RELATIONS METRIQUES du TRIANGLE RECTANGLE

- **Propriétés de Pythagore.**
- **Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle.**

<u>COURS</u>

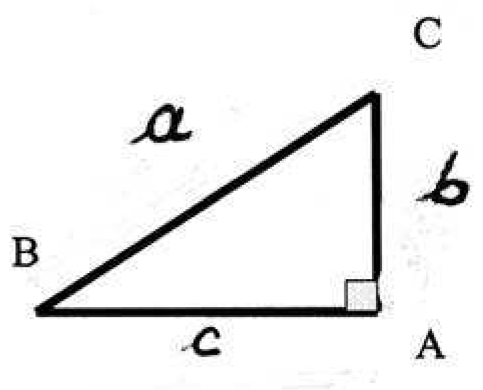
I) propriétés de Pythagore

Pré requis

Théorème : Dans un triangle rectangle : le « carré » de la longueur de l'hypoténuse (c'est à dire : la longueur de l'hypoténuse multipliée par la longueur de l'hypoténuse) est égal à la somme des « carrés » des longueurs des cotés (du triangle) formant l'angle droit.

b) si l'on nomme les cotés par des lettres. :

alors on peut écrire :

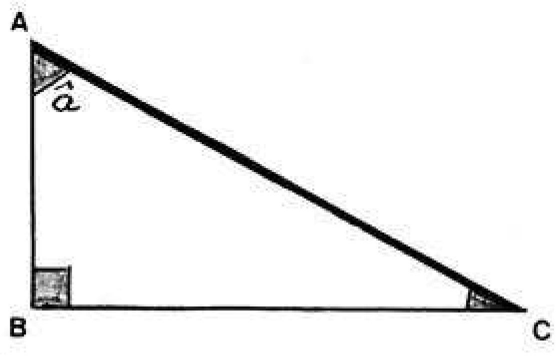


$(BC)^2 = (BA)^2 + (AC)^2$

si BC = a ; BA = b ; AC = c

ou $a^2 = b^2 + c^2$

a) si l'on nomme les sommets du triangle , par une lettre : (A ; C et B angle droit)



si :

AC désigne la longueur de l'hypoténuse.

AB désigne la longueur d'un coté formant l'angle droit
BC désigne la longueur d'un coté formant l'angle droit
On peut écrire, d'après « Pythagore » :
AC fois AC = AB fois AB + BC fois BC
soit : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

2) Propriété réciproque :

Soit un triangle ABC : si $AC^2 = AB^2 + BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en B.

Exemple 1 : soit un triangle dont on relève les mesures : 50 ; 30 ; 20
Vérifier, en calculant si $50^2 = ? = 30^2 + 20^2$? alors, d'après la réciproque de Pythagore, on ne peut pas affirmer que le triangle est « rectangle ».

Exemple 2 : soit un triangle dont on relève les mesures : 50 ; 40 ; 30
si $50^2 = 40^2 + 30^2$ alors, d'après la réciproque de Pythagore, affirmer que le triangle est « rectangle ».

II) RELATIONS TRIGONOMETRIQUES :

1°) Mesure des angles :

Les Unités d'angles :
Le radian (rad) est l'unité légale du système international utilisé pour l'étude des mouvement circulaire .
Le degré (°) est l'unité la plus souvent utilisée en géométrie .
Le grade (gr) est l'unité utilisée dans certains métiers.

Conversions :
Si « x » désigne la mesure d'un angle en degrés, « y » sa mesure en radian et « z » sa mesure en grades, alors on peut établir les relations de proportionnalité suivantes :

$$\frac{x}{360} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{400}$$

Angles remarquables :

(°)	0	30	45	60	90

(rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

2°) Rapports trigonométriques

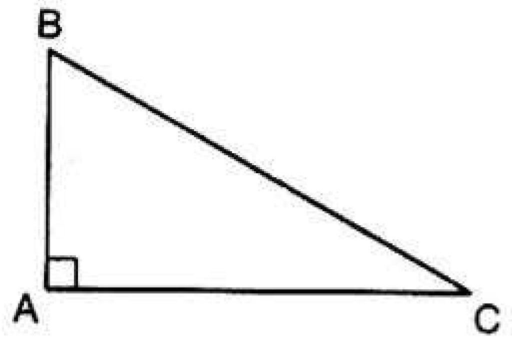
Les rapports trigonométriques ont pour but d'établir des relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle .

C'est après avoir choisi l'angle aigu que l'on détermine le côté opposé et le côté adjacent .

$\sin\ \text{us.}\hat{} = \frac{\text{côté..opposé}}{\text{hypoténuse}}$	$\cos\ \text{inus .}\hat{} = \frac{\text{côté..adjacent}}{\text{hypoténuse}}$	$\text{tagente .}\hat{} = \frac{\text{côté..opposé}}{\text{côté.adjacent}}$

Ainsi dans le triangle rectangle en B , par rapport à l'angle $\hat{A}$:

CB est le côté opposé à l'angle
A et BA le côté adjacent à l'angle A .



Les rapports trigonométriques permettent d'établir les relations :

$\sin\ \hat{A} = \frac{CB}{CA}$; $\cos\ \hat{A} = \frac{BA}{CA}$; $\tan\ \hat{A} = \frac{CB}{BA}$

Voir exercices
remarque :on obtiendrait des relations similaires avec l'angle « C ».

ainsi :

$\sin\ \hat{C} = \frac{BA}{CA}$ $\cos\ \hat{C} = \frac{CB}{CA}$; $\tan\ \hat{C} = \frac{BA}{CB}$

III)PROPRIETES *:*

1°) Les angles complémentaires

Pré requis :

Pour un même triangle nous avons obtenu les égalités suivantes :

$\sin \hat{A} = \frac{CB}{CA}$; $\cos \hat{A} = \frac{BA}{CA}$; $\tan \hat{A} = \frac{CB}{BA}$; $\sin \hat{C} = \frac{BA}{CA}$; $\cos \hat{C} = \frac{CB}{CA}$; $\tan \hat{C} = \frac{BA}{CB}$

on remarque que : $\cos \hat{A} = \frac{BA}{CA}$ et $\sin \hat{C} = \frac{BA}{CA}$ on en déduit que $\cos \hat{A} = \sin \hat{C}$

de même que $\sin \hat{A} = \frac{CB}{CA}$ et $\cos \hat{C} = \frac{CB}{CA}$ sont équivalentes on peut aussi en déduire que : $\sin \hat{A} = \cos \hat{C}$

On sait que $\hat{A} + \hat{C} = 90°$ cela signifie que $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont des angles complémentaires.

Conclusion :le sinus et le cosinus de deux angles complémentaires sont égaux

2°) relation entre tangente , sinus et cosinus :	Pré requis :
La tangente d'un angle est egale au rapport du sinus par le cosinus de l'angle considere Explications : on veut montrer que	

$$\tan \hat{C} = \frac{BA}{CB}$$

Nous avions trouvé précédemment que :

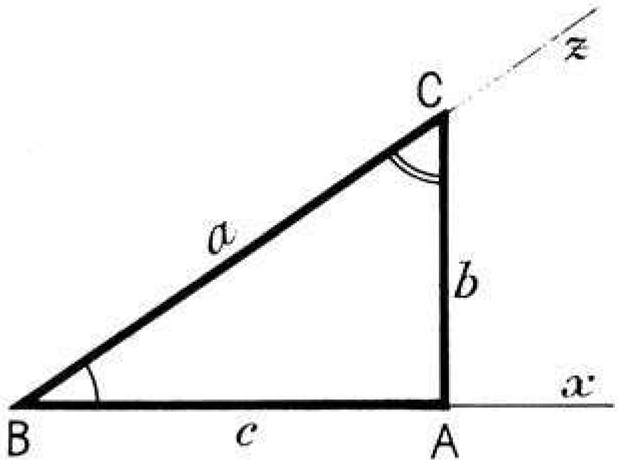
$\sin \hat{C} = \frac{BA}{CA}$; $\cos \hat{C} = \frac{CB}{CA}$; $\tan \hat{C} = \frac{BA}{CB}$

On pose :

$$\frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}} = \frac{\frac{BA}{CA}}{\frac{CB}{CA}}$$

calculs $\frac{\frac{BA}{CA}}{\frac{CB}{CA}} = \frac{BA}{CA} : \frac{CB}{CA} = \frac{BA}{CA} \times \frac{CA}{CB} = \frac{BA}{CB} =$

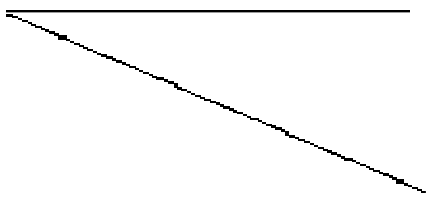
ainsi : $\tan \hat{C} = \frac{BA}{CB}$



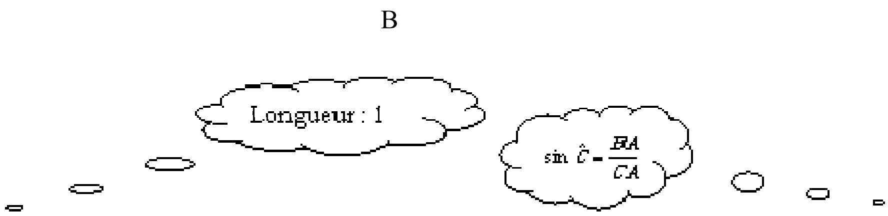
$\sin \hat{C} = \frac{BA}{CA}$ Longueur : 1 $\cos \hat{C} = \frac{CB}{CA}$

3°) relation entre sinus et cosinus : Pré requis :

A



C



D'après « Pythagore » : AC ^{2} = AB ^{2} + BC ^{2}

On sait que $\sin \hat{C} = \frac{BA}{CA}$; $\cos \hat{C} = \frac{CB}{CA}$

on peut écrire : $1^2 = (\sin \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2$

Transformations : $\left(\frac{BA}{CA}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2}$; $\left(\frac{CB}{CA}\right)^2 = \frac{BC^2}{AC^2}$	

L'égalité : $(\sin \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2 = \left(\frac{BA}{CA}\right)^2 + \left(\frac{CB}{CA}\right)^2$

Devient l'égalité $(\sin \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2}$

$(\sin \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$	

Or d'après « Pythagore » : AC ^{2} = AB ^{2} + BC ^{2}

- *On remplace dans l'égalité précédente* $AB^2 + BC^2$ par : AC^2

- *Nous obtenons une nouvelle égalité :* $(\sin \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2 = \frac{AC^2}{AC^2}$

puisque $\frac{AC^2}{AC^2} = 1$ *, on peut écrire que :*

$$(\sin \hat{C})^2 + (\cos \hat{C})^2 = 1$$

CONCLUSION :la somme des carrés du sinus et du cosinus d'un angle est égal à 1

Pour en savoir plus :

IV) Valeurs trigonométriques des angles remarquables .

Entre 0° et 90° (le quart de cercle)

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$	1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	0
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$	1	$\sqrt{3}$	∞

- : $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
-

Entre 0° et 180° ***graduation d'un cercle.***

Entre 0° et 180° : *(le demi cercle)*

angles (rd)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
angles (d°)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cotg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

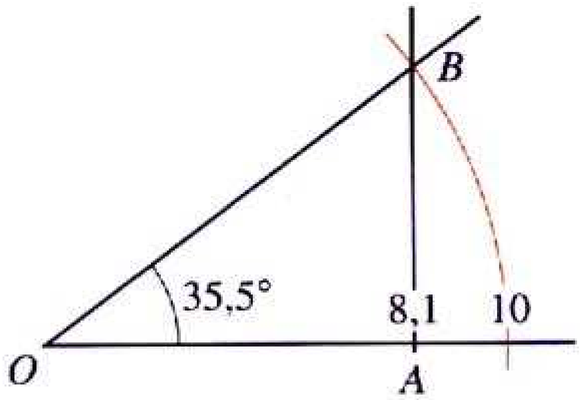
Entre 0° et 360° …… *graduation d'un cercle.*

V) Construction et mesure d'un angle :

Construction :d'un angle de 35,5°à l'aide du cosinus :

On recherche le cosinus de 35,5° :

≈ 0,81 soit = $\frac{0,81}{10}$



procédure de tracé :

-tracer un arc de rayon 10 cm ;

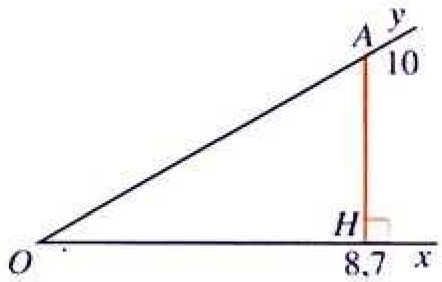
- sur [Ox) placer le point « A » tel que OA = 8,1 cm
- tracer une perpendiculaire à [Ox) passant par « A » et coupant l'arc de cercle en « B »
- l'angle AOB vaut 35,5° (à vérifier avec un rapporteur)

Conclusion :pour construire un angle on peut utiliser un rapport trigonométrique.

VI) MESURE d' un ANGLE :

Mesure d'un angle « xOy » donné sans le rapporteur .

Procédure :

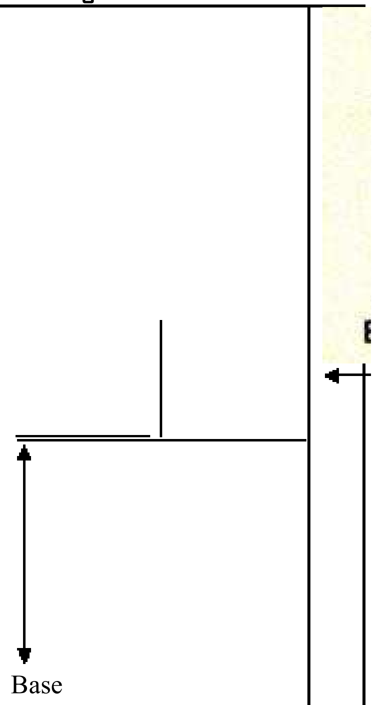


-placer un point « A » sur [Oy) tel que OA = 10 cm ;

- tracer la projection orthogonale de « A » sur [Ox) (image de « A » est « H »)
- mesurer la longueur « OH » (= 8,7 cm)
- on en déduit le cosinus de l'angle « xOy » = $\frac{8,7}{10}$ = 0,87
- A l'aide de la calculatrice on obtient la valeur de l'angle = 29,5°

III) Détermination d'une « longueur » appelé « hauteur » à partir de calculs d'aires

Rappel : cas d' égalité des deux calculs d'aire dans un triangle rectangle



On peut écrire :

$$\frac{longueur \times l\arg eur}{2} = \frac{base \times hauteur}{2}$$

ce qui donne après simplification : BC × h = BA × AC

<u>Application :</u>

Dans un triangle rectangle on nous donne :

BC = ? h = ? BA = 16 cm AC = 5 cm

On veut connaître la longueur de l'hypoténuse et la longueur de la hauteur.

Résolution :

il faut calculer BC pour trouver la valeur de « h » <u>(voir Pythagore</u>**)**

TRAVAUX AUTO FORMATIFS.

CONTROLE:

1°) Citez la propriété de Pythagore et sa réciproque.

2°) Citez les rapports trigonométriques d'un angle aigu

.3 °) Propriétés : (énoncées à partir du sinus et du cosinus) ; compléter les phrases :

a) deux angles sont complémentaires si :

b) la tangente est égale au rapport du :

c) « 1 » est égal à quelle somme ?

EVALUATION:

Exercices :	inter discipline : aire du triangle rectangle

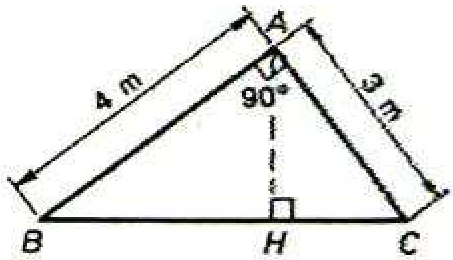
1°) Compléter ce tableau !

Triangle rectangle	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4
Grand coté « G »	18 m		40	
Petit coté « l »	5 m			35
Hypoténuse « L »	Voir « Pythagore »	45 cm	50	65
Hauteur « H »	Voir : relation métrique dans le triangle rectangle	12 cm		
Aire « A »				
Périmètre « P »				

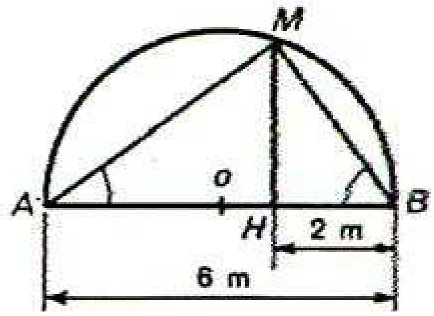
Enoncé : N°2 SOS Cours

Calculer la longueur de la hauteur AH

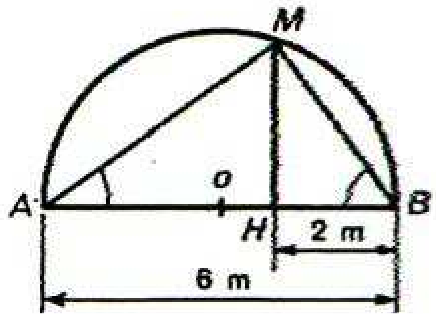
(1,2 m)



Calculer en fonction de HA et HB ; $(HM)^2$

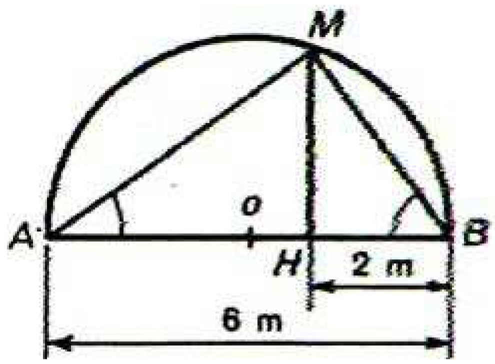


Calculer HM



Enoncé : N°5 SOS Cours

Calculer en fonction de BH et BA ; $(BM)^2$



INTERDISCIPLINARITES

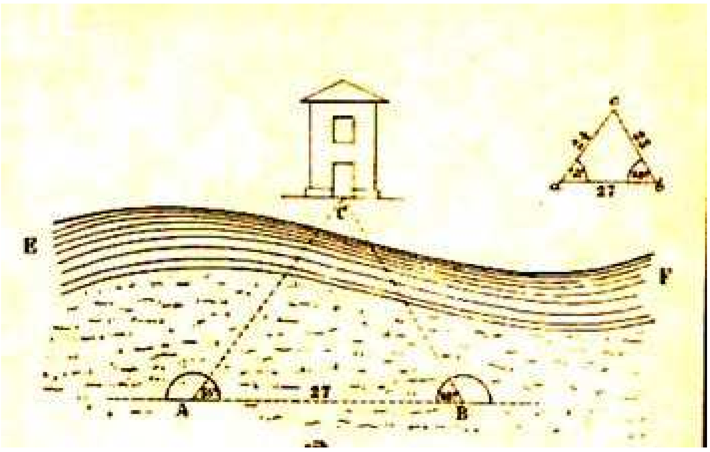
Problèmes :

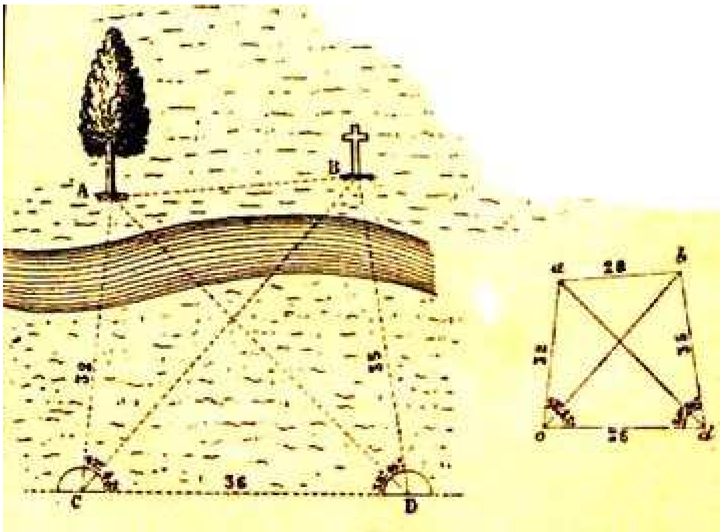
1°) La hauteur sous plafond est de 250 cm ; les dimensions d'une armoire sont de 243 cm par 72 cm par 45 cm . L'armoire est couchée , parviendra-t-on à la « redresser » ?

2°) On achète une échelle de 10 m déployée ; on l'adosse à un mur ; la législation impose que la distance entre le pied de l'échelle et le mur doit être au moins égale à H / 4 . Faire le croquis ; quelle est la hauteur que peut atteindre le haut de l' échelle ?

3°) Une route à une pente de 15% , quelle est la valeur de l'inclinaison en degré ?

4°) On parle d'une pente de 100 % ; quelle est la valeur en degré de cette pente ?

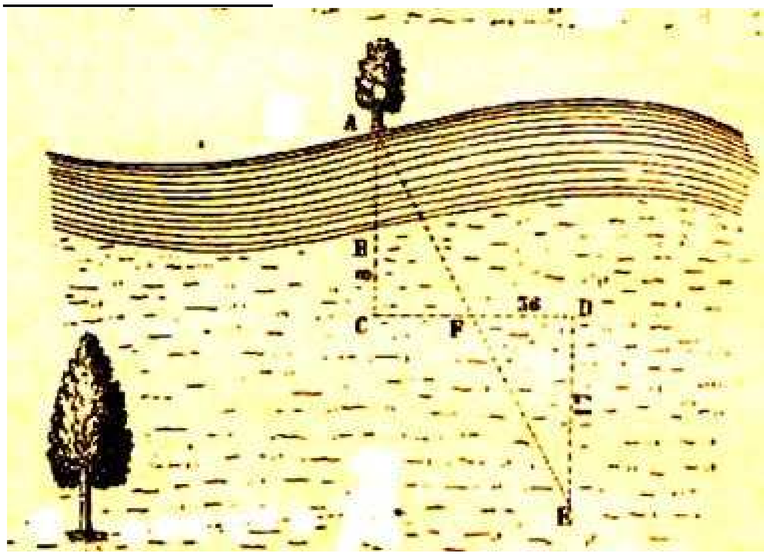




A
B
C
36
D
a
28
b
32
35
c
26
d

7°)

Voir « ARPENTAGE »



p>