L'écriture complexe de $f \circ f$ est $z' = \frac{4+3i}{5}\overline{\left(\frac{4+3i}{5}\bar{z}+1\right)} + 1 = \frac{4+3i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}z+1\right) + 1 = z + \frac{4+3i}{5} + 1$

Donc $z' = z + \frac{9+3i}{5}$ donc $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\frac{9+3i}{5}$.

b. Si f admet un point fixe A, alors $f(A) = A$ donc $f \circ f(A) = f(A) = A$ ce qui est impossible puisque $f \circ f$ est une translation de vecteur non nul donc f n'admet pas de point fixe.

3. Soit t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{w}$. Démontrer que $f = t \circ s$, où s est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

t^{-1} est la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{w}$.

Par f, le point M d'affixe z est transformé en M_1 d'affixe $z_1 = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1$

Par t^{-1}, le point M_1 d'affixe z_1 est transformé en M' d'affixe $z' = z_1 - \frac{9+3i}{5} = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1 - \frac{9+3i}{10}$

donc $z' = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + \frac{1-3i}{10}$ donc soit $g = t^{-1} \circ f$; g est la similitude d'écriture complexe : $z' = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + \frac{1-3i}{10}$.

L'écriture complexe de g est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ donc g est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$ donc est une isométrie.

$g \circ g$ a pour écriture complexe : $z' = \frac{4+3i}{5}\overline{\left(\frac{4+3i}{5}\bar{z}+\frac{1-3i}{10}\right)} + \frac{1-3i}{10} = \frac{4+3i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}z+\frac{1+3i}{10}\right) + \frac{1-3i}{10}$

$z' = z + \frac{4+3i}{5}\times\left(\frac{1+3i}{10}\right) + \frac{1-3i}{10} = z$ donc g est une symétrie axiale.

On pouvait aussi montrer que $t^{-1} \circ f = f \circ t^{-1}$ (vérifier avec l'écriture complexe) et en déduire que $g \circ g = t^{-1} \circ f \circ f \circ t^{-1}$

$g \circ g = t^{-1} \circ T \circ t^{-1}$

T est la translation de vecteur $\vec{w}$ et t^{-1} est la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{w}$ donc $t^{-1} \circ f \circ f \circ t^{-1} = \mathrm{Id}$ et $g \circ g = \mathrm{Id}$ donc est une symétrie axiale.

Cherchons les points invariants par g : $g(M) = M \Leftrightarrow z = = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + \frac{1-3i}{10}$.

En posant $z = x + i\,y$ avec x et y réels on a : $10(x + i\,y) = 2(4 + 3i)(x - i\,y) + (1 - 3i)$

Soit $10x + 10i\,y = (8x + 6y + 1) + i(-8y + 6x - 3)$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on obtient : $\begin{cases} 10x = 8x + 6y + 1 \\ 10y = -8y + 6x - 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x - 6y - 1 = 0 \\ 6x - 18y - 3 = 0 \end{cases}$ soit $2x - 6y - 1 = 0$.

g admet donc la symétrie axiale d'axe la droite d'équation $2x - 6y - 1 = 0$.

Un triangle ABC étant donné, on cherche à y inscrire un triangle $A_1B_1C_1$ dont les cotés soit orthogonaux aux cotés du triangle ABC

1. première étape

On trace les droites orthogonales à (AC) en A, à (AB) en B et à (BC) en C. Elles se recoupent en A_1, B_1, C_1.
Soit s la similitude directe telle que $s(A_1) = C$ et $s(B_1) = A$

a. montrer que l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

b. déterminer les images par s des droites (C_1A_1) et (B_1C_1). En déduire l'image de C_1 par s.

c. Démontrer que le centre O de s appartient aux cercles de diamètres $[AB_1]$, $[CA_1]$ et $[BC_1]$. Placer O sur la figure

2. seconde étape

a Soit $h = s \circ s$. prouver que h est une homothétie

b. Soit A'_1, B'_1, C'_1 les images de A_1, B_1, C_1 par h

Montrer que A'_1 appartient aux droites (OA_1) et (BC)

c. Montrer que le triangle $A'_1B'_1C'_1$ répond bien aux conditions posées au départ

3. Conclusion

Le triangle ABC étant donné, expliquer comment construire $A_1B_1C_1$.

CORRECTION

1. première étape

a. s est la similitude directe telle que $s(A_1) = C$ et $s(B_1) = A$ donc l'angle de s est $(\overrightarrow{A_1B_1}\,;\,\overrightarrow{CA})$. La droite (A_1B_1) est la perpendiculaire en C à (AC) donc soit $(\overrightarrow{A_1B_1}\,;\,\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou soit $(\overrightarrow{A_1B_1}\,;\,\overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

b. L'image d'une droite par une similitude est une droite, l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ donc l'image de (C_1A_1) par s est la droite perpendiculaire à (C_1A_1) en $s(A_1)$ donc en C donc l'image de (C_1A_1) est la droite (BC).

l'image de (B_1C_1) par s est la droite perpendiculaire à (B_1C_1) en $s(B_1)$ donc en A donc l'image de (B_1C_1) est la droite (AB).

C_1 est le point d'intersection des droites (B_1C_1) et (C_1A_1) donc $s(C_1)$ est le point d'intersection de l'image de ces droites par s donc le point d'intersection de (BC) et (AB) donc l'image de C_1 par s est B.

c. Soit O le centre de la similitude directe s, donc l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

$s(A_1) = C$ donc $(\overrightarrow{OA_1}\,;\,\overrightarrow{OC}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc le triangle OCA_1 est rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre $[CA_1]$.

$s(B_1) = A$ donc $(\overrightarrow{OB_1}\,;\,\overrightarrow{OA}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc le triangle OAB_1 est rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre $[AB_1]$.

$s(C_1) = B$ donc $(\overrightarrow{OC_1}\,;\,\overrightarrow{OB}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc le triangle OBC_1 est rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre $[BC_1]$.
le centre O de s appartient aux cercles de diamètres $[AB_1]$, $[CA_1]$ et $[BC_1]$.

2. seconde étape

a La composée de deux similitudes directes de même centre O, est une similitude de centre O de rapport le produit des rapports et d'angle la somme des angles donc d'angle $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ donc π ou $\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ donc $-\pi$, h est donc une homothétie de centre O de rapport négatif.

b. h est une homothétie de centre O telle que $h(A_1) = A'_1$ donc les points O, A_1 et A'_1 sont alignés donc A'_1 appartient à la droite (OA_1).
$A'_1 = h(A_1) = s \circ s\,(A_1) = s(C)$
l'image de (C_1A_1) est la droite (BC) or C appartient à (C_1A_1) donc $s(C)$ appartient à (BC) donc A'_1 appartient à la droite (BC).
A'_1 est donc le point d'intersection des droites (OA_1) et (BC).

c. On montre de même B'_1 est le point d'intersection des droites (OB_1) et (AC) et C'_1 est donc le point d'intersection des droites (OC_1) et (AB). $h = s \circ s$ donc $A_1 \xrightarrow{s} C \xrightarrow{s} A'_1$ et $B_1 \xrightarrow{s} A \xrightarrow{s} B'_1$ et $C_1 \xrightarrow{s} B \xrightarrow{s} C'_1$

l'image par s de la droite (BC) est la droite ($A'_1C'_1$) or s est une similitude d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ donc les droites (BC) et ($A'_1C'_1$) sont perpendiculaires.

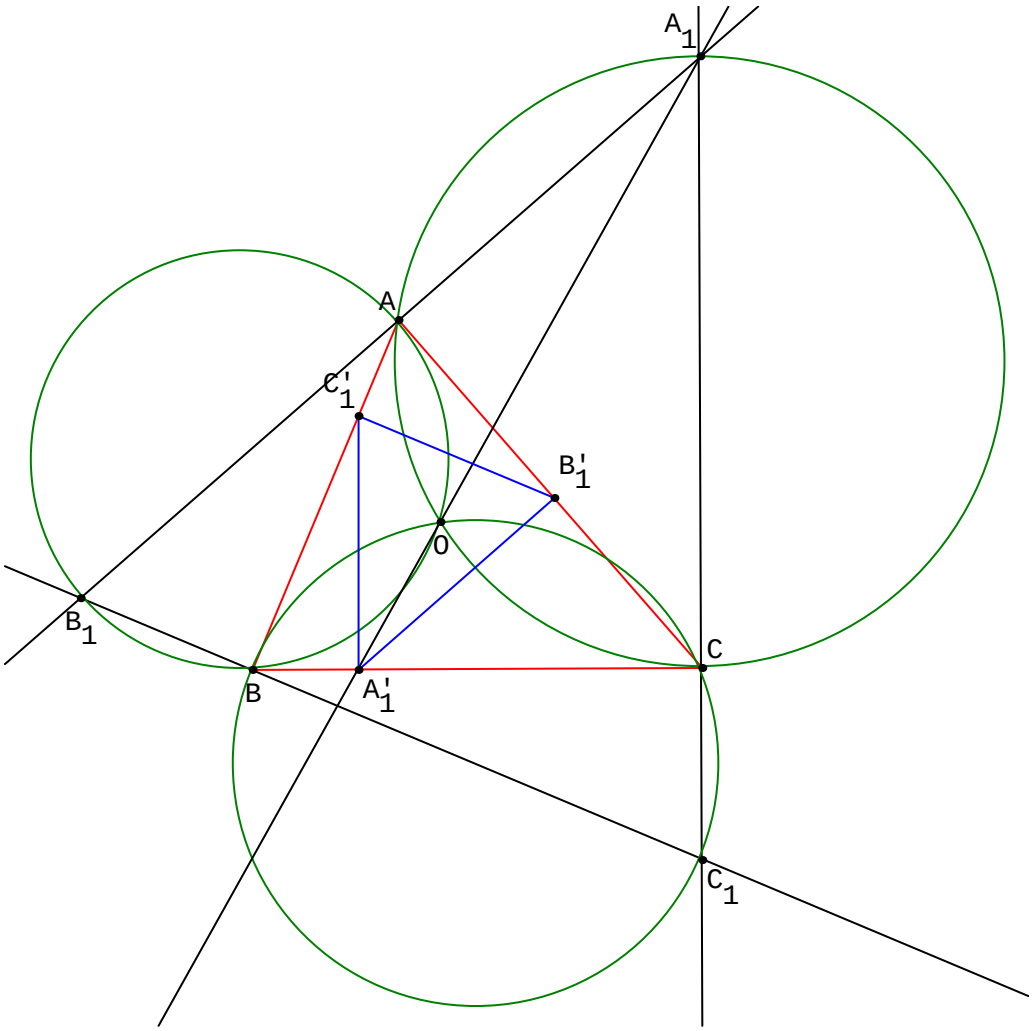
l'image par s de la droite (AC) est la droite ($A'_1B'_1$) or s est une similitude d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ donc les droites (AC) et ($A'_1B'_1$) sont perpendiculaires.

l'image par s de la droite (AB) est la droite ($B'_1C'_1$) or s est une similitude d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ donc les droites (AB) et ($B'_1C'_1$) sont perpendiculaires.

On a bien pour un triangle ABC donné, un triangle $A'_1B'_1C'_1$ dont les cotés soit orthogonaux aux cotés du triangle ABC.

3. Conclusion

Soit ABC un triangle quelconque.
Construisons les droites :
d_1 perpendiculaire en A à (AC) ; d_2 perpendiculaire en en B à (AB) et d_3 perpendiculaire en en C à (BC).
Les droites d_1 et d_3 se coupent en A_1 ; d_1 et d_2 se coupent en B_1 ; d_2 et d_3 se coupent en C_1
Les cercles de diamètre [AB_1] et [A_1C] se coupent en A et en un second point O.
La droite (OA_1) coupe (BC) en A'_1
La droite (OB_1) coupe (AC) en B'_1
La droite (OC_1) coupe (AB) en C'_1.
On *a* alors pour un triangle ABC donné, un triangle $A'_1B'_1C'_1$ dont les cotés soit orthogonaux aux cotés du triangle ABC.



On considère T la transformation du plan qui au point M (z) associe M' (z') tel que : $z' = -3\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 2 + 6\,\mathrm{i}$.

1. Ecrire les coordonnées x', y' de M' en fonction des coordonnées x, y de M.
2. Démontrer qu'il existe un point unique A invariant par T.
3. Démontrer que T est la composée de la symétrie orthogonale autour de l'axe ($x\,x'$) suivie d'une similitude directe à préciser.
4. Démontrer que T est aussi la composée de l'homothétie de centre A et de rapport – 3 et de la symétrie orthogonale autour de la droite D passant par A et de coefficient directeur 1.
5. Quelles sont les droites du plan qui se transforment par T en une droite parallèle.
6. Démontrer que T ○ T est une homothétie.

CORRECTION

1. $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels, donc $z' = -3\,\mathrm{i}\,(x - \mathrm{i}\,y) + 2 + 6\,\mathrm{i}$
$z' = -3\,y + 2 + \mathrm{i}\,(-3\,x + 6)$ donc en égalant les parties réelles et imaginaires : $x' = -3\,y + 2$ et $y' = -3\,x + 6$

2. Un point est invariant par T si et seulement si, il existe deux réels x et y tels que : $x = -3\,y + 2$ et $y = -3\,x + 6$
x et y sont donc solutions de : $\begin{cases} x + 3\,y = 2 \\ 3\,x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x + 9\,y = 6 \\ 3\,x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$ par différence terme à terme : $\begin{cases} x + 3\,y = 2 \\ 8\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$
T admet un seul point invariant A de coordonnées (2 ; 0)

3. Par la symétrie orthogonale s autour de l'axe ($x\,x'$), le point M d'affixe z est transformé en M_1 d'affixe $z_1 = \bar{z}$
Soit $f = \mathrm{T} \circ s$ alors f : $\mathrm{M} \xrightarrow{s} \mathrm{M}_1 \xrightarrow{\mathrm{T}} \mathrm{M}'$ donc f a pour écriture complexe : $z' = -3\,\mathrm{i}\,\bar{z}_1 + 2 + 6\,\mathrm{i}$ soit $z' = -3\,\mathrm{i}\,z + 2 + 6\,\mathrm{i}$
f a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ donc f est donc une similitude directe.
A est invariant par s et T donc A est invariant par f. f est la similitude directe de centre A de rapport $|a| = |-3\,\mathrm{i}| = 3$ et d'angle arg (a) donc d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
$f = \mathrm{T} \circ s$ donc $f \circ s = \mathrm{T} \circ s \circ s = \mathrm{T}$ donc T est la composée de la symétrie orthogonale autour de l'axe ($x\,x'$) suivie de la similitude directe de centre A de rapport 3 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. Soit h l'homothétie de rapport – 3 de centre A, h^{-1} est l'homothétie de rapport $-\dfrac{1}{3}$ de centre A,
h^{-1} a pour écriture complexe : $z' - 2 = -\dfrac{1}{3}(z - 2)$ soit $z' = -\dfrac{1}{3}z + \dfrac{8}{3}$

Soit $\mathrm{S} = h^{-1} \circ \mathrm{T}$ alors S a pour écriture complexe : $z' = -\dfrac{1}{3}(-3\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 2 + 6\,\mathrm{i}) + \dfrac{8}{3} = \mathrm{i}\,\bar{z} - \dfrac{2}{3} - 2\,\mathrm{i} + \dfrac{8}{3}$ soit $z' = \mathrm{i}\,\bar{z} + 2 - 2\,\mathrm{i}$.
S a une écriture complexe de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ donc S est une similitude indirecte de rapport $|a| = 1$
A est invariant par h^{-1} et T donc A est invariant par S.
Cherchons les points invariants par S : un point est invariant par S si et seulement si, il existe deux réels x et y tels que :
$x + \mathrm{i}\,y = \mathrm{i}\,(x - \mathrm{i}\,y) + 2 - 2\,\mathrm{i}$ soit $x + \mathrm{i}\,y = y + 2 + \mathrm{i}\,(x - 2)$
x et y sont donc solutions de : $\begin{cases} x = y + 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 2$
Les points invariants par S sont les points de la droite D d'équation $y = x + 2$, droite passant par A et de coefficient directeur 1.

$\mathrm{S} = h^{-1} \circ \mathrm{T}$ donc $h \circ \mathrm{S} = h \circ h^{-1} \circ \mathrm{T} = \mathrm{T}$ donc T est la composée de l'homothétie de centre A et de rapport – 3 et de la symétrie orthogonale autour de la droite D passant par A et de coefficient directeur 1.

5. Soit Δ une droite, h^{-1} transforme Δ en une droite parallèle.
Δ est transformée en une droite parallèle si et seulement si $h^{-1} \circ \mathrm{T}$ transforme Δ en une droite parallèle.
or $h^{-1} \circ \mathrm{T} = \mathrm{S}$ donc Δ est transformée en une droite parallèle si et seulement S transforme Δ en une droite parallèle.
S est une symétrie orthogonale d'axe D donc S transforme Δ en une droite parallèle si et seulement si Δ est parallèle à D.

6. Soit $\mathrm{H} = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}$ alors H : $\mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{T}} \mathrm{M}_1 \xrightarrow{\mathrm{T}} \mathrm{M}'$ donc H a pour écriture complexe : $z' = -3\,\mathrm{i}\,\bar{z}_1 + 2 + 6\,\mathrm{i}$
soit $z' = -3\,\mathrm{i}\,(3\,\mathrm{i}\,z + 2 - 6\,\mathrm{i}) + 2 + 6\,\mathrm{i}$ donc $z' = 9\,z - 6\,\mathrm{i} - 18 + 2 + 6\,\mathrm{i}$ donc $z' = 9\,z - 16$ donc T ○ T est une homothétie de rapport 9 et de centre A.

SIMILITUDES PLANES

I Généralités

Dans tout ce qui suit, le plan est orienté et lorsqu'il s'agit du plan complexe, il est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1. Notion de transformation

Définition : Une transformation est une bijection T du plan dans lui-même.

Cela signifie :

- qu'à tout point M est associé un unique point T(M) ;
- que pour tout point N il existe un unique point M tel que T(M) = N.

Exemples

Une symétrie axiale, une symétrie centrale, une rotation, une homothétie sont des transformations.

Propriété

Soit f une transformation du plan.

L'application du plan dans lui même qui à tout point N associe l'unique point M tel que f (M) = N est aussi une transformation du plan.

Elle est appelée transformation réciproque de f et notée f^{-1}.

On a alors : f (M) = N $\Leftrightarrow$ M = f^{-1}(N) ou encore f : M $\mapsto$ N $\Leftrightarrow$ f^{-1} : N $\mapsto$ M

Conséquence immédiate

Par une transformation, deux points distincts ont des images distinctes.

2. Similitude plane

Définition : Une transformation f du plan est une similitude si et seulement si quels que soient les points M, N, P, Q avec M $\neq$ N et P $\neq$ Q d'images respectives M', N', P', Q' par f on a $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$

Une similitude du plan est une transformation qui conserve les rapports des distances.

Propriété : Soit f une transformation du plan.

f est une similitude si et seulement si il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f : M'N' = k MN.

Le réel k par lequel une similitude f multiplie les distances est appelé le **rapport de la similitude** f .

Exemples

Les translations, les symétries axiales, les rotations, l'application identité conservent les longueurs donc sont des similitudes de rapport 1.

Une similitude de rapport 1 est appelée isométrie.

Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$

Propriété : Toute similitude transforme tout triangle en un triangle semblable et elle conserve les angles géométriques (c'est-à-dire non orientés).

Remarque

Toute transformation qui transforme tout triangle en un triangle semblable ou qui conserve les angles est une similitude.

3. Composition

Propriété : La composée $S_2 \circ S_1$ de deux similitudes S_1 et S_2 de rapports respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport le produit des rapports soit $k_1 k_2$.

Propriété : La bijection réciproque f^{-1} d'une similitude f de rapport k est une similitude de même nature de rapport $\frac{1}{k}$.

Remarque : La composition de deux similitudes n'est pas commutative : $S_2 \circ S_1 \neq S_1 \circ S_2$.

Cas particulier : La composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Attention : en général $r \circ h \neq h \circ r$

4. Dans le plan complexe

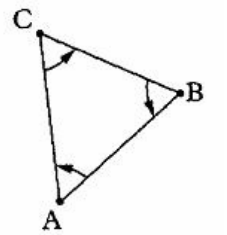
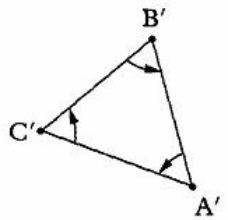
Propriété : Dans le plan complexe, toute application qui a pour écriture complexe $z' = a\,z + b$ ou $z' = a\,\bar{z} + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est une similitude de rapport $|\,a\,|$.

Cas particuliers

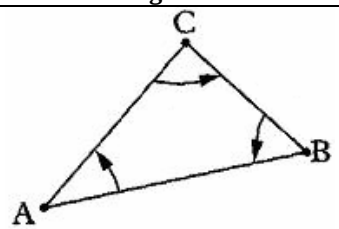
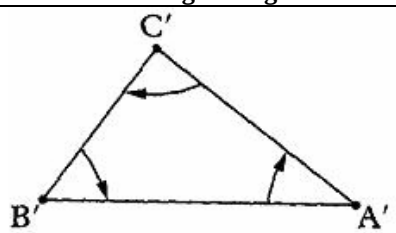
- $z' = z + b$ est une écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe b.
- $z' = e^{i\theta}\,z$ est une écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ.
- $z' = A\,z$, A réel non nul, est une écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport $|\,k\,|$.
- $z' = \bar{z}$ est une écriture complexe de la symétrie d'axe (Ox).

Remarques

- Par une translation, une rotation, une homothétie, les angles orientés sont conservés.
  Un triangle et son image ont des angles orientés correspondants égaux. on dit qu'ils sont directement semblables.

Triangle initial	Triangle image
	

- Par une symétrie axiale, les angles orientés sont transformés en leurs opposés.
  Un triangle et son image sont dits indirectement semblables.

Triangle initial	Triangle image
	

II Similitudes directes

1. Définition et écriture complexe

Définition : Une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientés.

Exemples : Les translations, les homothéties, les rotations sont des similitudes directes.

Propriété : Soit σ une similitude directe du plan complexe ;
p, q, r les affixes respectives de trois points P, Q, R avec $p \neq q$ et $p \neq r$; p', q', r' les affixes respectives des images de P, Q, R par σ alors $\dfrac{r'-p'}{q'-p'} = \dfrac{r-p}{q-p}$.

Les similitudes directes du plan complexe sont les transformations de la forme $z \mapsto a\,z + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

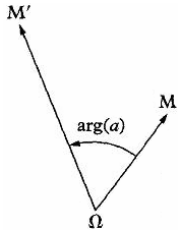
2. Description géométrique

Soit σ la similitude directe d'écriture complexe $z' = a\,z + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$).

- Si $a = 1$, σ est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, σ admet un unique point invariant Ω appelé centre de la similitude σ.

De plus, $\sigma = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $|\,a\,|$, et r la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$.
On a dans ce cas (même centre) : $h \circ r = r \circ h$.
Cette décomposition est appelée forme réduite de la similitude directe σ.

Si M' est l'image de M par la similitude σ d'écriture complexe $z' = a\,z + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$), on a alors la figure ci-contre et $\Omega M' = |\,a\,|\,\Omega M$; $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \arg(a)\ (2\pi)$.



Exemple :

Construction de l'image d'un point M par la similitude directe σ de centre Ω de rapport $k = 2$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

σ est la composée de la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport 2.

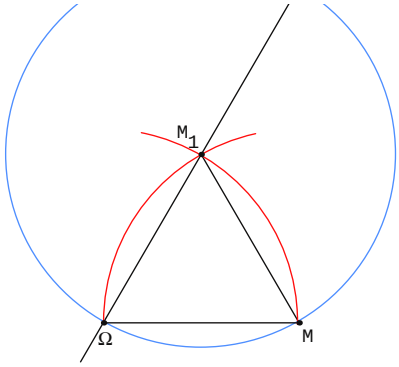
$r(M) = M_1$ donc $\Omega M = \Omega M_1$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}) = \frac{\pi}{3}$

$h(M_1) = M'$ donc $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\,\overrightarrow{\Omega M_1}$

$\sigma = h \circ r$ d'où la construction de $M' = \sigma(M)$

Il suffit de tracer le cercle de centre Ω de rayon ΩM puis celui de centre M de rayon ΩM, on obtient M_1.

Puis tracer M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\,\overrightarrow{\Omega M_1}$



Construction de l'antécédent d'un point M' par la similitude directe σ de centre Ω de rapport $k = 2$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$\sigma(M) = M' \Leftrightarrow \sigma^{-1}(M') = M$

σ^{-1} est la composée de la rotation r' de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de l'homothétie h' de centre Ω et de rapport $\frac{1}{2}$.

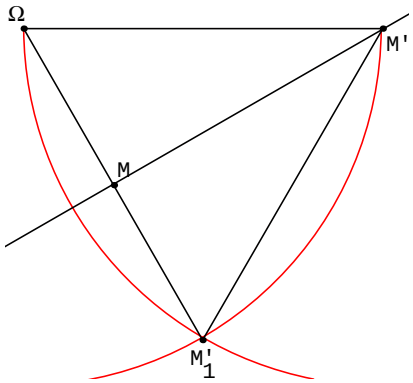
$r'(M') = M'_1$ donc $\Omega M' = \Omega M'_1$ et $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M'_1}) = -\frac{\pi}{3}$

$h'(M'_1) = M$ donc $\overrightarrow{\Omega M} = 2\,\overrightarrow{\Omega M'_1}$

$\sigma^{-1} = h' \circ r'$ d'où la construction de M tel que $M' = \sigma(M)$

Il suffit de tracer le cercle de centre Ω de rayon ΩM' puis celui de centre M' de rayon ΩM', on obtient M'_1.

Puis tracer M tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\Omega M'_1}$



3. Propriétés des similitudes directes

A. Angle d'une similitude directe

Propriété : Soit σ une similitude directe, A et B deux points distincts d'images A' et B' par σ.
L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ne dépend pas de A et B. On l'appelle angle de la similitude.

Remarque : Si $z' = a\,z + b$ est une écriture complexe de σ, l'angle de σ est $\arg(a)$ le rapport de σ est $|\,a\,|$.

Cas particulier : Une homothétie de centre Ω et de rapport k, $k \neq 0$, est une similitude directe de centre Ω d'angle 0 si $k > 0$ et d'angle π si $k < 0$

B. Donnée d'une similitude par deux points et leurs images

Propriété : Soit A, B, A', B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe une unique similitude directe σ telle que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$.

Exemple

Soit A(1), B(2 i), A'(1 + i), B'(– 3 – i).

Déterminons l'expression complexe de la similitude directe σ transformant A en A' et B en B'.

On sait que σ a pour expression complexe $z' = a\,z + b$ avec $a \neq 0$.

$\sigma(A) = A'$ donc $1 + i = a \times 1 + b$

$\sigma(B) = B'$ donc $-3 - i = a \times (2\,i) + b$

Par différence $a\,(1 - 2\,i) = 4 + 2\,i$ d'où $a = \dfrac{4 + 2\,i}{1 - 2\,i} = 2\,i$, puis $b = 1 + i - a = 1 - i$.

Donc σ a pour expression complexe $z' = 2\,i\,z + 1 - i$.

4. Composée de deux similitudes directes

Propriété : La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

Si σ_1 est la similitude directe d'angle θ_1 et de rapport k_1, et σ_2 celle d'angle θ_2 et de rapport k_2, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ a pour angle $\theta_1 + \theta_2$ et pour rapport $k_1\,k_2$.

La bijection réciproque d'une similitude directe d'angle θ et de rapport k est une similitude directe d'angle $-\theta$ et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

III Effet des similitudes directes sur certaines configurations

Toute similitude directe f :

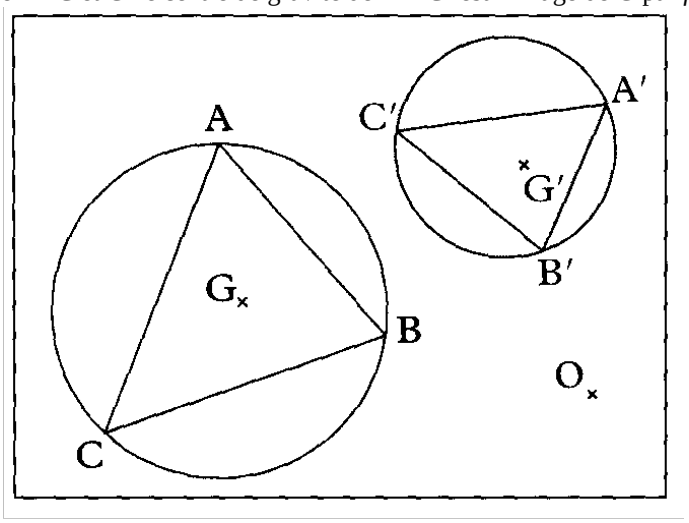
- conserve les angles orientés et donc l'orthogonalité et le parallélisme;
- conserve le barycentre (en particulier le milieu d'un segment et le centre de gravité d'un triangle) ;
- transforme la droite (AB) en la droite (A'B') avec $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$;
- transforme un segment de droite [AB] en un segment de droite [A'B'] avec $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$;
- transforme un cercle de centre O et de rayon R en un cercle de centre $O' = f(O)$ et de rayon k R où k est le rapport de f .

Exemple

Effet de la similitude directe f de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport 0,7 sur la figure ci-contre.

G est le centre de gravité du triangle ABC et G' le centre de gravité de A'B'C' est l'image de G par f car f conserve le barycentre.

Guesmi.B



IV Similitudes non directes

Propriété : Toute similitude non directe f peut s'écrire sous la forme $\sigma \circ s$ où σ est une similitude directe et s une symétrie axiale. Elle transforme tout angle orienté en son opposé. On dit qu'elle est indirecte.

Remarque : toute similitude du plan est soit directe soit indirecte.

Propriété : Toute similitude indirecte du plan complexe a pour écriture complexe $z = a\,\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriété : Soit θ un réel. La similitude d'écriture complexe $z' = e^{i\theta}\,\bar{z}$ est une symétrie axiale d'axe passant par O origine du repère.

Exemple

$z' = i\,\bar{z}$ est une expression complexe de la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque
La conservation des angles orientés par une similitude directe et la transformation d'une angle orienté en son opposé par une similitude indirecte, font que :
La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

D. Similitudes et points fixes

Propriété : Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'identité.
Une similitude qui admet deux points fixes distincts A et B est soit l'application identité soit la symétrie axiale d'axe (AB).

gUESMI.
b