Qcm

SIMILITUDES

GUESMI.B

E1 Soit T la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que $z'=(1+i)\times\bar{z}+i$ et $\Omega(-1)$.

A ☐ $\Omega M'=2\times\Omega M$

B ☐ T est la composée commutative d'une homothétie $h\left(\Omega,\sqrt{2}\right)$ et d'une symétrie d'axe $(O\Omega)$

C ☐ Cette transformation n'admet pas d'invariant car c'est une similitude indirecte.

D ☐ Cette transformation admet une droite de points invariants

E ☐ $T=h\left(\Omega,\sqrt{2}\right)\circ r\left(\Omega,\frac{\pi}{4}\right)\circ S_{(Ox)}$

A- Naturellement, on est amené à chercher l'affixe de $\overrightarrow{\Omega M'}$, soit : z'+1 ; Or $z'+1=(1+i)\times\bar{z}+i+1=(1+i)\times(\bar{z}+1)$, $z'+1=(1+i)\times(\overline{z+1})$; en prenant le module, on obtient $\Omega M'=\sqrt{2}\times\Omega M$ car $|(\overline{z+1})|=|(z+1)|=\Omega M$ et $|1+i|=\sqrt{2}$. La réponse A est donc fausse

B- L'écriture d'une telle homothétie est : $z'+1=\sqrt{2}\times(z+1)$; l'écriture d'une symétrie d'axe (OΩ) soit d'axe (Ox) est $z''=\overline{z'}=\overline{\sqrt{2}(z+1)-1}=\sqrt{2}\times\bar{z}+\sqrt{2}-1$. Si on fait d'abord la symétrie puis l'homothétie, on trouve la même écriture ; ce qui ne correspond pas à la transformation. B est fausse

C- Cherchons à résoudre $z=(1+i)\times\bar{z}+i$ soit

$x+iy=(1+i)\times(x-iy)+i \Leftrightarrow x+iy=x+ix-iy+y+i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2iy=ix+i\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0=x+1\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow$ Ω est invariant. On pouvait s'en douter au vu de la question A, mais là, on a prouvé que c'est le seul invariant, bien que ce soit une similitude indirecte.

D- On vient de montrer qu'il n'y a qu'un invariant. D est fausse

E- La réponse E est correcte. On a écrit à A que $z'+1=(1+i)\times(\overline{z+1})$ soit

$z'+1=\sqrt{2}\times e^{i\frac{\pi}{4}}\times(\overline{z+1})$, écriture qui correspond à la composée des 3 transformations citées dans l'ordre (on fait d'abord la symétrie, puis la rotation, puis l'homothétie).

E2 OAB et OCD sont des triangles rectangles isocèles directs en O. I est le milieu de [OB] et J le milieu de [OD]

A ☐ Il existe une similitude s directe telle que $s(A)=I$ et $s(C)=J$

B ☐ Il existe une similitude s' indirecte telle que $s'(C)=B$ et $s'(D)=A$

C ☐ $s=h\left(O,\sqrt{2}\right)\circ r\left(O,\frac{\pi}{2}\right)$

D $s = h\left(O, \frac{1}{2}\right) \circ r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$

E $(IJ) \perp (AC)$

A- A,I,C,J sont quatre points distincts. Il existe donc une similitude unique transformant A en I et C en J.

B- De même, dans le plan on a un théorème identique d'existence d'une similitude indirecte transformant C en B et D en A.

C- La similitude de centre O de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme A en I et C en J. D'après la question A, il existe une seule similitude, on vient d'en trouver une, c'est donc la bonne. On a donc $s = h\left(O, \frac{1}{2}\right) \circ r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, et C est fausse

D- De même D est fausse

E- Une propriété des similitudes directes est :

$$A \longrightarrow I$$
$$C \longrightarrow J$$

Alors $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{IJ}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $(IJ) \perp (AC)$ et E est juste

E
3

Soit $f = r \circ s$ où r est une rotation et s une symétrie axiale. g est une application qui à M(z) associe M'(z') / $(z' - i) = (1 + i) \times \overline{(z - i)}$ et h est une application qui à M(z) associe M'(z') / $z' = -i \times z + i \times \bar{z}$ $\Omega(-1)$ et $\Omega(i)$

A f est une similitude indirecte

B h est une similitude

C g est une similitude.

D g est une similitude indirecte qui admet deux points fixes dont l'un est Ω

E $f \circ g$ est une similitude indirecte

corrigé C3

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-C-

A- une rotation conserve les angles orientés ; une similitude les transforme en leurs opposé ; f est donc une isométrie indirecte et donc une similitude indirecte

B- L'écriture de h est : $z' = i \times (-z + \bar{z}) = -2iy$ où y est la partie réelle de z. ce n'est pas l'écriture complexe d'une similitude

C- L'écriture de g est de la forme $z' = a\bar{z} + b$, c'est donc une similitude indirecte. C est juste

D- G est bien une similitude indirecte. Si on résout l'équation $(z-i) = (1+i) \times \overline{(z-i)}$, on obtient une équation de degré 1 qui n'admet qu'une seule solution : Ω. Il n'y a pas deux points fixes. D est fausse

E- f et g sont 2 similitudes indirectes. La composée de 2 similitudes indirectes est une similitude directe. E est donc fausse

E4 Soit s la transformation plane qui à M(z) associe M'(z') telle que $z' = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right) \times z + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ et soit $\Omega(2)$.

A s admet un point invariant : $\Omega(2)$

B $\Omega MM'$ est rectangle en M

C $\Omega MM'$ est rectangle en M'

D ☐	$s \circ r\left(O,-\frac{\pi}{6}\right)$ est une homothétie
E ☐	$\left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{\Omega M}\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$

A- Il s'agit bien d'une similitude vu son écriture complexe. La résolution de l'équation $z=\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)\times z+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ montre qu'il existe une seule solution : z=2 ; A est donc vraie

B- Il faut calculer

$$\frac{\omega-z}{z'-z}-\frac{2-z}{\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)\times z+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)-z}-\frac{2-z}{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}\right)\times z+2\times\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)}$$

$$\frac{\omega-z}{z'-z}=\frac{2-z}{\left(\frac{+1-i\sqrt{3}}{4}\right)\times -z+2\times\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{4(1+i\sqrt{3})}{4}=1+i\sqrt{3}$$

. Il n'est pas besoin d'aller plus loin pour savoir que l'argument de ce complexe ne vaut pas $\frac{\pi}{2}$, mais $\frac{\pi}{3}$

C- Il faut calculer

$$\frac{z'-\omega}{z'-z}=\frac{\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)\times z+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)-2}{\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)\times z+\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)-z}=\frac{\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)\times z-\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}\right)\times z+2\times\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)}$$

$$\frac{z'\quad\omega}{z'-z}=\frac{\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)\times(z-2)}{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}\right)\times(z-2)}=-i\sqrt{3}$$

Puis $\arg\left(\frac{z'-z}{z'-\omega}\right)=\left(\overrightarrow{\Omega M'},\overrightarrow{MM'}\right)=[2\pi]==-\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Ceci prouve que le triangle est bien rectangle en M'. C est juste

D- On sait que $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\arg\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)[2\pi]$ or $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$ et $\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right)=\arg\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$; E est donc fausse

E- On sait que s est une similitude de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c'est le module de $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)$).

On a donc $s\left(\Omega,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{6}\right)=h\left(\Omega,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\circ r\left(\Omega,\frac{\pi}{6}\right)$

Et $s\circ r\left(O,-\frac{\pi}{6}\right)=h\left(\Omega,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\circ r\left(\Omega,\frac{\pi}{6}\right)\circ r\left(O,-\frac{\pi}{6}\right)$

Or la composée de 2 rotations de centres distincts dont la somme des angles est nulle est une translation. La composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie de même rapport. La réponse est vraie.

E5	Soit A(a), B(b), C(c), A′(a′), B′(b′), C′(c′)
A ☐	ABC et A′B′C′ sont directement semblables $\Leftrightarrow \dfrac{c'-a'}{c-a}=\dfrac{b'-a'}{b-a}$
B ☐	ABC et A′B′C′ sont indirectement semblables $\Leftrightarrow \dfrac{c'-a'}{c-a}=\overline{\left(\dfrac{b'-a'}{b-a}\right)}$
C ☐	Il faut 3 points distincts et leurs images pour déterminer complètement une similitude plane
D ☐	Toute similitude directe est la composée d'une rotation et d'une homothétie
E ☐	Toute similitude directe peut être la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport négatif.

A- 2 triangles sont directement semblables si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC} \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left|b'-a'\right|}{\left|b-a\right|}=\dfrac{\left|c'-a'\right|}{\left|c-a\right|} \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\arg\left(\dfrac{c'-a'}{b'-a'}\right)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left|b'-a'\right|}{\left|b-a\right|}=\dfrac{\left|c'-a'\right|}{\left|c-a\right|} \\ \arg\left(\dfrac{b'-a'}{b-a}\right)-\arg\left(\dfrac{c'-a'}{c-a}\right)[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b'-a'}{b-a}=\frac{c'-a'}{c-a}$$

; cqfd. La réponse A est vraie

B- 2 triangles sont indirectement semblables si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC} \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left|b'-a'\right|}{\left|b-a\right|}=\dfrac{\left|c'-a'\right|}{\left|c-a\right|} \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=-\arg\left(\dfrac{c'-a'}{b'-a'}\right)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left|b'-a'\right|}{\left|b-a\right|}=\dfrac{\left|c'-a'\right|}{\left|c-a\right|} \\ \arg\left(\dfrac{b'-a'}{b-a}\right)=-\arg\left(\dfrac{c'-a'}{c-a}\right)[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b'-a'}{b-a}=\overline{\left(\frac{c'-a'}{c-a}\right)}$$

; car les modules d'un complexe et de son conjugué sont égaux et l'argument d'un conjugué est l'opposé de l'argument du complexe. La réponse B est donc juste

C- Oui. En effet 2 points et leurs images ne suffisent pas car il peut exister 2 similitudes transformant ces points en leurs images : une directe et une indirecte. Par contre 3 points non alignés forment une base du plan et tout point peut s'exprimer en fonction de ces 3 points de base.

D- La réponse est OUI franchement. On peut préciser que les centre des 2 transformations est le centre de la similitude, l'angle de la rotation est celui de la similitude, cette décomposition étant par ailleurs commutative.

E- C'est possible , en effet :
$s(\Omega,k,\alpha)=h(\Omega,k)\circ r(\Omega,\alpha)=h(\Omega,-k)\circ r(\Omega,\pi+\alpha)$. Une homothétie de rapport -1 est aussi une rotation d'angle π. La réponse E est vraie.

E6	Soit $h(\Omega,-2)$ et $r\left(\Omega,-\frac{\pi}{2}\right)$

A ☐ $h \circ r = r \circ h$

B ☐ $h \circ r$ est une similitude directe de centre Ω, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

C ☐ $h \circ r$ est une similitude directe de centre Ω, de rapport -2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

D ☐ $h \circ r$ est une similitude directe de centre Ω, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

E ☐ La composée de 2 homothéties est une homothétie

<u>corrigé C6</u>

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-D-

A- La composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre e une similitude et cette composée est commutative. Attention à ne pas dire que le rapport de la similitude est le rapport de l'homoth qui est ici négatif ! A est vraie

B- Non. Le centre est bien Ω, le rapport 2, mais l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$. Lors le rapport est négatif, il faut ajouter π à l'angle de la rotation (u homothétie de rapport -1 est une rotation d'angle π.

C- Cela pourrait presque être vrai, sauf qu'une similitude par définiti a un rapport strictement positif. C est donc fausse

D- C'est enfin la bonne réponse !

E- Pas toujours. Si le produit des rapports est 1, il s'agit d'une translation. Cette proposition est donc fausse en général.

E 7 Soit s la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle qu $z' = u^2 \times z + u - 1$ où u est un complexe quelconque..

A ☐ s est l'identité du plan si $|u| = 1$

B ☐ s est une translation $\Leftrightarrow u = \pm 1$

C ☐ s est une similitude directe de rapport $|u|^2$

D ☐ le point $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}-2}{6} - i \times \frac{\sqrt{2}+2}{6}\right)$ est le seul invariant de s si $u = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}$

E ☐ si $u = \pm e^{i\frac{\pi}{2}}$ alors $s \circ s$ est une symétrie centrale

A- Non. Pour qu'il y ait une translation, il faudrait que $u^2 = 1$. Or $|u| = 1$ n'entraîne pas que $u^2 = 1$. Par exemple $|i| = 1$ et $i^2 = -1$. A est fausse

B- Il est clair que $u = \pm 1 \Rightarrow$ s est une translation. s est une translation si et seulement si $u^2 = 1 \Leftrightarrow u = \pm 1$. B est vraie

C- L'écriture complexe de cette transformation ($a \times z + b$) prouve que c'est une similitude de rapport $|u|^2$. C est vraie

D- S est une similitude direct. Il y a donc un seul point invariant d'affixe $\frac{u-1}{1-u^2} = -\frac{1}{u+1}$, ceci est valable si u est différent de 1 (sinon c'est une translation). Or si $u = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}$, $-\frac{1}{u+1} = -\frac{1}{2} + i \times \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ou $-\frac{1}{u+1} = -\frac{1}{2} - i \times \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Cette assertion est donc fausse.

E- Si $u = \pm e^{i\frac{\pi}{2}}$, $u^2 = -1$ et $z' = -z - 1 \pm i$. s est alors une symétrie centrale de centre le point d'affixe $\frac{-1 \pm i}{2}$ ou une rotation d'angle π ou une homothétie de rapport -1. La composée $s \circ s$ est alors une translation, et même l'identité. E est donc fausse.

E 8

Soit A(a) ≠ B(b) A'(a') ≠ B'(b') et f la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que $z' = \frac{b'-a'}{b-a} \times (z-a) + a'$

A ☐ f transforme A en B et A' en B'

B ☐ f transforme A en A' et B en B'

C ☐ f est une similitude de rapport 2

D ☐ f est une homothétie de rapport $\frac{A'B'}{AB}$

E ☐ f est la seule similitude qui transforme A en A' et B en B'.

corrigé C8

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -B-

A- si on remplace z par a, on obtient z'=a'. La première proposition est fausse

B- si on remplace z par b, on obtient z'=b'. B est vraie

C- Le rapport de la similitude est $\frac{A'B'}{AB}$. Il n'y a aucune donnée permettant d'affirmer que c'est 2 ; C est fausse

D- Le rapport est correct, mais pour une similitude, pas pour une homothétie. D est donc fausse

E- NON. Il existe une seule similitude directe qui transforme A en A' et B en B'. Mais il existe aussi une similitude indirecte qui transforme A en A' et B en B'. E est fausse

E9 Soit 3 transformations du Plan f : $z'=\frac{z+\bar{z}}{2}$;

g : $z'=\frac{z-\bar{z}}{2}$ et h : $z'=a\times z+b\times\bar{z}$ où a et b sont des complexes quelconques

A ☐	
B ☐	g conserve les angles orientés
C ☐	h peut être une similitude
D ☐	h est une similitude
E ☐	$f\circ h$ peut être une similitude

A- Si $z=x+iy$, alors z'=x. L'image de $\mathbb{C}$ par f est une droite et même, c'est la droite (Ox). A est vraie

B- On a ici $z'=iy$. L'image de $\mathbb{C}$ par g est une droite et même, c'est la droite (Oy). g va donc transformer 2 droites en la même droite. Les angles ne peuvent donc pas être conservés. Si les 2 droites sont orthogonales, leurs images seront la droite (Oy). L'angle sera zéro !

C- Oui ; à condition que a=0 ou b=0. Sinon, c'est impossible car on connaît l'écriture d'une similitude plane : $z'=a\times z+b$ ou $z'=a\times\bar{z}+b$. Il n'y en a pas d'autre. Il suffit de prendre a=1 et b=1. L'image de $\mathbb{C}$ par h est une droite et de nouveau, c'est la droite (Ox)

D- Non : Au vu de ce qui précède

E- $f\circ h(z)=f(az+b\bar{z})=\dfrac{az+b\bar{z}+\overline{az+b\bar{z}}}{2}=\dfrac{(a+\bar{b})z+(\bar{a}+b)\bar{z}}{2}$. $f\circ h$ ne peut être une similitude que si $(a+\bar{b})=0$ ou $(\bar{a}+b)=0$. Ces 2 nombres sont conjugués l'un de l'autre, si l'un est nul, l'autre aussi. $f\circ h$ ne peut donc être une similitude que si $f\circ h(z)=0$. $f\circ h$ ne peut donc pas être une similitude.

E10 Soit la transformation du Plan f qui à M'z) associe M'(z') telle que : $z'=(1+i\times\tan(a))\times z-i\times\tan(a)$ où $a\in]-\pi,\pi[\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right\}$

- A ☐ f est une similitude de rapport $\dfrac{1}{\cos(a)}$
- B ☐ f est une similitude de rapport $\dfrac{1}{|\cos(a)|}$
- C ☐ l'angle de la similitude est $\pm a[\pi]$
- D ☐ l'angle de la similitude est $a[\pi]$
- E ☐ l'angle de la similitude est $a[2\pi]$

A- L'écriture de f est bien celle d'une similitude. Il suffirait que $a=\pi$ et la rapport de la similitude serait négatif, A est donc fausse.

B- Le rapport de la similitude est

$|1+i\times\tan(a)|=\left|1+i\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\right|=\left|\frac{\cos(a)+i\sin(a)}{\cos(a)}\right|=\frac{1}{|\cos(a)}$; Vues les valeurs de a, la réponse est juste.

C- L'angles de la similitude est

$\arg(1+i\times\tan(a))=\arg\left(1+i\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\right)=\arg\left(\frac{\cos(a)+i\sin(a)}{\cos(a)}\right)=\arg\left(\frac{e^{ia}}{\cos(a)}\right)$, soit encore $\arg(1+i\times\tan(a))=a-\arg(\cos(a))[2\pi]$; or $\arg(\cos(a))=0[\pi]$; donc $\arg(1+i\times\tan(a))=a[\pi]$. La réponse C est fausse

D- La réponse est donc juste

E- Elle serait juste pour certaines valeurs de a. E est donc fausse.