DEVOIR 1

Exercice 1:

pour tout nombre complexe Z ,on pose : $P(Z) = Z^4 - 1$

1)factoriser $P(Z)$

2)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $P(Z) = 0$

3)en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :$(\frac{2z+1}{z-1})^4 = 1$

Exercice 2:

on travaille dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité:2cm)

soit A le point d'affixe 4 et (d) la droite d'équation: $x = 4$

A tout point M ,d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-4}{4-\bar{z}}$

1)a)soit B le point d'affixe $1 + 3i$

déterminer l'affixe du point B' associé à B.placer B et B' sur la figure.

b)soit x un nombre réel différent de 4. On note R le point d'affixe x .

déterminer l'affixe du point R' associé à R.placer R' sur la figure.

c)soit y un nombre réel non nul.On note S le point d'affixe $4 + iy$

déterminer l'affixe du point S' associé à S.placer S' sur la figure.

2)soit M un point d'affixe z n'appartenant pas à (d) et différent de A

a)montrer que : $|z'| = 1$

en déduire que M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

b)Montrer que : $\frac{z'-1}{z-4} \in \mathbb{R}$

en déduire que (AM) est parallèle à $(S'M')$

(indication:on remarquera que : $(z' - 1) = k(z - 4)$ avec $k \in \mathbb{R}$)

c)en déduire une construction géométrique du point M' .

effectuer cette construction pour le point C' associé au point C d'affixe $2+i$

Exercice 3:

soit n un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^n\sqrt{x - x^2}, \forall x \in [0; 1]$

on notera (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal (unité:10cm).

1)étudier la dérivabilité de f_n en 0 et en 1.

2)calculer $f'_n(x)$,pour $0 < x < 1$, et montrer que :

$f'_n(x)$ et $(2n + 1) - (2n + 2)x$ ont même signe.

3)donner le tableau de variation de f_n (on ne demande pas le calcul du maximum de f_n)

4)étudier les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1})

5)tracer (C_1) et (C_2) dans le repère

Exercice 1:

on considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1)on pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison .

2) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n et u_0.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 2:

on considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2u_n} \end{cases}$

1)Montrer que : $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2)Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 1 .

3)Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 3:

On considère la suite d'intégrales :

$I_0 = \int_0^1 \dfrac{dx}{e^x + 1}$, $I_1 = \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x + 1} dx$,........... , $I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x + 1} dx$ $(n \in \mathbb{N})$

1)calculer I_1 et $I_0 + I_1$ .En déduire I_0 .

2)calculer $I_n + I_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

3)Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante .(indication : on cherchera le signe de $I_{n+1} - I_n$ en étudiant le signe de la fonction sous l'intégrale ....)

4)Montrer que : $\forall x \in [0; 1]$, $\dfrac{e^{nx}}{e + 1} \leq \dfrac{e^{nx}}{e^x + 1} \leq \dfrac{1}{2} e^{nx}$

en déduire un encadrement de I_n

5)grâce à cet encadrement ,déterminer la limite de I_n et $\dfrac{I_n}{e^n}$

ce devoir comporte douze questions à 1 point .la note sera ensuite ramenée à 20 .

Exercice 1:

barème : une bonne réponse : 1 point .une mauvaise réponse : $-\frac{1}{2}$ point

on considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$

les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Vrai □ Faux□ 1) pour tout n , $0 \leq v_n \leq 1$

Vrai □ Faux□ 2) si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

Vrai □ Faux□ 3) si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.

Vrai □ Faux□ 4) si (v_n) est convergente, alors (u_n) est convergente.

Exercice 2:

dans cet exercice, il y a deux réponses correctes à chaque question.Il faut donc essayer de cocher les deux bonnes réponses .Une bonne réponse donne $\frac{1}{2}$ point ,une mauvaise enlève $\frac{1}{4}$ point

On considère trois suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ tel que :$u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n \in \mathbb{N}$

1) si (v_n) tend vers $-\infty$,alors :

□ (w_n) tend vers $-\infty$

□ (u_n) tend vers $-\infty$

□ (u_n) est majorée

□ (w_n) n'a pas de limite

2) si $u_n > 1$, $w_n = 2u_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l(\in \mathbb{R})$

□ (v_n) tend vers l

□ (w_n) tend vers $+\infty$

□ $(w_n - u_n)$ tend vers l

□ on ne sait pas dire si (v_n) a une limite ou non

3) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$

□ (v_n) est majorée

□ (v_n) tend vers 0

□ (v_n) peut ne pas avoir de limite

□ (u_n) et (v_n) ne peuvent pas être adjacentes

Exercice 3:

Dans cet exercice ,il y a une seule réponse bonne à chaque question .une bonne réponse : 1 point .une mauvaise réponse : $-\frac{1}{2}$ point

L'espace est muni d'un repère orthonormal .

1)Soit A et B deux points distincts de l'espace .
l'ensemble des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ est :
□ l'ensemble vide □ un plan □ une sphère

2)on considère les points $E(0;1;-2)$ et $F(2;1;0)$
les coordonnées de G barycentre de $(E;1)$ et $(F;3)$ sont :
□ $(6;4;-2)$ □ $(1,5;1;-0,5)$ □ $(0,5;1;1,5)$

3)Soit d la droite de représentation paramétrique :$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -3 \end{cases}$
on considère les points $A(2;3;-3)$, $B(2;0;-3)$ et $C(0;6;0)$ .On a :
□ $d = (AB)$ □ $d = (BC)$ □ $d \neq (AB), d \neq (BC), d \neq (AC)$

4) Soit d et d' les droites de représentations paramétriques :
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3 - 2t' \\ y = 7 - 4t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$
ces deux droites sont :□ parallèles □ sécantes □ non coplanaires

5)la droite de représentation paramétrique :$\begin{cases} x = -4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ et le plan d'équation :$x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :
□ parallèles □ orthogonaux □ ni parallèles ni orthogonaux

Voici un exercice qui permet de manipuler différentes notions sur les nombres complexes

Le plan est muni d'unrepère orthonormal $(O; u, \overrightarrow{v})$.

A tout point M d'affixe z non nulle ,on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{-1}{\overline{z}}$

1)Construire les images des points A d'affixe $1 + i$ et B d'affixe $2i$

2)on pose :$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ $(x, y, x', y'$ réles)

a)Calculer x' et y' en fonction de x et y

b)En déduire que O, M, M' sont alignés

3)Montrer que :$\overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z - 1)$

4)On note C et D les points d'affixes 1 et -1.

on note Γ^* le cercle de centre C passant par O et privé de O.

on suppose dans cette question que $M \in \Gamma^*$

a)Jusitifier que $|z - 1| = 1$

Montrer que : $|z' + 1| = |z'|$ .interpréter géométriquement cette relation.

b)En déduire une construction géométrique de M' à partir de M

exercice 1:

1) pour tout nombre complexe z ,on pose :$P(z) = z^4 - 1$

a)factoriser P et résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation:$P(z) = 0$.

b)en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation: $(\frac{2z+1}{z-1})^4 = 1$

2)a)le plan est muni d'un repère orthonormal direct d'origine O

placer les points A,B,C d'affixes respectives:$a = -2; b = \frac{-1-3i}{5}; c = \frac{-1+3i}{5}$

b)démontrer que les points O,A,B et C sont situés sur un même cercle que l'on déterminera

3) placer le point D d'affixe :$d = -\frac{1}{2}$.

écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z' = \frac{a-c}{d-c}$

en déduire le rapport:$\frac{CA}{CD}$

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, \forall x > 0$ et $f(0) = 0$

on note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité : 5 cm)

partie 1 :

1)démontrer que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C)

2)pour $x > 0$, calculer $\frac{f(x)-f(0)}{x}$. étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. Que peut-on déduire pour f? Pour (C)?

3)démontrer que pour $x > 0$,on a : $f'(x) = \frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$

4)dresser le tableau de variations de f.

partie 2 :

on note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1)montrer que, dans $]0; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.

2)montrer que :$x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle,notée α, dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près.

3)On pose $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Donner un encadrement de A à 10^{-1} près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$

4) pour tout $a > 0$, on note (T_a) la tangente à (C) au point d'abscisse a.

montrer que (T_α) a pour équation $y = Ax$. Tracer (T_α) et (C)

5)déduire des questions précédentes que, de toutes les tangentes (T_a) , seule (T_α) passe par l'origine du repère.

6)on admettra que (T_α) est au-dessus de (C) sur $]0; +\infty[$

a)résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ (discuter selon les valeurs de m)

b)résoudre graphiquement l'équation $f(x) = mx$(discuter selon les valeurs de m)

exercice 1:

le plan complexe et muni d'un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.(unité : 3 cm)
les nombres complexes $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
1)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$
On pose : $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ .Exprimer ces deux nombres sous forme exponentielle et placez-les points M_1, M_2 d'affixes z_1 et z_2 dans le plan.
2) soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
calculer l' affixe du point $M_3 = r(M_2)$. Placer M_3 sur la figure précédente.
3) soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.Calculer l'affixe z_4 du point $M_4 = t(M_2)$
4) soit $z_5 = \dfrac{i}{2}(1 + i\sqrt{3})$ et $z_6 = \dfrac{2}{i - \sqrt{3}}$
écrire ces deux nombres sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
placez-les points M_5, M_6 d'affixes respectives z_5, z_6 sur la figure.
5)a) calculer z_k^6 pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b)en déduire une factorisation de $z^6 + 1$ sous forme d'un produit de 3 polynômes du second degré à coefficients réels.

exercice 2:

on considère la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}, \forall x > 0$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité : 8 cm)
1) dresser le tableau de variations de f
2)a) donner une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1.
b) construire (C) et (T) .
3)a)montrer que la tangente (T_u) au point N d'abscisse u est parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si : $u^3 + 2\ln u = 1$
b) étudier les variations de la fonction définie par: $h(x) = x^3 + 2\ln x, \forall x > 0$
en déduire que M est le seul point de (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$

Exercice 3:

1) question de cours: prérequis:
▷ la fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
▷ $\ln(1) = 0$
Montrer les résultats suivants successivement et en utilisant les propriétés ci-dessus .
▷ $\ln(ax) = \ln a + \ln x \ \forall a > 0$ et $\forall x > 0$
▷ $\ln(\dfrac{a}{x}) = \ln a - \ln x \ \forall a > 0$ et $\forall x > 0$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln\left|x^2 + 1\right| - \ln|2x - 1| = e$

DEVOIR7

Thème : ***Etude de fonction rationnelle***

On considère la fonction f définie pour $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$

On note Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 1cm).

1) Montrer que le point A(1 ; 0) est centre de symétrie de Cf.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
En déduire que Cf admet une asymptote dont on donnera l'équation.

3) a) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $x \neq 1$, on ait $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à Cf.

c) Etudier la position relative de Cf par rapport à (D).

d) Soit x un réel supérieur à 1, soient M et N deux points d'abscisse x appartenant respectivement à Cf et à (D), exprimer la distance MN en fonction de x et trouver à partir de quelle valeur de x on a $MN < 0,1$.

4) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

5) Dresser le tableau de variations de f.

6) Montrer qu'il existe 2 points en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 2$.
Donner une équation de la tangente en chacun de ces points.

7) Faire un tableau de valeurs dans lequel on inscrira les images de 1,5 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

8) Sur papier millimètré, tracer avec soin les tangentes, les asymptotes et Cf.

Guesmi.B

<u>Thème</u> : ***Etude de fonction rationnelle***

Soit f la fonction définie sur R \ $\{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1}$

Cf est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) d'unité 2 cm

1) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout x de l'ensemble de définition de f, on ait
   $f(x) = a + \dfrac{b}{x - 1} + \dfrac{c}{x + 1}$

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes à Cf.

3) Calculer f '(x) puis étudier son signe.

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Soit I le point de Cf d'abscisse O, montrer que I est centre de symétrie de Cf.

6) Déterminer l'équation réduite de (T) tangente à Cf en I.

7) Etudier pour x élément de]-1 ;1[la position relative de (T) et de Cf.

8) Faire un tableau de valeurs et tracer Cf.

9) Indiquer graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation :
   $(3-m)\,x^2 + 4x + (m-3) = 0$

10) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3x^2 + 4|x| - 3}{x^2 - 1}$
    a) Etudier la parité de g

    b) Montrer comment, sans nouveaux calculs, on peut représenter Cg.
    Représenter Cg dans le même repère, en utilisant une couleur différente.

11) Soit h la fonction définie par $h(x) = |f(x)|$
    Tracer la courbe représentative de h sans calcul.

DEVOIR9

Thème : ***Etude de fonction rationnelle***

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 6x + 1}{x^2 - 1}$

1) Préciser les intervalles de R sur lesquels cette fonction est continue et dérivable

2) Etudier f aux bornes de son intervalle de définition.

3) Montrer que f(x) peut se mettre sous la forme $ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2-1}$ a, b, c, d réels.

4) Quelles sont les asymptotes de (C) courbe représentative de f

5) Donner le sens de variation de f. Dresser son tableau de variation.

6) Donner l'équation de (T) tangente à (C) au point d'abscisse 0. Etudier la position relative de (C) et (T)

7) Montrer que I (0 ;-1) est centre de symétrie de (C)

8) Construire (C), (T) et les asymptotes.

AIDE

1) f est une fonction rationnelle donc est dérivable sur tout intervalle de son domaine de définition.
2) Pour l'étude en - ∞ et + ∞ mettre en facteur au numérateur et au dénominateur le terme de plus haut degré.
   Pour l'étude en -1 et en 1 distinguer numérateur et dénominateur. L'étude du signe du dénominateur est indispensable.
3) On peut procéder par division ou par identification.
4) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, la droite d'équation x = a est asymptote.
   Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, la droite d'équation y = b est asymptote.
   Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, la droite d'équation y = ax + b est asymptote.

5) Il faut calculer la dérivée de f en utilisant la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ puis étudier son signe.
6) La formule générale de la tangente au point d'abscisse x_0 de (C) est $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
   La position relative de deux courbes d'équation y = f(x) et y = g(x) s'obtient en étudiant le signe de f(x) – g(x).

7) Deux méthodes :
   - changer de repère, en prenant I pour nouvelle origine
   - calculer $\dfrac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2}$ et le comparer à y_0, x_0 et y_0 étant les coordonnées de I.

<u>Thème</u> : ***Etude de fonction rationnelle***

Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-1)^2 + \sqrt{-x^2+2x+3}$.

1) Etudier la continuité de f.

2) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 3. Interpréter graphiquement.

3) Etudier les variations de f. Dresser son tableau de variation.

4) Représenter graphiquement la fonction f.

5) Montrer que la droite d'équation x = 1 est axe de symétrie.

AIDE

1) f est la somme d'une fonction polynôme et de la composée d'une fonction polynôme et de la fonction radical.
2) La dérivabilité d'une fonction f en x_0 s'obtient en étudiant $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
3) Il faut utiliser les formules de dérivation : $(u+v)' = u' + v'$ $(u^n) = nu'\,u^{n-1}$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
4) Attention ! Un mauvais choix de l'intervalle de représentation sur calculatrice graphique peut donner une idée fausse de la courbe.

5) Deux méthodes possibles : changer de repère en prenant par exemple $\Omega(1,0)$ pour nouvelle origine, ou comparer f(1-h) et f(1+h).

Guesmi.B

DEVOIR11

Thème : ***Etude de fonction rationnelle et accroissement finis***

Problème

Soit f définie sur I =]1,5 ;+∞[par $f(x) = \dfrac{2}{3 - 2x} + \sqrt{x - 1}$

On note (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2cm.
Le but du problème est de représenter (Cf) (partie A) et de déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'intersection de (Cf) avec l'axe des abscisses (parties B et C).

Partie A

1) a) Déterminer la limite de f en 1,5. Que peut-on en déduire ?
   b) Déterminer la limite de f en + ∞.
   c) Etudier la dérivabilité de f, calculer f '(x). Montrer que f ' garde un signe constant sur I. En déduire le tableau de variations de f.
   d) Tracer (Cf).

2) a) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
   b) En déduire que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique r dans I.
   c) Montrer que $2 \leq r \leq 2,5$

Partie B

1) Soit A et B les points de (Cf) d'abscisse 2 et 2,5
   a) Donner une équation de la droite (AB). Tracer (AB).
   b) Déterminer l'abscisse d du point d'intersection de (AB) avec l'axe des abscisses.
   c) Calculer une valeur approchée de f (d). Comparer alors r et d.

2) Soit (T) la tangente à (Cf) en A. Donner une équation de (T). Tracer (T).

3) Soit g la fonction définie sur I par g(x) = f(x) – (4,5x – 10)
   a) Calculer g''(x). Déterminer son signe. En déduire les variations de g' en I.
   b) Calculer g' (2). En déduire le signe de g' sur I, puis les variations de g sur I.
   c) En déduire la position de (T) par rapport à (Cf).

4) Déterminer c l'abscisse du point d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses. Comparer c et r.

Partie C

Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = 1,5 + \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

1) Montrer que $f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = x$
   (On a donc h(r) = r avec $2 \leq r \leq 2,5$)
2) Montrer que pour x élément de [2 ; 2,5], $|h'(x)| \leq 0,5$
3) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour x élément de [2 ;2,5], $|h(x) - r| \leq 0,5|x - r|$
4) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de r'=h(2,5), r'' = h(r'). Montrer que $|r'' - r| \leq 0,125$
5) En déduire un encadrement de r.

DEVOIR12

Thème : ***Etude de fonction irrationnelle***

Soit (P), le plan rapporté à un repère orthonormal R(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique : 2cm)

Soient f1 et f2 les fonctions définies par f1(x) = x + $\sqrt{x^2 - 1}$ et f2(x) = x - $\sqrt{x^2 - 1}$

On désigne par (C1) la courbe représentative f1 et par (C2), celle de f2 dans le repère (R)

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f1 en -1 et 1
   Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f1
   Préciser les deux demi-tangentes à (C1)

2) Etudier les variations de f1

3) Montrer que la droite (D) d'équation y = 2x est asymptote oblique à (C1) au voisinage de + ∞

4) Montrer que (C2) = S_0 (C1)

5) Tracer (C1) et (C2)

6) Montrer que l'équation f1(x) = 2 admet une seule solution dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

Guesmi.B

CORRECTION DEVOIR [1]

Exercice 1:

1) $Z^4 - 1 = (Z^2-1)(Z^2+1) = (Z-1)(Z+1)(Z^2+1)$

2)$P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - 1 = 0$ ou $Z + 1 = 0$ ou $Z^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow Z = 1, -1, i$ ou $-i$ (la dernière équation étant :$Z^2 = -1$)

3)Posons $Z = \dfrac{2z+1}{z-1}$on a donc $Z^4 = 1$

d'après 2) cela donne $Z = 1, -1, i$ ou $-i$

$Z = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow 2z+1 = z-1 \Leftrightarrow z = -2$

$Z = -1 \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = -1 \Leftrightarrow 2z+1 = -z+1 \Leftrightarrow z = 0$

$Z = i \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = i \Leftrightarrow 2z+1 = iz - i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1-i}{2-i} = \dfrac{(-1-i)(2+i)}{4+1} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$

$Z = -i \Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1} = -i \Leftrightarrow 2z+1 = -iz+i \Leftrightarrow z = \dfrac{-1+i}{2+i} = \dfrac{(-1+i)(2-i)}{4+1} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

Exercice 2:

1)a)$b' = \dfrac{b-4}{4-\overline{b}} = \dfrac{1+3i-4}{4-(1-3i)} = \dfrac{-3+3i}{3+3i} = \dfrac{(-3+3i)(3-3i)}{9+9} = i$

b)$r' = \dfrac{x-4}{4-\overline{x}} = \dfrac{x-4}{4-x} = -1$

c)$s' = \dfrac{4+iy-4}{4-\overline{(4+iy)}} = \dfrac{iy}{4-4+iy} = 1$

2)a)$|z'| = \left|\dfrac{z-4}{4-\overline{z}}\right| = \dfrac{|z-4|}{|4-\overline{z}|}$

or on sait que :$\left|\overline{Z}\right| = |Z|$

donc $|4-\overline{z}| = \left|\overline{4-\overline{z}}\right| = |4-z| = |z-4|$ (on peut changer le signe,le module ne change pas)

finalement on a bien :$|z'| = 1$

(une autre méthode était de poser :$z = x + iy$)

on en déduit :$OM' = 1$ donc $M' \in C(O;1)$

b) $\dfrac{z'-1}{z-4} = \dfrac{\dfrac{z-4}{4-\overline{z}} - 1}{z-4} = \dfrac{\dfrac{z-4-(4-\overline{z})}{4-\overline{z}}}{z-4} = \dfrac{z+\overline{z}-8}{(z-4)(4-\overline{z})}$

or $z + \overline{z} - 8 = x + iy + x - iy - 8 = 2x - 8 \in \mathbb{R}$

et $(z-4)(4-\overline{z}) = -(z-4)(\overline{z}-4) = -|z-4|^2 \in \mathbb{R}($ en utilisant:$Z\overline{Z} = \left|Z^2\right|)$

(sinon on peut aussi poser $z = x + iy$.......)

finalement $\dfrac{z'-1}{z-4} \in \mathbb{R}$

donc: $\dfrac{z'-1}{z-4} = k \in \mathbb{R}$ soit $z'-1 = k(z-4)$

et on obtient:$\overrightarrow{S'M'} = k\overrightarrow{AM}$ .Cela entraîne :$(S'M')//(AM)$

c)M' se trouve donc à l'intersection du cercle $C(O;1)$ et de la parallèle à (AM) passant par S'.Un cercle et une droite ,lorsqu'ils sont sécants, se coupent en deux points .cela laisse deux possibiltés à M' .or un des deux points d'intersection est S' .et $M' \neq S'$

Exercice 3:

1)$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^n\sqrt{x-x^2}}{x} \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1}\sqrt{x-x^2} = 0$ car .....

f_n est donc dérivable en 0 (et $f_n'(0)=0$)

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n\sqrt{x(1-x)}}{x-1} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n\sqrt{x}}{-\sqrt{1-x}} = -\infty$ car .....

(écrire ,pour le dénominateur :$x-1 = -(1-x) = -(\sqrt{1-x})^2$)

f_n n'est donc pas dérivable en 1

2) $f_n'(x) = nx^{n-1}\sqrt{x-x^2} + x^n\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{nx^{n-1}2(x-x^2)+x^n(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}}$

$= \dfrac{x^{n-1}(2nx-2nx^2+x-2x^2)}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{x^n(2n+1-x(2n+2)}{2\sqrt{x-x^2}}$

du signe de $(2n+1)-(2n+2)x$ car x^n et $2\sqrt{x-x^2}$ sont positifs ($x \in [0;1]$)

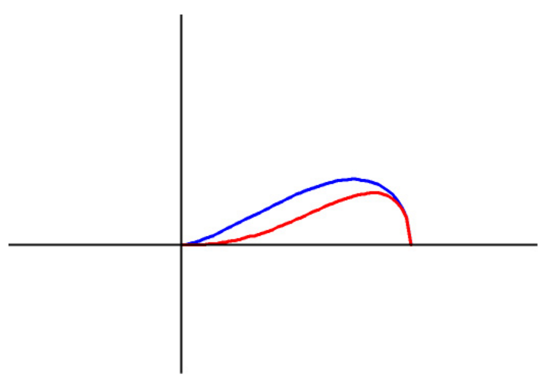
3)

x	0		$\frac{2n+1}{2n+2}$		1
f_n'	0		0		$\|$
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

4)$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}\sqrt{x-x^2} - x^nx - x^2 = x^n\sqrt{x-x^2}(x-1)$

ceci est toujours négatif sur [0;1] ($x^n \geq 0, \sqrt{x-x^2} \geq 0, 1-x \leq 0$)

Donc (C_{n+1}) est en dessous de (C_n)



CORRECTION DEVOIR2

Exercice 1:

1) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}+1}}{\dfrac{u_n-3}{u_n+1}} = \dfrac{\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}-3}{\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}+1}\dfrac{u_n+1}{u_n-3} = \dfrac{\dfrac{5u_n+3-3(u_n+3)}{u_n+3}}{\dfrac{5u_n+3+u_n+3}{u_n+3}}\dfrac{u_n+1}{u_n-3}$
$= \dfrac{2u_n-6}{6u_n+6}\dfrac{u_n+1}{u_n-3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

(v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$

2) $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1} \Leftrightarrow v_n(u_n+1) = u_n-3 \Leftrightarrow v_nu_n - u_n = -v_n-3 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{-v_n-3}{v_n-1}$

rq:il convient de s'assurer ,pour la validité du calcul ,que le dénominateur n'est pas nul .Ce qui va suivre en est une preuve .

on sait que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.On a donc:

$v_n = (\dfrac{1}{3})^n v_0 = (\dfrac{1}{3})^n \dfrac{u_0-3}{u_0+1} = -(\dfrac{1}{3})^n$ (et donc $v_n \neq 1$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-v_n-3}{v_n-1} = 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -(\dfrac{1}{3})^n = 0$

Exercice 2:

1)par récurrence :

$u_0 = 2 > 0$

supposons que : $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} > 0$

2)$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} - u_n = \dfrac{1+u_n^2-2u_n^2}{2u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{2u_n}$

si l'on montre que $u_n \geq 1$,on aura alors : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .Montrons le:.

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} - 1 = \dfrac{1+u_n^2-2u_n}{2u_n} = \dfrac{(1-u_n)^2}{2u_n} \geq 0$ car $u_n > 0$

cela permet d'affirmer que : $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$ .En effet si l'on applique ceci pour $n = 0, 1, 2...etc$ on obtient le résultat voulu pour $u_1, u_2, u_3......$ .ceci dit ce n'est pas trés génant car on a aussi : $u_0 = 2 > 1$

nous avons donc montré que (u_n) est minorée par 1 et donc est aussi décroissante .

3) (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente vers $l \geq 1$

on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ Or $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n}$ donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+u_n^2}{2u_n} = \dfrac{1+l^2}{2l}$

on obtient alors : $l = \dfrac{1+l^2}{2l} \Leftrightarrow 2l^2 = 1+l^2 \Leftrightarrow l^2 = 1 \Leftrightarrow l = 1$ (car $l \geq 1$ et donc $l \neq -1$)

Exercice 3:

1) $I_1 = [\ln(e^x+1)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\dfrac{e+1}{2}$

$I_0 + I_1 = \int_0^1 \dfrac{dx}{e^x+1} + \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}dx = \int_0^1 \dfrac{e^x+1}{e^x+1}dx = \int_0^1 1dx = 1$

donc : $I_0 = I_0 + I_1 - I_1 = 1 - \ln\dfrac{e+1}{2}$.

2) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}dx + \int_0^1 \dfrac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}dx = \int_0^1 \dfrac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{e^x+1}dx$

$= \int_0^1 \dfrac{e^{nx}(e^x+1)}{e^x+1}dx = \int_0^1 e^{nx}dx = [\dfrac{e^{nx}}{n}]_0^1 = \dfrac{e^n-1}{n}$

notons que ce calcul n'est pas valable pour $n = 0$ (cas traité au 1))

3) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \dfrac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}dx - \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}dx = \int_0^1 \dfrac{e^{(n+1)x}-e^{nx}}{e^x+1}dx$

$= \int_0^1 \dfrac{e^{nx}(e^x-1)}{e^x+1}dx$

or on a : $e^{nx} > 0, e^x + 1 > 0$ et $e^x - 1 \geq 0, \forall x \in [0;1]$ car $e^x \geq e^0 = 1$

la fonction à intégrer étant positive sur l'intervalle d'intégration ,cette intégrale est positive .D'où:$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

4) $\forall x \in [0;1]$, $e^0 \leq e^x \leq e^1$ donc $2 \leq e^x + 1 \leq e+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e+1} \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{2}$

il suffit alors de multiplier par e^{nx} (qui est positif) et on obtient :

$\dfrac{e^{nx}}{e+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{2}$

cet encadrement étant valable sur $[0;1]$,cela entraine :$\int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e+1}dx \leq \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}dx \leq \int_0^1 \dfrac{e^{nx}}{2}dx$

donc : $[\dfrac{1}{n}\dfrac{e^{nx}}{e+1}]_0^1 \leq I_n \leq [\dfrac{1}{n}\dfrac{e^{nx}}{2}]_0^1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{e+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{2}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{e+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{e+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$

on obtient donc par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$

d'aprés 4) :$\dfrac{\dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{e+1}}{e^n} \leq \dfrac{I_n}{e^n} \leq \dfrac{\dfrac{1}{n}\dfrac{e^n-1}{2}}{e^n} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{e+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{2}$

cela entraine que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{e+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^n}}{2} = 0$ (facile à justifier ......)

CORRECTION DEVOIR3

Exercice 1:

on considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

Vrai ■ Faux□ 1) pour tout n , $0 \leq v_n \leq 1$
Vrai ■ Faux□ 2) si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
Vrai ■ Faux□ 3) si (u_n) est croissante, alors (v_n) est croissante.
Vrai □ Faux■ 4) si (v_n) est convergente, alors (u_n) est convergente.

1) $u_n \geq 0$ donc $\dfrac{u_n}{1+u_n} \geq 0$ de plus $u_n \leq 1+u_n \Rightarrow \dfrac{u_n}{1+u_n} \leq 1$

2)$u_n \to l \Rightarrow v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \to \dfrac{l}{l+1}$ (rq:$l \neq -1$)

3)$v_{n+1}-v_n = \dfrac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}} - \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{u_{n+1}(1+u_n)-u_n(1+u_{n+1})}{(1+u_{n+1})(1+u_n)} = \dfrac{u_{n+1}-u_n}{(1+u_{n+1})(1+u_n)}$
du même signe que $u_{n+1}-u_n$

4)contre exemple :$u_n \to +\infty$ et $v_n \to 1$

Exercice 2:

On considère trois suites $(u_n),(v_n),(w_n)$ tel que :$u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n \in \mathbb{N}$

1) si (v_n) tend vers $-\infty$,alors :
□ (w_n) tend vers $-\infty$
■ (u_n) tend vers $-\infty$
■ (u_n) est majorée
□ (w_n) n'a pas de limite

1et 4 sont faux car w_n peut tendre vers $+\infty$ .2 est une application d'un théorème de comparaison .Finalement le plus embêtant à justifier est 3 .comme (u_n) tend vers $-\infty$,les termes de cette suite seront inférieur à 0 (au hasard) à partir d'un certain rang .Ensuite il reste un nombre fini de termes positifs .Mais comme il n'y en a qu'un nombre fini ,on pourra toujours les majorer par une constante........

2) si $u_n > 1$, $w_n = 2u_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l(\in \mathbb{R})$
□ (v_n) tend vers l
□ (w_n) tend vers $+\infty$
■ $(w_n - u_n)$ tend vers l
■ on ne sait pas dire si (v_n) a une limite ou non

$w_n = 2u_n \to 2l$ donc le résultat de 2 et 3 en découle directement .D'autre part v_n navigue entre u_n et w_n et donc n'a pas obligatoirement une limite

3) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$
■ (v_n) est majorée
□ (v_n) tend vers 0
■ (v_n) peut ne pas avoir de limite
□ (u_n) et (v_n) ne peuvent pas être adjacentes

avec les mêmes arguments qu'au 2) on a les réponses du 2 et 3
(v_n), à partir d'un certain rang,a tous ses termes seront inférieurs à 3 (puisque w_n tend vers 2) et donc il ne restera qu'un nombre fini de termes que l'on pourra

majorer .....

pour 4 on peut par exemple imaginer :$u_n = -2 - \frac{1}{n}$ et $v_n = -2 + \frac{1}{n}$

Exercice 3:

1)l'ensemble des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ est :

□ l'ensemble vide ■ un plan □ une sphère (plan médiateur de $[A;B]$)

2)$E(0;1;-2)$,$F(2;1;0)$.les coordonnées de G barycentre de $(E;1)$ et $(F;3)$ sont :

□ $(6;4;-2)$ ■ $(1,5;1;-0,5)$ □ $(0,5;1;1,5)$voir cours

3)Soit d la droite de représentation paramétrique :$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -3 \end{cases}$

on considère les points $A(2;3;-3)$, $B(2;0;-3)$ et $C(0;6;0)$ .On a :

□ $d = (AB)$ □ $d = (BC)$ ■ $d \neq (AB), d \neq (BC), d \neq (AC)$

$\overrightarrow{u}(-1;3;0)$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{AB}$ ni à $\overrightarrow{BC}$ ni à $\overrightarrow{AC}$

4) Soit d et d' les droites définies par:$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3 - 2t' \\ y = 7 - 4t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$

ces deux droites sont :□ parallèles □ sécantes ■ non coplanaires

$\begin{cases} 1 = 3 - 2t' \\ 1 + 2t = 7 - 4t' \\ 1 + t = 2 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$ impossible .les droites ne sont pas sécantes .

$\overrightarrow{u}(0;2;-1)$ et $\overrightarrow{v}(-2;-4;-1)$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles

5)la droite de représentation paramétrique :$\begin{cases} x = -4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ et le plan d'équation :$x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :

□ parallèles ■ orthogonaux □ ni parallèles ni orthogonaux

$\overrightarrow{u}(-4;3;2)$ et $\overrightarrow{v}(1;-2;5)$ sont orthogonaux (produit scalaire nul)

CORRECTION DEVOIR 4

2)a)$z' = x + iy' = \dfrac{-1}{x - iy}\dfrac{x+iy}{x+iy} = \dfrac{-(x+iy)}{x^2+y^2}$

donc : $\begin{cases} x' = \dfrac{-x}{x^2+y^2} \\ y' = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$

b)$\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{x^2+y^2}\overrightarrow{OM}$

donc $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et O, M, M' sont alignés

3)$\overline{z'+1} = \overline{\dfrac{-1}{\overline{z}}} + 1 = \overline{\left(\dfrac{-1+\overline{z}}{\overline{z}}\right)} = \dfrac{\overline{-1}+\overline{\overline{z}}}{\overline{\overline{z}}} = \dfrac{-1+z}{z} = \dfrac{1}{z}(z-1)$

4)a)$M \in \Gamma^* \Rightarrow OM = OC \Rightarrow |z-1| = 1$

on prend l'égalité trouvée au 3) :$\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$

cela entraîne :$|\overline{z'+1}| = \left|\dfrac{1}{z}(z-1)\right|$

et donc :$|z'+1| = \left|\dfrac{1}{z}\right| |z-1|$

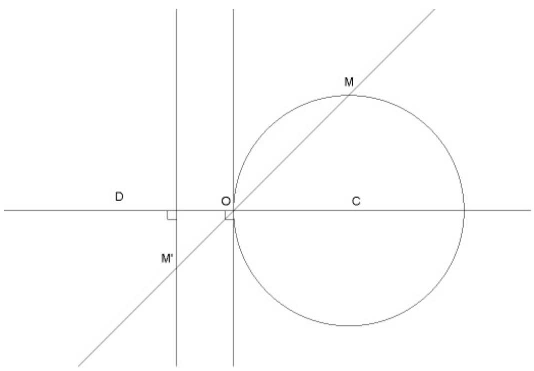
or $|z-1| = 1$ et $|z'| = \left|\dfrac{-1}{\overline{z}}\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$

donc on en déduit $|z'+1| = |z'|$

or $|z'| = OM'$ et $|z'+1| = |z'-(-1)| = DM'$

on a donc: $OM' = DM'$ et M' est sur la médiatrice de $[OD]$

b)M' se trouve à l'intersection de la médiatrice de $[OD]$ (cf)4)a)) et de (OM) (cf 2)b))



CORRECTION DEVOIR5

<u>exercice 1:</u>1)a)$P(z)=z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)$
b)$P(z)=0\Leftrightarrow z^2.=1$ ou $z^2=-1\Leftrightarrow \boxed{z=1,-1,i \text{ ou } -i}$
c)posons $Z=\dfrac{2z+1}{z-1}$. On a alors $Z^4=1$. D'aprés a), celà donne: $Z=1,-1,i$ ou $-i$

$Z=1\Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1}=1\Leftrightarrow 2z+1=z-1\Leftrightarrow \boxed{z=-2}$

$Z=-1\Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1}=-1\Leftrightarrow 2z+1=-z+1\Leftrightarrow \boxed{z=0}$

$Z=i\Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1}=i\Leftrightarrow 2z+1=iz-i\Leftrightarrow z=\dfrac{-1-i}{2-i}=(-1-i)\dfrac{2+i}{4+1}=\boxed{\dfrac{-1-3i}{5}}$

$Z=-i\Leftrightarrow \dfrac{2z+1}{z-1}=-i\Leftrightarrow 2z+1=-iz+i\Leftrightarrow z=\dfrac{-1+i}{2+i}=\overline{(\dfrac{-1-i}{2-i})}=\boxed{-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i}$

2)b)on voit sur le graphique que le centre du cercle va être le point d'affixe -1.
on le vérifie aisément en montrant que :
$|-2-1|=|0-1|=\left|\dfrac{-1-3i}{5}-1\right|=\left|\dfrac{-1+3i}{5}-1\right|=1$

3)$\dfrac{a-c}{d-c}=\dfrac{-2-\dfrac{-1+3i}{5}}{\dfrac{-1}{2}-\dfrac{-1+3i}{5}}=\dfrac{\dfrac{-10+1-3i}{5}}{\dfrac{-5+2-6i}{10}}=\dfrac{-9-3i}{-3-6i}\dfrac{10}{5}=\dfrac{-3(3+i)}{-3(1+2i)}*2$

$=\dfrac{2(3+i)}{(1+2i)}*\dfrac{1-2i}{1-2i}=......=2-2i=2\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}})=2\sqrt{2}e^{-i\dfrac{\pi}{4}}$

$\dfrac{CA}{CD}=\left|\dfrac{a-c}{d-c}\right|=2\sqrt{2}$

<u>Exercice 2:</u>

<u>partie 1 :</u>1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\dfrac{1}{x}}=e^0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\dfrac{1}{x}}=1$
la droite d'équation $y=1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

2)$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\dfrac{1}{x}}}{x}=\dfrac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\dfrac{1}{x}}=(x^2+x+1)(\dfrac{1}{x})^3e^{-\dfrac{1}{x}}$

or $\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{1}{x})^3e^{-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to+\infty}(X)^3e^{-X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X^3}{e^x}=0$ (cours...)

on en déduit donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$

f est donc dérivable en 0. (C) admet au point d'abscisse 0 une demi tangente horizontale.

3) $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\dfrac{1}{x}}$ est du signe de $1-x$ car x^4 et $e^{-\dfrac{1}{x}}$ sont positifs.

4).

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}$	$\searrow$	1

partie 2 :1) $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-xf'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}-x\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}=0$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{x}}(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}-\dfrac{1-x}{x^3})=0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{x}}(\dfrac{x^3+2+x-1+x}{x^3})=0$

$\Leftrightarrow x^3+x^2+2x-1=0$ (car $e^{-\frac{1}{x}}\neq 0$)

2)pour montrer que :$x^3+x^2+2x-1=0$ admet une seule racine réelle on étudie rapidement la fonction définie par $h(x)=x^3+x^2+2x-1$ et on conclut facilement en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires. (Cette fonction est strictement croissante et continue avec $h(0)<0$ et $h(1)>0$)

grâce à la calculette on trouve : $0,39<\alpha<0,4$

3)$\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^3}e^{-\frac{1}{\alpha}}$

pour obtenir un encadrement de A à 10^{-1} près, on peut procéder de différentes manières :

on peut tout d'abord prendre l'expression :$\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^3}e^{-\frac{1}{\alpha}}$ et utiliser les propriétés des inégalités. Par exemple : $0,39<\alpha<0,4$ donc $0,39^2<\alpha^2<0,4^2$ etc...

un moyen plus rapide pour conclure est de procéder ainsi :

f est strictement croissante sur l'intervalle $[0,39;0,4]$ donc $f(0,39)<f(\alpha)<f(0,4)$

de plus $0,39<\alpha<0,4$ implique $\dfrac{1}{0,4}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{0,39}$

en multipliant ces encadrements (ce qui est possible sans problème car tous les nombres concernés sont positifs) on obtient donc $\dfrac{f(0,39)}{0,4}<\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}<\dfrac{f(0,4)}{0,39}$

il ne reste plus qu'à calculer ses valeurs la machine et on obtient à la fin : $A\simeq 2$ à 10^{-1} près.

α est la solution de l'équation $x^3+x^2+2x-1=0$.

d'après 1) cela revient à $g(\alpha)=0$

donc $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$ ce qui donne $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=f'(\alpha)$

4) (T_α) a pour équation $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)=Ax$.

car $f'(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ et $-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)=0$....

5)(T_a) a pour équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

pour que (T_a) passe par l'origine du repère, il faut donc que l'équation $f'(a)(0-a)+f(a)=0$ admette une solution. Or, d'après les questions précédentes, la seule solution de cette équation est α.

CORRECTION DEVOIR6

<u>exercice 1:</u>

1)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

$\Delta = 3 - 4 = -1 = i^2$

donc on a deux solutions complexes: $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

2)d'après l'écriture complexe de r,on a : $z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

3)d'après l'écriture complexe de t ,on a : $z_4 = z_2 - \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2} - \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

4) $z_5 = \dfrac{i}{2}(1+i\sqrt{3}) = i(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$

$z_6 = \dfrac{2}{i-\sqrt{3}} * \dfrac{-i-\sqrt{3}}{-i-\sqrt{3}} = \dfrac{2}{4}(-i-\sqrt{3}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

5)a) on trouve: $z_k^6 = e^{i\pi} = -1$ pour $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$

b)le pôlynome $z^6 + 1$ est de degré 6 et possède donc 6 racines qui sont bien sûr :$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$

on a donc : $z^6 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)$

bien sur ces facteurs ne sont pas à coefficients réels.

pour obtenir des facteurs réels, l'astuce consiste à regrouper deux par deux les racines, en associant à une racine son conjugué.

$$z^6 + 1 = (z - e^{i\frac{\pi}{2}})(z - e^{-i\frac{\pi}{2}})(z - e^{i\frac{\pi}{6}})(z - e^{-i\frac{\pi}{6}})(z - e^{i\frac{5\pi}{6}})(z - e^{i\frac{-5\pi}{6}})$$

$= (z^2 - z(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}) + 1)(z^2 - z(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}) + 1)(z^2 - z(e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{-i\frac{5\pi}{6}}) + 1)$

d'autre part, on sait que $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

et finalement $z^6 + 1 = (z^2 + 1)(z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)$

<u>exercice 2:</u>

1) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x^2 - (\ln x)2x}{x^4} = \dfrac{x(1 - 2\ln x)}{x^4}$ du signe de $1 - 2\ln x$ car $x > 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > 2\ln x \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ ...

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (cours) car x^2 'l'emporte ' sur $\ln x$

Guesmi.B

d'où:

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f'	$\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

2)a)$y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1$

3)a) (T_u) au point N d'abscisse u est parallèle à la droite d'équation $y=x$ si et seulement si :

$f'(u)=1 \Leftrightarrow \dfrac{u(1-2\ln u)}{u^4}=1 \Leftrightarrow u-2u\ln u=u^4 \Leftrightarrow 1-2\ln u=u^3$

(on peut simplifier par u qui est non nul)$\Leftrightarrow 1=2\ln u+u^3$

b) $h'(x)=3x^2+\dfrac{2}{x}>0$ car $x>0$. h est donc strictement croissante

la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$ lorsque $f'(x)=1$ donc lorsque $h(x)=1$ (cf)3)a))

or: h est dérivable et strictement croissante et $h(0,9)\simeq 0,5<1$ et $h(1,1)\simeq 1,5>1$

on peut donc en conclure qu'il existe une seule valeur de x telle que $h(x)=1$ (cette valeur est bien sur $x=1$ ce qui donne le résultat voulu)

Exercice 3:

1) $\triangleright$ la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ avec: $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\triangleright$ $\ln(1)=0$

Montrer les résultats suivants successivement et en utilisant les propriétés ci-dessus .

$\triangleright$ $\ln(ax)=\ln a+\ln x\ \forall a>0$ et $\forall x>0$ $\triangleright$ $\ln(\dfrac{a}{x})=\ln a-\ln x\ \forall a>0$ et $\forall x>0$

A priori, il faut démontrer les résultats en utilisant les prérequis...

pour la première: $(\ln ax)'=\dfrac{a}{ax}=\dfrac{1}{x}$ (on fixe a). On a donc : $\ln(ax)=\ln x+C^{ste}$

prenons $x=1.\ln(a)=\ln 1+C^{ste}$ d'où $C^{ste}=\ln a$ et donc $\ln ax=\ln a+\ln x$

Pour la deuxième: $\ln\dfrac{a}{x}=\ln(a*\dfrac{1}{x})=\ln a+\ln\dfrac{1}{x}$

de plus : $\ln 1=\ln(x*\dfrac{1}{x})=\ln x+\ln\dfrac{1}{x}$ donc $\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$ et $\ln\dfrac{a}{x}=\ln a-\ln x$

2) Domaine de validité de l'équation: $\begin{cases}\left|x^2+1\right|>0\\ |2x-1|>0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{2}$

$\ln\left|x^2+1\right|-\ln|2x-1|=e \Leftrightarrow \ln\left|\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right|=e \Leftrightarrow \left|\dfrac{x^2+1}{2x-1}\right|=e^e \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{2x-1}=e^e$ ou $-e^e$

résolvons la première équation:

$\dfrac{x^2+1}{2x-1}=e^e \Leftrightarrow x^2+1=e^e(2x-1) \Leftrightarrow x^2-2e^ex+1+e^e=0$

$\Delta=4e^{2e}-4(1+e^e)=4(e^{2e}-e^e-1)>0$

donc $x=\dfrac{2e^e\pm\sqrt{4(e^{2e}-e^e-1)}}{2}=e^e\pm\sqrt{e^{2e}-e^e-1}$ (ces deux valeurs conviennent)

la deuxième équation se traite de la même manière.

CORRECTION DEVOIR7

<u>Thème</u> : ***Etude de fonction rationnelle***

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ Df est symétrique par rapport à 1

$$f(2-x) + f(x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) + 5}{(2-x) - 1} + \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = \frac{(1)\,(4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 5)}{(-1)\,(-x + 1)} + \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$$

$$= \frac{-4 + 4x - x^2 + 4 - 2x - 5 + x^2 - 2x + 5}{x - 1} = 0 = 2b \text{ avec } b = 0 \quad \text{(fonction rationnelle)}$$

donc A(1 ;0) est centre de symétrie.

Méthode : changement de repère.

Dans (A, $\vec{i}\ \vec{j}$) $x = X + 1$

$y = Y$ $\qquad y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} \Rightarrow Y = \dfrac{X^2 + 4}{X}$

Soit $g(X) = \dfrac{X^2 + 4}{X}$ g est impaire car pour tout $X \in R^*$, $-X \in R^*$ et $g(-X) = \dfrac{(-X)^2 + 4}{-X}$

$$= -\left(\frac{X^2 + 4}{X}\right) = -g(X)$$

donc l'origine du repère A est centre de symétrie.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 2x + 5 = 4$

$\lim\limits_{x \to <1} x - 1 = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{x \to <1} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to >1} x - 1 = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to >1} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ la droite d'équation x = 1 est asymptote verticale à C.

3) a)

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 5 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x - 1 \\ \hline -x + 5 & \\ +x - 1 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$x^2 - 2x + 5 = (x - 1) - (x - 1) + 4$

donc $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x - 1}$

a = 1
b = - 1
c = 4

(on pouvait aussi partir de $ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$, réduire au même dénominateur et identifier les coefficients)

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} ((f(x) - (x-1)) = 0^+$

donc (D) est asymptote oblique à (Cf) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

c) $f(x) - (x-1) = \dfrac{4}{x-1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\dfrac{4}{x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	

$\forall \in]-\infty, 1[$ $f(x) - (x-1) < 0 \Rightarrow f(x) < x - 1$ donc (Cf) est en dessous de (D)

$\forall \in]1 ;+\infty[$ $f(x) - (x-1) > 0 \Rightarrow f(x) > x - 1$ donc (Cf) est au-dessus de (D)

d) $M N = |f(x) - (x-1)| = \left|\dfrac{4}{x-1}\right| = \dfrac{4}{x-1}$ car $x - 1 > 0$ $\quad x > 1$

$M N < 0{,}1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x-1} < 0{,}1 \Leftrightarrow 4 < 0{,}1\,(x-1)$ car $x - 1 > 0$

$40 < x - 1$

$41 < x$

$S =]41 ; +\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 5)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

$\forall x \in Df \quad (x-1)^2 > 0$

le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x^2 - 2x - 3$.

$D = 16 \quad x' = -1 \quad x'' = 3$

5)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$	$\Vert$	$-$		$+$	
$f(x)$		↗	-4	↘	$\Vert$ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				$-\infty$ $\Vert$		4		

6) Coefficient directeur de (T) au point d'abscisse a : $f'(a)$
Coefficient directeur de (D) : -3

(T) // (D) $\Leftrightarrow$ même coefficient directeur $\Leftrightarrow$ $f'(a) = -3$

$$\frac{a^2 - 2a - 3}{(a-1)^2} = -3 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = -3\,(a-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 8a = 0$$

$\Leftrightarrow$ $4a(a-2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $a = 0$ ou $a = 2$

En C (0 ; -5) et D (2 ; 5) (T) // (D)

Equation des tangentes : $y = f(0) + f'(0)(x)$ $\quad$ $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$

$y = -5 - 3x$ $\quad$ $y = 5 - 3(x - 2)$

$y = -3x + 11$

7)

x	1,5	2	3	4	5	6
f (x)	$\frac{17}{2}$	5	4	$\frac{13}{3}$	5	$\frac{29}{5}$

Guesmi.B

CORRECTION DEVOIR8

Thème : *Etude de fonction rationnelle*

Soit f la fonction définie sur $R \setminus \{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$

1) $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{a(x-1)(x+1)+b(x+1)+c(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{ax^2-a+bx+b+cx-c}{x^2-1}$

$$= \frac{x^2+(b+c)x+(a-c)}{x^2-1} = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$$

Identifications : $\begin{cases} a=3 \\ b+c=4 \\ b-a-c=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ c=4-b \\ b-3-(4-b)=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ c=4-b \\ 2b=4 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ c=2 \\ b=2 \end{cases}$

où $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{2}{x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$ De même $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$

$\left.\begin{array}{l} 3x^2+4x-3=-4 \\ x^2-1=0^+ \\ x^2-1=0^- \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to <-1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to >-1} f(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} 3x^2+4x-3=4 \\ x^2-1=0^- \\ x^2-1=0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to <1} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to >1} f(x) = +\infty$

Asymptotes : x = 1 A.V
x = -1 A.V
y = 3 A.H

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-	0	+	

3) $\dfrac{(6x+4)(x^2-1)-(3x^2+4x-3)(2x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x^2-4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

$\left.\begin{array}{l} \forall \in Df \;\; x^2+1>0 \;\; \text{(somme de 2 carrés)} \\ \text{donc } -4(x^2+1)<0 \\ \forall \in Df \;\; (x^2-1)^2>0 \end{array}\right\}$ $\forall \in Df \;\; f'(x) < 0$

4)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
		-		-		-	
f(x)	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

5) I (0;f(-))   I (0;3)   Df est symétrique par rapport à 0

$$f(x) + f(a+x) = f(-x) + f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1} + \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1} = \frac{6x^2-6}{x^2-1} = \frac{6(x^2-1)}{x^2-1} = 6 = 2 \text{ x } 3$$

I(0;3) est centre de symétrie

6) y = 3 + (-4)x
y = -4x+3

7) Soit $h(x) = f(x) - (-4x+3) = \dfrac{3x^2+4x-3}{x^2-1} - \dfrac{(-4x+3)(x^2-1)}{x^2-1}$

$$= \frac{3x^2+4x-3+4x^3-4x-3x^2+3}{x^2-1} = \frac{4x^3}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$4x^3$		-	|	-	|	+	|	+	
x^2-1		+	0	-	|	-	0	+	
f(x)		-	‖	+	0	-	|	+	

Sur]-1 ;0[h(x) > 0
f(x) > -4x + 3
Cf est au dessus de (T)

Sur]0 ;1[f(x) < -4x + 3
Cf est en-dessous de (T)
Cf et (T) se coupent au point I

8)

x	0	0,5	0,7	1,2	2	3	4	5
f(x)	3	3	-2,99	13,9	5,7	4,5	4,5	3,8

9) $(3-m)\, x^2 + 4x + m-3 = 0$
$3x^2 + 4x - 3 = mx^2 - m$
$3x^2 + 4x - 3 = m(x^2-1)$
$\dfrac{3x^2+4x-3}{x^2-1} = m$
f(x) = m

On trouve la droite d'équation y=m et on détermine graphiquement en combien de points elle coupe Cf.

- Si $m \in]-\infty\ ;3[$ 2 solutions
- Si m = 3 1 solution (x = 0)
- Si $m \in]3\ ;+\infty[$ 2 solutions

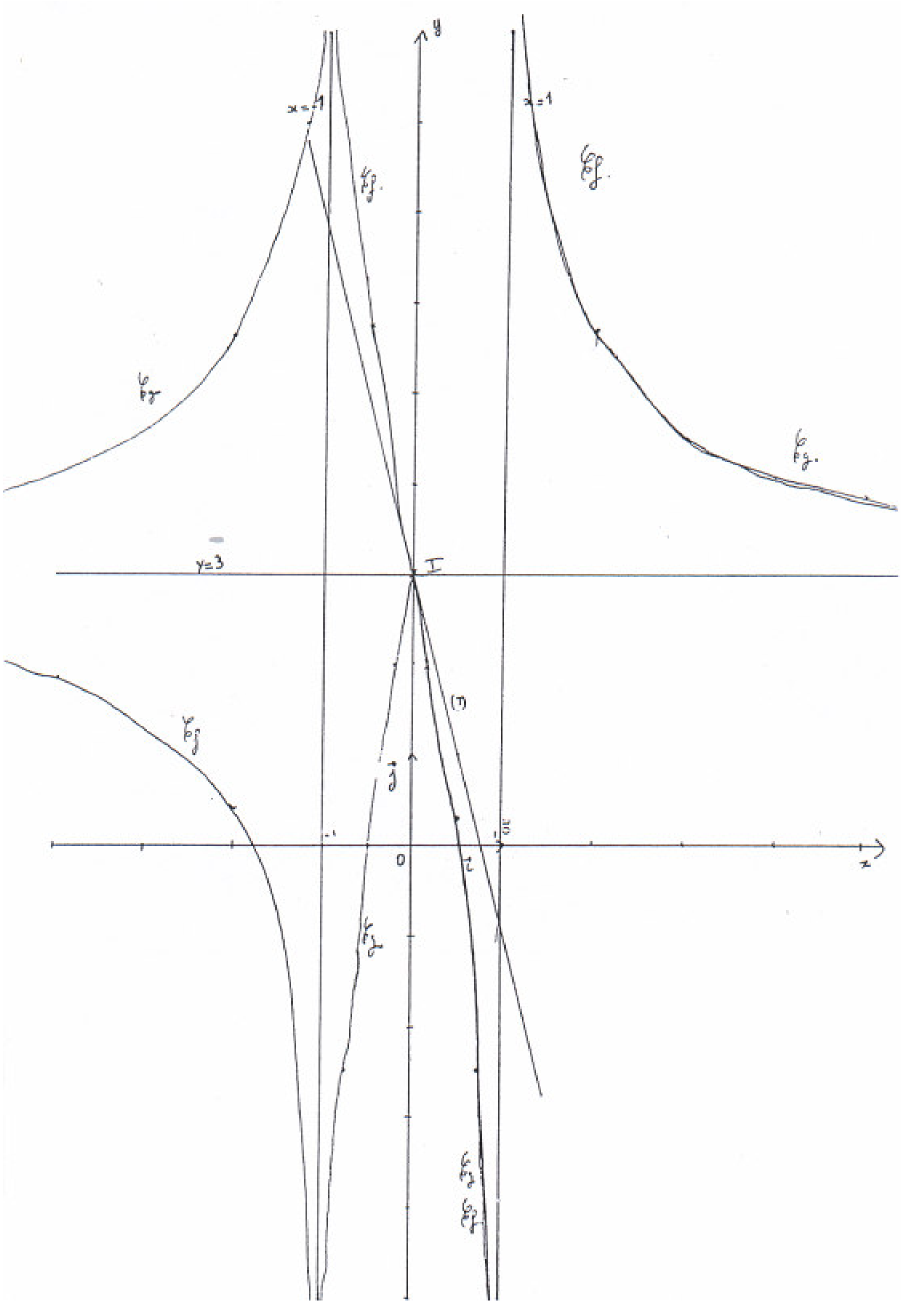
10) a) Dg = R - $\{-1;1\}$ symétrique par rapport à 0

$$g(-x) = \frac{3x^2 + 4|-x| - 3}{(-x)^2 - 1} = \frac{3x^2 + 4|x| - 3}{x^2 - 1} = g(x) \Rightarrow \text{ g paire}$$

b) Si $x \geq 0$ $g(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 1} = f(x)$

Sur [0 ;1[U
]1 ;+∞[Cg = Cf
Sur]-∞ ;-1[U]-1 ;0], on construit la symétrie deCg par rapport à (y'oy) puisque g est paire

11)



Guesmi.B

CORRECTION DEVOIR9

Thème : *Etude de fonction rationnelle*

:

Solutions

1) f est définie, continue et dérivable si $x^2 - 1 \neq 0$ donc sur $]-\infty,-1[$, $]-1;1[$ et $]1,+\infty[$.

2) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}} = -\infty$

car $-\dfrac{1}{x}$, $-\dfrac{6}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^3}$, $-\dfrac{1}{x^2}$ ont pour limite 0 en $-\infty$.

• par la même méthode on trouve $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

•

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $x^2 - 1$		+	0	-	0	+	

$\lim\limits_{x \to -1} 2x^3 - x^2 - 6x + 1 = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x^2 - 1 = 0^+$ donne $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 - 1 = 0^-$ donne $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} 2x^3 - x^2 - 6x + 1 = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 - 1 = 0^-$ donne $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 - 1 = 0^+$ donne $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$

3) Méthode par division

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 - 6x + 1 & x^2 - 1 \\ \hline -(2x^3 \quad -2x) & 2x - 1 \\ \quad - x^2 - 4x + 1 & \\ \quad -(-x^2 \quad + 1) & \\ \qquad - 4x & \end{array}$$

d'où $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{4x}{x^2 - 1}$

Méthode par identification

$ax + b + \dfrac{cx + d}{x^2 - 1} = \dfrac{(ax + b)(x^2 - 1) + cx + d}{x^2 - 1} = \dfrac{ax^3 + bx^2 + (-a + c)x - b + d}{x^2 - 1}$

Par identification des coefficients avec ceux de f(x) on obtient :

$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ -a + c = -6 \\ -b + d = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -4 \\ d = 0 \end{cases}$ le résultat est le même.

4) Les droites d'équation x = -1 et x = 1 sont asymptotes.

La question précédente fait apparaître 2x - 1, or

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) -(2x -1) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4x}{x^2 -1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 0, \text{ car}$$

$\lim_{x\to -\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ car $\frac{1}{x^2}$ a pour limite 0. on obtient le même résultat en $+\infty$.

La droite d'équation y = 2x - 1 est donc asymptote de (C).

5) $f'(x) = \frac{(6x^2 -2x -6)(x^2 -1) -(2x^3 -x^2 -6x +1)(2x)}{(x^2 -1)^2} = \frac{2(x^4 +3)}{(x^2 -1)^2}$

f '(x) > 0 sur les intervalles du domaine de définition de f, f est donc croissante sur ces intervalles.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f '(x)		+	$\Vert$	+	$\Vert$	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6) L'équation de (T) est y - f(0) = f '(0)(x - 0) soit y = 6x - 1.

On étudie le signe de $f(x) -(6x -1) = 2x -1 -\frac{4x}{x^2 -1} -6x +1 = -4x -\frac{4x}{x^2 -1} = \frac{-4x^3}{x^2 -1}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-4x^3$		+	|	+	0	-	|	-	
$x^2 - 1$		+	0	-	|	-	0	+	
f(x) - (6x - 1)		+	$\Vert$	-	0	+	$\Vert$	-	

D'où sur]-∞,-1,]0;1[(C) est au-dessus de (T) et sur]-1;0[et]1;+∞[(C) est en-dessous de (T).

7) <u>1ère méthode :</u>

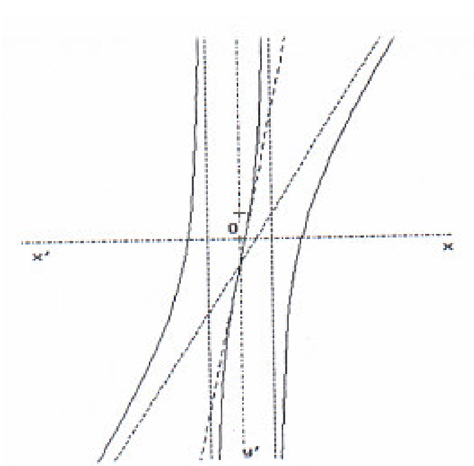
Si M a pour coordonnées (x,y) dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (X,Y) dans $(I,\vec{i},\vec{j})$, les formules de passage sont $\begin{cases} x = X \\ y = Y - 1 \end{cases}$. l'équation de (C) devient dans le nouveau repère $Y - 1 = 2X - 1 - \frac{4X}{X^2 - 1}$, soit $Y = 2X - \frac{4X}{X^2 -1} = g(X)$. Le domaine de définition de g (qui est celui de f) est symétrique par rapport à 0 et g(-X) = -g(X). g est impaire, I est centre de symétrie de (C).

<u>2ième méthode</u>

Le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0.

$$\frac{f(0+h)+f(0-h)}{2} = \frac{2h -1 -\frac{4h}{h^2 -1} +2(-h) -1 -\frac{4(-h)}{(-h)^2 -1}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 = y_I$$

I est bien centre de symétrie de (C).



CORRECTION DEVOIR10

Thème : ***Etude de fonction rationnelle***

1) f est définie et continue si $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$. $-x^2 + 2x + 3$ a pour racines -1 et 3, d'où f est continue sur [-1;3].

2)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h-1)^2 + \sqrt{-(-1+h)^2+2(-1+h)+3} - 4}{h}$$

□ $$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} h - 4 + \frac{\sqrt{-h^2+4h}}{h} = \lim_{h\to 0} h - 4 + \frac{h\sqrt{-1+\frac{4}{h}}}{h} \text{ car h > 0}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} h - 4 + \sqrt{-1+\frac{4}{h}} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h-1)^2 + \sqrt{-(3+h)^2+2(3+h)+3} - 4}{h}$$

□ $$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} h + 4 + \frac{\sqrt{-h^2-4h}}{h} = \lim_{h\to 0} h + 4 + \frac{-h\sqrt{-1-\frac{4}{h}}}{h} \text{ car h < 0}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} h + 4 - \sqrt{-1-\frac{4}{h}} = -\infty$$

f n'est pas dérivable en -1 et en 3. La courbe représentative admet en ses points d'abscisses -1 et 3 une demi-tangente verticale.

3) $f'(x) = 2(x-1) + \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} = (x-1)\left(2 - \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\right) = \frac{(x-1)\left[2\sqrt{-x^2+2x+3}-1\right]}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ f'(x) a le signe de son numérateur.

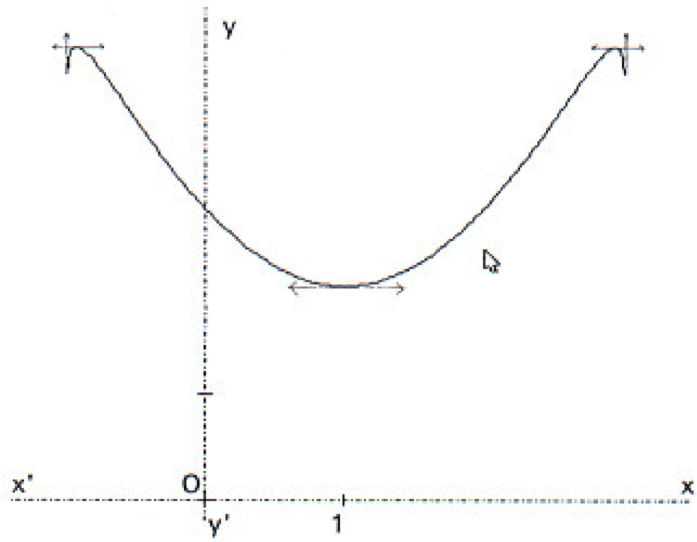
Pour $x \in D_f$, $2\sqrt{-x^2+2x+3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} > \frac{1}{2}$

On se ramène à $-x^2 + 2x + 3 > \frac{1}{4}$, soit $-4x^2 + 8x + 11 > 0$. Les racines sont $1 - \frac{\sqrt{15}}{2}$ et $1 + \frac{\sqrt{15}}{2}$. On a le tableau de signe suivant :

x	-1		$1-\frac{\sqrt{15}}{2}$		1		$1+\frac{\sqrt{15}}{2}$		3
x - 1		-	|	-	0	+	|	+	
$2\sqrt{-x^2+2x+3}-1$		-	0	+	|	+	0	-	
f '(x)	⊘	+	0	-	0	+	0	-	⊘

On en déduit que f est croissante sur $]-1;1-\frac{\sqrt{15}}{2}[$ et sur $]1;1+\frac{\sqrt{15}}{2}[$ et décroissante sur $]1-\frac{\sqrt{5}}{2},1[$ et sur $]1;1+\frac{\sqrt{15}}{2}[$.

x	-1		$1-\frac{\sqrt{15}}{2}$		1		$1+\frac{\sqrt{15}}{2}$		3
f '(x)	‖	+	0	-	0	+	0	-	‖
f	$\boxed{4}$	↗	$\boxed{\frac{17}{4}}$	↘	$\boxed{\sqrt{3}+1}$	↗	$\boxed{\frac{17}{4}}$	↘	$\boxed{4}$



5) <u>1ère méthode</u> Si M a pour coordonnées (x,y) dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ et pour coordonnées (X,Y) dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ alors x = X + 1 et y = Y. L'équation de la courbe devient $Y = X^2 + \sqrt{-X^2 + 4} = g(X)$. g, qui a un domaine de définition [-2;2] symétrique par rapport à 0, est paire.

<u>2 ième méthode</u> Le domaine de définition est symétrique par rapport à 1.

$f(1+h) = h^2 + \sqrt{-h^2 + 4}$, en remplaçant h par -h, on vérifie que f(1 + h) = f(1 - h).

Ces deux méthodes permettent d'affirmer que la droite d'équation x = 1 est axe de symétrie pour la courbe représentative de f.

Guesmi.B

CORRECTION DEVOIR11

Thème : ***Etude de fonction rationnelle et accroissement finis***

Problème

Soit f définie sur I =]1,5 ;+∞[par $f(x) = \dfrac{2}{3-2x} + \sqrt{x-1}$

Partie A

1) a) $\lim\limits_{x \to > 1,5} 3 - 2x = 0^-$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to > 1,5} \dfrac{2}{3-2x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to > 1,5} \sqrt{x-1} = \sqrt{0,5}$

donc $\lim\limits_{x \to 1,5} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ la droite d'équation x = 1,5 est asymptote verticale à (Cf)

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{3-2x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) la fonction $x \to \dfrac{2}{3-2x}$ est dérivable sur Df car il s'agit d'une fonction rationnelle.

Soit $h(x) = \sqrt{x-1}$ h est dérivable si $x-1 > 0$
$x > 1$

donc sur]1,5 ; +∞[f est dérivable.

$$f'(x) = 2 \times \frac{-(-2)}{(3-2x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{4}{(3-2x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$\forall x \in I\ (3-2x)^2 > 0$ et $\sqrt{x-1} > 0$ donc $\forall x \in I\ f'(x) > 0$

donc f est strictement $\nearrow$ sur I

x	1,5		+∞
f '(x)	‖	+	
f(x)	‖	$-\infty \nearrow$	+∞

2) a) f est continue car dérivable sur I, f est strict $\nearrow$ sur I donc f est une bijection de I sur f(I) = R.

b) Or 0 ∈ R donc 0 admet un unique antécédent dans I, donc il existe un seul réel r solution de f(x) = 0 dans I.

c) f(2) = -1 $\qquad$ f(2) < f (r) < f (2,5)

f(2,5) $\approx$ 0,22 comme f strict $\nearrow$ sur I on en déduit que 2 < r < 2,5

Partie B

A(2,-1) $\qquad$ B(2,5 ;f(2,5)) $\qquad$ $f(2{,}5) = \dfrac{2}{3-5} + \sqrt{1{,}5} = -1 + \sqrt{3/2}$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1+\sqrt{3/2}+1}{0{,}5} = \frac{\sqrt{3/2}}{1/2} = \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{1/4}} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 4} = \sqrt{6}$$

$y = \sqrt{6}\,x + b$

$A(2,-1) \in (AB) \Rightarrow -1 = \sqrt{6} \times 2 + b \qquad b = -1 - 2\sqrt{6}$

(AB) $y = \sqrt{6}\,x - 1 - 2\sqrt{6}$

3) c) $f(x) \leq 4{,}5\,x - 10$

(Cf) est en dessous de (T)

4) (T) : y = 4,5x - 10

axe des abscisses y = 0

4,5x = 10

$$x = \frac{10}{4{,}5} = \frac{10}{\frac{9}{2}} = \frac{20}{9}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{20}{9}\right) \approx -0{,}279 \\ \\ f(r) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{20}{9}\right) < f(r)$$

comme f $\nearrow$ sur I $\dfrac{20}{9} < r \Rightarrow$ c - r

Partie C

$$h(x) = 1{,}5 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3-2x} + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \dfrac{-2}{3-2x} = \dfrac{2}{2x-3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{2x-3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} = x - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{3}{2} = x$$

$f(r) = 0 \Leftrightarrow h(r) = r \qquad \left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$ avec $u(x) = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow h(x) = x$

2) $h'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{(\sqrt{x-1})^2} = \dfrac{-1}{2(\sqrt{x-1})^3}$

$2 \le x \le 2{,}5$

$1 \le x-1 \le 1{,}5$

$1 \le \sqrt{x-1} \le \sqrt{1{,}5}$ car $x \to \sqrt{x}$ est $\nearrow$ sur R^+

$1 \le (\sqrt{x-1})^3 \le \left(\sqrt{1{,}5}\right)^3$ car $x \to x^3$ est $\nearrow$ sur R

$2 \le 2(\sqrt{x-1})^3 \le 2(\sqrt{1{,}5})^3$

$\dfrac{1}{2(\sqrt{1{,}5})^3} \le \dfrac{1}{2(\sqrt{x-1})^3} \le \dfrac{1}{2}$ car $x \to \dfrac{1}{x}$ est $\searrow$ sur $R^{\infty +}$

$\dfrac{1}{2(\sqrt{1{,}5})^3} \le |h'(x)| \le \dfrac{1}{2}$ on a bien pour tout $x \in [2 ; 2{,}5]$ $|h'(x)| \le 0$

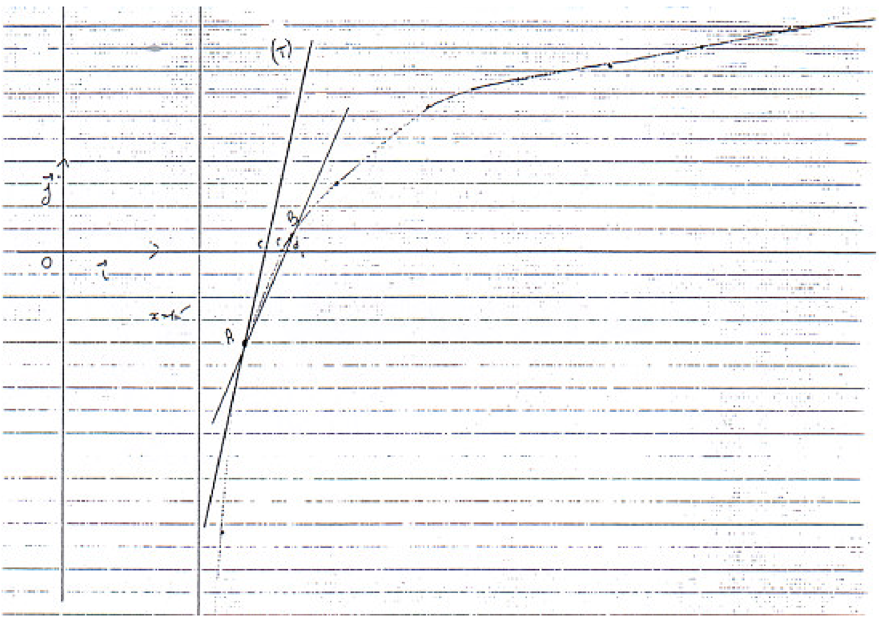
3) h est dérivable sur $[2 ;2{,}5]$ $\forall x \in [2;2{,}5]$ $|h'(x)| \le 0{,}5$

donc d'après l'inégalité des accroissement finis appliqués à $a = r \in [2 ;2{,}5]$ et $x \in [2 ;2{,}5]$

on a $|h(x) - h(r)| = 0{,}5|x - r|$ mais comme $h(r) = r$ on a $|h(x) - r| \le 0{,}5|x - r|$

4) $h(2{,}5) \approx 2{,}316$ $r' \cong 2{,}316$

$r'' = h(r') \cong 2{,}372$



Guesmi.B

CORRECTION DEVOIR12

Thème : ***Etude de fonction irrationnelle***

$D_f =]-\infty ;-1] \cup [1 ; +\infty[$

f est continue sur Df comme somme et composée de fonction continue.

Si on veut étudier la continuité en 1 :

$\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = \lim\limits_{x \to >1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x + \sqrt{x^2-1} = 1$ car $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ $\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = 1 = f(1)$ donc f est continue en 1

Idem en – 1 :

Si $x^2 - 1 > 0$
Si $x > 1$ ou $x < -1$ alors f est dérivable.

Dérivabilité en 1 :

$$\lim_{x \to >1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x \to 1} 1 + \sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x \to >1} 1 + \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} = +\infty \Rightarrow f_1 \text{ non dérivable en 1} \Rightarrow \text{demi tangente verticale d'équation } x = 1.$$

$\lim\limits_{x \to >1} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ car $x + 1 \to 2$ et $x - 1 \to 0^+$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Idem en – 1 car une demi tangente d'équation x = -1

2) Si $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

$$f_1'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

Signe de f '(x) : si $x > 1$ $\quad x + \sqrt{x^2-1} > 0 \Rightarrow f_1'(x) > 0$

Si $x < -1$ $\quad f_1'(x) < 0$ ssi $x + \sqrt{x^2-1} < 0$ ssi $\underbrace{\sqrt{x^2-1} < -x}_{>0}$ ssi $\underbrace{x^2 - 1 < x^2}_{-1 < 0}$

donc sur $]1 ; +\infty[$ $f_1'(x) > 0$ et sur $]-\infty ; -1[$ $f_1'(x) < 0$.

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f_1\,'(x)$		$-$	$\|$		$\|$	$+$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	-1		1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x - \sqrt{x^2 - 1} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} f_1(x) = 0$$

3) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to +\infty} -x + \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x + \sqrt{x^2 - 1})(-x - \sqrt{x^2 - 1})}{-x - \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -x - \sqrt{x^2 - 1} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x$$ Asymptote oblique au voisinage de $-\infty$

4) $M(x,y) \in (C_1)$ Montrons que $S_0(M) \in (C_2)$
$M'(-x, -y) \in (C_2)$

$M(x,y) \leftarrow (C_1) \Rightarrow y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

$\Rightarrow -y = -x - \sqrt{(x)^2 - 1} \Rightarrow -y = -x - \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow M'(-x, -y) \in (C_1)$

6) f strict $\nearrow$ sur $[1 ; +\infty[$ et f continue sur $[1 ; +\infty[$ donc f est bijection de $[1 ;+\infty[$ sur $[1 ; +\infty[$

or $2 \leftarrow [1 ; +\infty[$ donc 2 admet 1 unique antécédent α dans $]1 ; +\infty[$

$f(1,2) \cong 1,86 \qquad f(1,3) \cong 2,13 \quad \Rightarrow \quad 1,22 \ \alpha < 1,3$

Sur $]-\infty ;-1]$ $\ -1 \leq f(x) < 0$ donc 2 n'admet pas d'antécédent dans $]-\infty ; -1]$

Guesmi.B