EXERCICE1

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct .
On désigne par T l'application de P dans P qui, à tout point d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)\, z - i$.

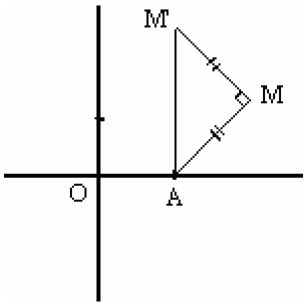
1 : Montrer que T est une similitude directe de P dont on donnera les éléments caractéristiques.
On notera A le point invariant de T. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'})$, en supposant que M ≠ A.

2 : *a*) Construire M' pour un point M donné.
b) Déterminer l'image de D' par T de la droite D d'équation $y = x$. Construire D'.

3 : *a*) Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' = T(B) soient liées par la relation $z_0 z'_0 = 1$. Mettre en place B et B'.
b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les points A, A' , B et B' sont cocycliques.

CORRECTION

1 : L'application T est la similitude directe de rapport :
$|1 + i| = \sqrt{2}$ d'angle $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}$ et de centre le point A d'affixe z_1 solution de l'équation $z = (1 + i)\, z - i$. C'est donc le point d'affixe $z_1 = 1$.
Si M est un point du plan distinct de A, d'affixe z, et si M' = T(M) est d'affixe z', on a :
$z' = (1 + i)\, z - i$ d'où $z' - z = i(z - 1)$ ou encore : $\frac{z' - z}{z - 1} = i$.
On en déduit qu'un argument de ce nombre complexe est :
$\arg\left(\frac{z' - z}{z - 1}\right) = \frac{\pi}{2}$.



Donc une mesure de l'angle demandé est $\frac{\pi}{2}$.

2 : *a*) On peut voir que la relation $z' - z = i\,(z - i)$ implique aussi que le triangle AMM' est rectangle en M isocèle et direct.
D'où le construction de M' à partir de M.

b) L'image de D par T est une droite D'.
Comme O et C d'affixe $1 + i$ sont sur D, il suffit de connaître les images de O et C par T pour connaître D'.
Or, T(O) a pour affixe $-i$ et T(C) a pour affixe i (simple calcul)
On en déduit que D' = T(D) est la droite des ordonnées.

3: *a*) Il est demandé de déterminer l'ensemble des points M tels que $z\, z' = 1$.
Ceci conduit à l'équation, en reprenant la définition liant z' à z :
$z\,[(1 + i)\, z - i] = 1$ ou encore $z^2 (1 + i) - i\, z - 1 = 0$ ou encore $(z - 1)\,[z\,(1 + i) + 1] = 0$.
Le point cherché B doit être distinct de A donc son affixe est distincte de 1.
On a donc: $z\,(1 + i) + 1 = 0$ ce qui donne : $z = \frac{-1}{1+i} = \frac{i-1}{2}$.
D'où l'existence et l'unicité du point B.
Le point B a donc pour affixe $\frac{i-1}{2}$ et B' = T(B) pour affixe $-(1 + i)$.

b) C'est un application de la question 2 :
Le triangle ABB' est rectangle en B.
Comme A' a pour cordonnées (– 1 ; 0), on remarque que AA'B' est rectangle en A'.
Les points A, A' , B et B' sont donc sur le cercle de diamètre [AB'].

Guesmi.B

EXERCICE2

Dans le plan orienté, ABCD est un carré de côté 1 et de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. I est le milieu du segment [AO]

a. Justifier une similitude directe et une seule telle que S(A) = O et S(B) = I

b. Déterminer le rapport et l'angle de S

c. Donne une écriture complexe de S dans le repère orthonormal direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

d. On note Ω le centre de S. Démontrer que les droites (AΩ) et (ΩD) sont perpendiculaires.

CORRECTION

a. A ≠ B et O ≠ I donc il existe une similitude directe et une seule telle que S(A) = O et S(B) = I

b Le carré est de côté 1 donc la diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$ donc OI = $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

Le rapport de S est $\frac{OI}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. L'angle de la similitude est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}) = \frac{5\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$

c. S est une similitude directe donc a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$

A a pour affixe 0 ; B a pour affixe 1 ; D a pour affixe i et C a pour affixe 1 + i

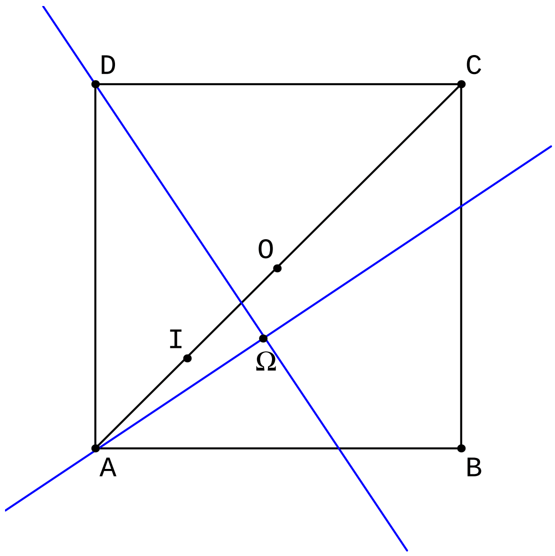
O a pour affixe $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$ et I a pour affixe $\frac{1}{4}(1 + \mathrm{i})$

S(A) = O donc $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}) = a \times 0 + b$ donc $b = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$

S(B) = I donc $\frac{1}{4}(1 + \mathrm{i}) = a + b$ soit $a = \frac{1}{4}(1 + \mathrm{i}) - \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$

$a = -\frac{1}{4}(1 + \mathrm{i})$

S a pour écriture complexe $z' = -\frac{1}{4}(1 + \mathrm{i})\,z + \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$



On pouvait obtenir a en tenant compte du fait que le rapport de la similitude est $|\,a\,|$ et l'angle de la similitude est arg (a)

donc $a = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}(1 + \mathrm{i})$

d. Ω est le centre de la similitude donc son affixe ω est la solution de $z' = z$

donc $z = -\frac{1}{4}(1 + \mathrm{i})\,z + \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}) \Leftrightarrow 4\,z = -(1 + \mathrm{i})\,z + 2\,(1 + \mathrm{i}) \Leftrightarrow (5 + \mathrm{i})\,z = 2\,(1 + \mathrm{i}) \Leftrightarrow z = 2\,\frac{1 + \mathrm{i}}{5 + \mathrm{i}}$

$z = 2\,\frac{(1 + \mathrm{i})\,(5 - \mathrm{i})}{(5 + \mathrm{i})\,(5 - \mathrm{i})}$ soit $z = \frac{6}{13} + \frac{4}{13}\mathrm{i}$ donc $\omega = \frac{6}{13} + \frac{4}{13}\mathrm{i}$.

$(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{\Omega D}) = \arg\left(\frac{d - \omega}{a - \omega}\right)$ ou $(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{\Omega D}) = \arg\left(\frac{\omega - d}{\omega - a}\right)$

$\omega - d = \frac{6}{13} + \frac{4}{13}\mathrm{i} - \mathrm{i} = \frac{6}{13} - \frac{9}{13}\mathrm{i} = \frac{3}{13}(2 - 3\,\mathrm{i})$ et $\omega = \frac{2}{13}(3 + 2\,\mathrm{i})$

donc $\frac{\omega - d}{\omega - a} = \frac{3\,(2 - 3\,\mathrm{i})}{2\,(3 + 2\,\mathrm{i})}$ or $-\mathrm{i}\,(3 + 2\,\mathrm{i}) = 2 - 3\,\mathrm{i}$ donc $\frac{3\,(2 - 3\,\mathrm{i})}{2\,(3 + 2\,\mathrm{i})} = -\frac{3}{2}\mathrm{i}$ donc $\arg\left(\frac{\omega - d}{\omega - a}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{\Omega D}) = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ donc les droites (AΩ) et (ΩD) sont perpendiculaires.

EXERCICE3

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1 de forme trigonométrique $\rho\, e^{i\theta}$.
On définit la suite de points (A_n) de la façon suivante : A_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n avec $z_n = 1 + a + \dots a^n$.

1. Calculer $(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\,;\overrightarrow{A_nA_{n+1}})$ et $\dfrac{A_nA_{n+1}}{A_{n-1}A_n}$ pour tout $n \geq 1$.

2. Soit Ω le point d'affixe $\omega = \dfrac{1}{1-a}$.

a. Montrer que $z_{n+1} - \omega = a\,(z_n - \omega)$ pour $n \geq 0$. Interpréter géométriquement ce résultat.
b. En déduire la nature de la suite (ΩA_n)
c. On suppose que $0 \leq \rho \leq 1$ Que se passe t-il quand n tend vers $+\infty$?
3. Placer sur la figure le point A_0 avec pour unité graphique 10 cm

On prendra $a = 0{,}9\ e^{i\frac{2\pi}{5}}$ puis construire les point $A_1 \dots A_8$. Placer Ω sur la figure.

CORRECTION

1. pour tout $n \geq 1$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ a pour affixe $z_n - z_{n-1} = (1 + a + \dots + a^{n-1} + a^n) - (1 + a + \dots + a^{n-1}) = a^n$

$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ a pour affixe $z_{n+1} - z_n = (1 + a + \dots + a^n + a^{n+1}) - (1 + a + \dots + a^n) = a^{n+1}$

donc $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_n - z_{n-1}} = \dfrac{a^{n+1}}{a^n} = a$

$(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\,;\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \arg\left(\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}}\right)$ donc $(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\,;\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \arg(a)$ soit $(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\,;\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \theta + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$\dfrac{A_nA_{n+1}}{A_{n-1}A_n} = \left|\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}}\right| = |a| = \rho$.

2\. *a.* $a \neq 1$, $z_n = 1 + a + \dots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ et $z_{n+1} = 1 + a + \dots + a^{n+1} = \dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}$

$z_n - \omega = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} - \dfrac{1}{1-a} = -\dfrac{a^{n+1}}{1-a}$ et $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1-a^{n+2}}{1-a} - \dfrac{1}{1-a} = -\dfrac{a^{n+2}}{1-a}$

donc $z_{n+1} - \omega = a\,\dfrac{a^{n+1}}{1-a} = a\,(z_n - \omega)$

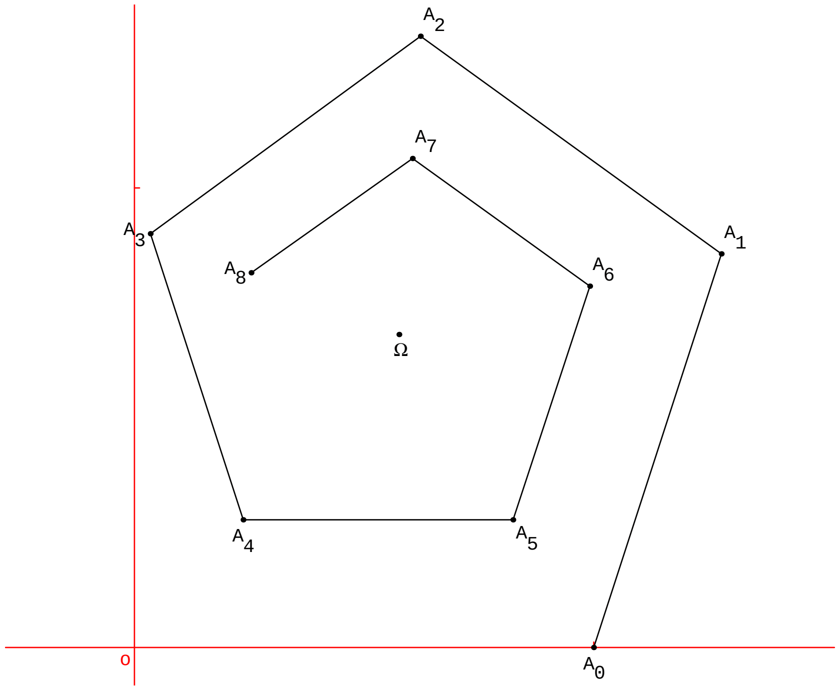
La transformation S d'écriture complexe $z' - \omega = a\,(z - \omega)$ est la similitude directe de centre Ω de rapport $|a| = \rho$ et d'angle θ.
A_{n+1} est donc l'image de A_n par la similitude directe de centre Ω de rapport ρ et d'angle θ.

b. $S(\Omega) = \Omega$ et pour tout $n \geq 0$, $S(A_n) = A_{n+1}$, donc $\Omega A_{n+1} = \rho\ \Omega A_n$ donc la suite (ΩA_n) est donc une suite géométrique de raison ρ, donc $\Omega A_n = \rho^n\ \Omega A_0$

c. $0 \leq \rho \leq 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho^n = 0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \Omega A_n = 0$ donc A_n tend vers Ω.

d. Pour construire l'image M' du point M par la similitude de centre Ω de rapport 0,9 et d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$, il suffit de tracer (ΩM), puis le point M_1 image de M par l'homothétie de centre Ω de rapport 0,9 et enfin l'image M' de M_1 par la rotation de centre Ω d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$.



Guesmi.B

EXERCICE4

Soit f la similitude d'expression complexe : $z' = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1$

1. Déterminer le rapport k de la similitude f

2. *a*. Démontrer que $f \circ f$ est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{w}$

b. En déduire que f n'admet pas de point fixe

3. Soit t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{w}$. Démontrer que $f = t \circ s$, où s est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

CORRECTION

Soit f la similitude d'expression complexe : $z' = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1$

1. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ donc f est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$

2. *a*. Par f, le point M d'affixe z est transformé en M_1 d'affixe $z_1 = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1$

Par f, le point M_1 d'affixe z_1 est transformé en M' d'affixe $z' = \frac{4+3i}{5}\overline{z_1} + 1$

L'écriture complexe de $f \text{ o } f$ est $z' = \frac{4+3i}{5}\overline{\left(\frac{4+3i}{5}\bar{z}+1\right)} + 1 = \frac{4+3i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}z+1\right) + 1 = z + \frac{4+3i}{5} + 1$

Donc $z' = z + \frac{9+3i}{5}$ donc $f \circ f$ est une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\frac{9+3i}{5}$.

b. Si f admet un point fixe A, alors $f(A) = A$ donc $f \text{ o } f(A) = f(A) = A$ ce qui est impossible puisque $f \text{ o } f$ est une translation de vecteur non nul donc f n'admet pas de point fixe.

3. Soit t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{w}$. Démontrer que $f = t \circ s$, où s est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

t^{-1} est la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{w}$.

Par f, le point M d'affixe z est transformé en M_1 d'affixe $z_1 = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1$

Par t^{-1}, le point M_1 d'affixe z_1 est transformé en M' d'affixe $z' = z_1 - \frac{9+3i}{5} = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + 1 - \frac{9+3i}{10}$

donc $z' = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + \frac{1-3i}{10}$ donc soit $g = t^{-1} \text{ o } f$; g est la similitude d'écriture complexe : $z' = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + \frac{1-3i}{10}$.

L'écriture complexe de g est de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ donc g est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$ donc est une isométrie.

$g \text{ o } g$ a pour écriture complexe : $z' = \frac{4+3i}{5}\overline{\left(\frac{4+3i}{5}\bar{z}+\frac{1-3i}{10}\right)} + \frac{1-3i}{10} = \frac{4+3i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}z+\frac{1+3i}{10}\right) + \frac{1-3i}{10}$

$z' = z + \frac{4+3i}{5}\times\left(\frac{1+3i}{10}\right) + \frac{1-3i}{10}$ = z donc g est une symétrie axiale.

On pouvait aussi montrer que $t^{-1} \text{ o } f = f \text{ o } t^{-1}$ (vérifier avec l'écriture complexe) et en déduire que $g \text{ o } g = t^{-1} \text{ o } f \text{ o } f \text{ o } t^{-1}$
$g \text{ o } g = t^{-1} \text{ o } T \text{ o } t^{-1}$

T est la translation de vecteur $\vec{w}$ et t^{-1} est la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{w}$ donc $t^{-1} \text{ o } f \text{ o } f \text{ o } t^{-1}$ = Id et $g \text{ o } g$ = Id donc est une symétrie axiale.

Cherchons les points invariants par g : $g(M) = M \Leftrightarrow z = = \frac{4+3i}{5}\bar{z} + \frac{1-3i}{10}$.

En posant $z = x + i\,y$ avec x et y réels on a : $10(x + i\,y) = 2(4 + 3i)(x - i\,y) + (1 - 3i)$

Soit $10x + 10i\,y = (8x + 6y + 1) + i(-8y + 6x - 3)$

En égalant les parties réelles et imaginaires, on obtient : $\begin{cases} 10x = 8x + 6y + 1 \\ 10y = -8y + 6x - 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x - 6y - 1 = 0 \\ 6x - 18y - 3 = 0 \end{cases}$ soit $2x - 6y - 1 = 0$.

g admet donc la symétrie axiale d'axe la droite d'équation $2x - 6y - 1 = 0$.

EXERCICE5

Un triangle ABC étant donné, on cherche à y inscrire un triangle $A_1B_1C_1$ dont les cotés soit orthogonaux aux cotés du triangle ABC

1. première étape

On trace les droites orthogonales à (AC) en A, à (AB) en B et à (BC) en C. Elles se recoupent en A_1, B_1, C_1.
Soit s la similitude directe telle que $s(A_1) = C$ et $s(B_1) = A$

a. montrer que l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

b. déterminer les images par s des droites (C_1A_1) et (B_1C_1). En déduire l'image de C_1 par s.

c. Démontrer que le centre O de s appartient aux cercles de diamètres $[AB_1]$, $[CA_1]$ et $[BC_1]$. Placer O sur la figure

2. seconde étape

a Soit $h = s \circ s$. prouver que h est une homothétie

b. Soit A'_1, B'_1, C'_1 les images de A_1, B_1, C_1 par h

Montrer que A'_1 appartient aux droites (OA_1) et (BC)

c. Montrer que le triangle $A'_1B'_1C'_1$ répond bien aux conditions posées au départ

3. Conclusion

Le triangle ABC étant donné, expliquer comment construire $A_1B_1C_1$.

CORRECTION

1. première étape

a. s est la similitude directe telle que $s(A_1) = C$ et $s(B_1) = A$ donc l'angle de s est $(\overrightarrow{A_1B_1}\,;\,\overrightarrow{CA})$. La droite (A_1B_1) est la perpendiculaire en C à (AC) donc soit $(\overrightarrow{A_1B_1}\,;\,\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou soit $(\overrightarrow{A_1B_1}\,;\,\overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

b. L'image d'une droite par une similitude est une droite, l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ donc l'image de (C_1A_1) par s est la droite perpendiculaire à (C_1A_1) en $s(A_1)$ donc en C donc l'image de (C_1A_1) est la droite (BC).

l'image de (B_1C_1) par s est la droite perpendiculaire à (B_1C_1) en $s(B_1)$ donc en A donc l'image de (B_1C_1) est la droite (AB).

C_1 est le point d'intersection des droites (B_1C_1) et (C_1A_1) donc $s(C_1)$ est le point d'intersection de l'image de ces droites par s donc le point d'intersection de (BC) et (AB) donc l'image de C_1 par s est B.

c. Soit O le centre de la similitude directe s, donc l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

$s(A_1) = C$ donc $(\overrightarrow{OA_1}\,;\,\overrightarrow{OC}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc le triangle OCA_1 est rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre $[CA_1]$.

$s(B_1) = A$ donc $(\overrightarrow{OB_1}\,;\,\overrightarrow{OA}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc le triangle OAB_1 est rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre $[AB_1]$.

$s(C_1) = B$ donc $(\overrightarrow{OC_1}\,;\,\overrightarrow{OB}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc le triangle OBC_1 est rectangle en O donc O appartient au cercle de diamètre $[BC_1]$.
le centre O de s appartient aux cercles de diamètres $[AB_1]$, $[CA_1]$ et $[BC_1]$.

2. seconde étape

a La composée de deux similitudes directes de même centre O, est une similitude de centre O de rapport le produit des rapports et d'angle la somme des angles donc d'angle $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ donc π ou $\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ donc $-\pi$, h est donc une homothétie de centre O de rapport négatif.

b. h est une homothétie de centre O telle que $h(A_1) = A'_1$ donc les points O, A_1 et A'_1 sont alignés donc A'_1 appartient à la droite (OA_1).
$A'_1 = h(A_1) = s \circ s\,(A_1) = s(C)$
l'image de (C_1A_1) est la droite (BC) or C appartient à (C_1A_1) donc $s(C)$ appartient à (BC) donc A'_1 appartient à la droite (BC).
A'_1 est donc le point d'intersection des droites (OA_1) et (BC).

c. On montre de même B'_1 est le point d'intersection des droites (OB_1) et (AC) et C'_1 est donc le point d'intersection des droites (OC_1) et (AB). $h = s \circ s$ donc $A_1 \xrightarrow{s} C \xrightarrow{s} A'_1$ et $B_1 \xrightarrow{s} A \xrightarrow{s} B'_1$ et $C_1 \xrightarrow{s} B \xrightarrow{s} C'_1$

l'image par s de la droite (BC) est la droite $(A'_1C'_1)$ or s est une similitude d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (BC) et $(A'_1C'_1)$ sont perpendiculaires.

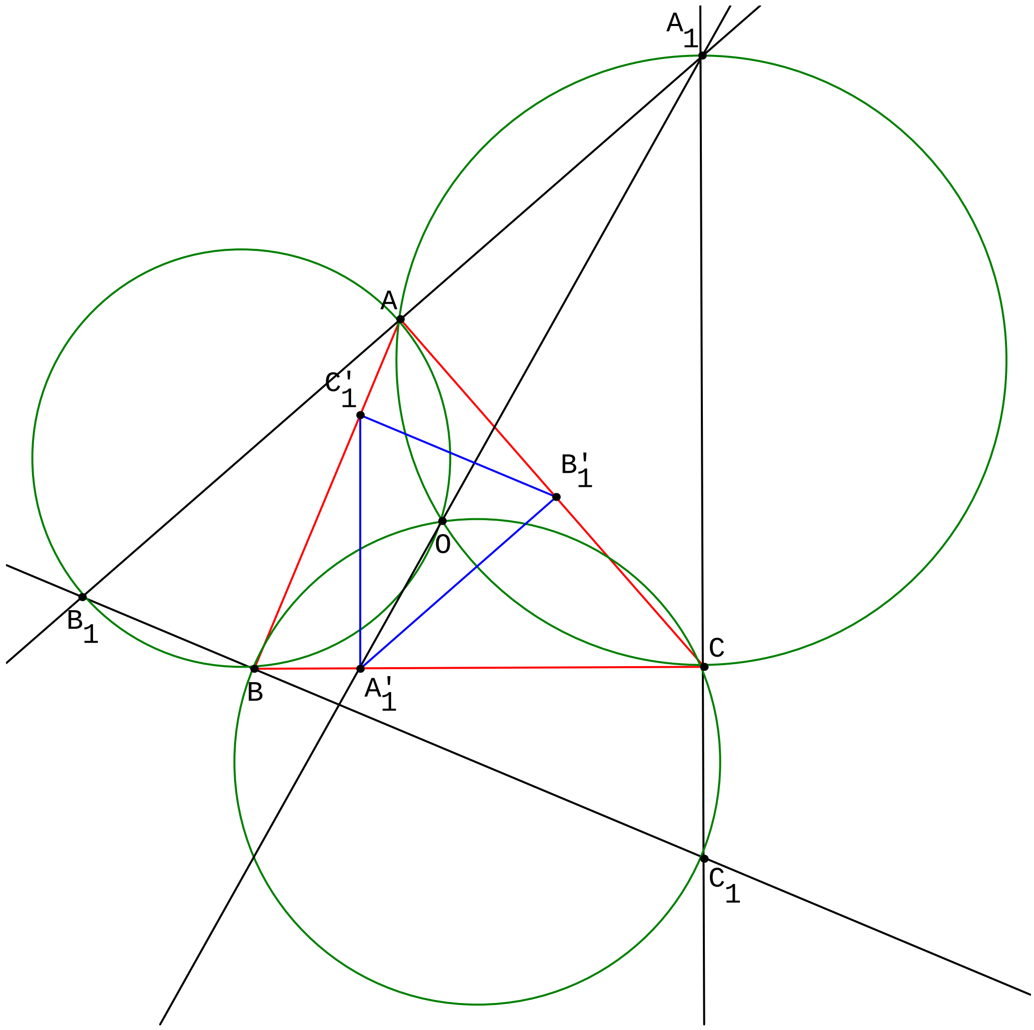
l'image par s de la droite (AC) est la droite $(A'_1B'_1)$ or s est une similitude d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (AC) et $(A'_1B'_1)$ sont perpendiculaires.

l'image par s de la droite (AB) est la droite $(B'_1C'_1)$ or s est une similitude d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (AB) et $(B'_1C'_1)$ sont perpendiculaires.

On a bien pour un triangle ABC donné, un triangle $A'_1B'_1C'_1$ dont les cotés soit orthogonaux aux cotés du triangle ABC.

3. Conclusion

Soit ABC un triangle quelconque.
Construisons les droites :
d_1 perpendiculaire en A à (AC) ; d_2 perpendiculaire en en B à (AB) et d_3 perpendiculaire en en C à (BC).
Les droites d_1 et d_3 se coupent en A_1 ; d_1 et d_2 se coupent en B_1 ; d_2 et d_3 se coupent en C_1
Les cercles de diamètre $[AB_1]$ et $[A_1C]$ se coupent en A et en un second point O.
La droite (OA_1) coupe (BC) en A'_1
La droite (OB_1) coupe (AC) en B'_1
La droite (OC_1) coupe (AB) en C'_1.
On *a* alors pour un triangle ABC donné, un triangle $A'_1B'_1C'_1$ dont les cotés soit orthogonaux aux cotés du triangle ABC.



Guesmi.B

EXERCICE7

On considère T la transformation du plan qui au point M (z) associe M' (z') tel que : $z' = -3\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 2 + 6\,\mathrm{i}$.

1. Ecrire les coordonnées x', y' de M' en fonction des coordonnées x, y de M.
2. Démontrer qu'il existe un point unique A invariant par T.
3. Démontrer que T est la composée de la symétrie orthogonale autour de l'axe ($x\,x'$) suivie d'une similitude directe à préciser.
4. Démontrer que T est aussi la composée de l'homothétie de centre A et de rapport – 3 et de la symétrie orthogonale autour de la droite D passant par A et de coefficient directeur 1.
5. Quelles sont les droites du plan qui se transforment par T en une droite parallèle.
6. Démontrer que T ○ T est une homothétie.

CORRECTION

1. $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels, donc $z' = -3\,\mathrm{i}\,(x - \mathrm{i}\,y) + 2 + 6\,\mathrm{i}$

$z' = -3\,y + 2 + \mathrm{i}\,(-3\,x + 6)$ donc en égalant les parties réelles et imaginaires : $x' = -3\,y + 2$ et $y' = -3\,x + 6$

2. Un point est invariant par T si et seulement si, il existe deux réels x et y tels que : $x = -3\,y + 2$ et $y = -3\,x + 6$

x et y sont donc solutions de : $\begin{cases} x + 3\,y = 2 \\ 3\,x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x + 9\,y = 6 \\ 3\,x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$ par différence terme à terme : $\begin{cases} x + 3\,y = 2 \\ 8\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

T admet un seul point invariant A de coordonnées (2 ; 0)

3. Par la symétrie orthogonale s autour de l'axe ($x\,x'$), le point M d'affixe z est transformé en M_1 d'affixe $z_1 = \bar{z}$

Soit $f = T \circ s$ alors f : $M \xrightarrow{s} M_1 \xrightarrow{T} M'$ donc f a pour écriture complexe : $z' = -3\,\mathrm{i}\,\bar{z}_1 + 2 + 6\,\mathrm{i}$ soit $z' = -3\,\mathrm{i}\,z + 2 + 6\,\mathrm{i}$

f a une écriture complexe de la forme $z' = a\,z + b$ donc f est donc une similitude directe.

A est invariant par s et T donc A est invariant par f. f est la similitude directe de centre A de rapport $|\,a\,| = |-3\,\mathrm{i}\,| = 3$ et d'angle arg (a) donc d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

$f = T \circ s$ donc $f \circ s = T \circ s \circ s = T$ donc T est la composée de la symétrie orthogonale autour de l'axe ($x\,x'$) suivie de la similitude directe de centre A de rapport 3 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. Soit h l'homothétie de rapport – 3 de centre A, h^{-1} est l'homothétie de rapport $-\dfrac{1}{3}$ de centre A,

h^{-1} a pour écriture complexe : $z' - 2 = -\dfrac{1}{3}(z - 2)$ soit $z' = -\dfrac{1}{3}z + \dfrac{8}{3}$

Soit $S = h^{-1} \circ T$ alors S a pour écriture complexe : $z' = -\dfrac{1}{3}(-3\,\mathrm{i}\,\bar{z} + 2 + 6\,\mathrm{i}) + \dfrac{8}{3} = \mathrm{i}\,\bar{z} - \dfrac{2}{3} - 2\,\mathrm{i} + \dfrac{8}{3}$ soit $z' = \mathrm{i}\,\bar{z} + 2 - 2\,\mathrm{i}$.

S a une écriture complexe de la forme $z' = a\,\bar{z} + b$ donc S est une similitude indirecte de rapport $|\,a\,| = 1$

A est invariant par h^{-1} et T donc A est invariant par S.

Cherchons les points invariants par S : un point est invariant par S si et seulement si, il existe deux réels x et y tels que :

$x + \mathrm{i}\,y = \mathrm{i}\,(x - \mathrm{i}\,y) + 2 - 2\,\mathrm{i}$ soit $x + \mathrm{i}\,y = y + 2 + \mathrm{i}\,(x - 2)$

x et y sont donc solutions de : $\begin{cases} x = y + 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 2$

Les points invariants par S sont les points de la droite D d'équation $y = x + 2$, droite passant par A et de coefficient directeur 1.

$S = h^{-1} \circ T$ donc $h \circ S = h \circ h^{-1} \circ T = T$ donc T est la composée de l'homothétie de centre A et de rapport – 3 et de la symétrie orthogonale autour de la droite D passant par A et de coefficient directeur 1.

5. Soit Δ une droite, h^{-1} transforme Δ en une droite parallèle.

Δ est transformée en une droite parallèle si et seulement si $h^{-1} \circ T$ transforme Δ en une droite parallèle.

or $h^{-1} \circ T = S$ donc Δ est transformée en une droite parallèle si et seulement S transforme Δ en une droite parallèle.

S est une symétrie orthogonale d'axe D donc S transforme Δ en une droite parallèle si et seulement si Δ est parallèle à D.

6. Soit $H = T \circ T$ alors H : $M \xrightarrow{T} M_1 \xrightarrow{T} M'$ donc H a pour écriture complexe : $z' = -3\,\mathrm{i}\,\bar{z}_1 + 2 + 6\,\mathrm{i}$

soit $z' = -3\,\mathrm{i}\,(3\,\mathrm{i}\,z + 2 - 6\,\mathrm{i}) + 2 + 6\,\mathrm{i}$ donc $z' = 9\,z - 6\,\mathrm{i} - 18 + 2 + 6\,\mathrm{i}$ donc $z' = 9\,z - 16$ donc T ○ T est une homothétie de rapport 9 et de centre A.