

EXERCICE

Question n° 1

Pour toutes les questions du test, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et le carré scalaire de \vec{u} , puis indiquer le résultat ci-dessous :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \boxed{}$$

$$\vec{u}^2 = \boxed{}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-2) + 4 \times 3 = 6$$

$$\vec{u}^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

GUESMI.B

Question n° 2

Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, puis cocher la bonne réponse ci-dessous :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \boxed{}$$

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont : colinéaires orthogonaux

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } C \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc, } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-3) + 3 \times 2 = 0.$$

On en déduit que les vecteurs sont orthogonaux (et comme aucun n'est égal au vecteur nul, ils ne sont pas colinéaires).

Question n° 3

Soit D la droite d'équation $3x - 5y + 7 = 0$.

Cocher ci-dessous la bonne réponse :

un vecteur normal de D est $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

un vecteur normal de D est $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

un vecteur normal de D est $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

De façon générale, un vecteur normal de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal de $D : 3x - 5y + 7 = 0$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ (deuxième choix).

Question n° 4

Indiquer ci-dessous les valeurs possibles pour a , b et c de façon à ce que $ax + by + c = 0$ soit une équation de la droite passant par le point $A \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a=

b=

c=

Si un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors la droite admet une équation de la forme $-2x + y + c = 0$.

De plus, la droite doit passer par $A \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc on doit avoir $-2 \times 5 + (-3) + c = 0$.

On en déduit que $c = 13$ et qu'une équation de la droite est $-2x + y + 13 = 0$.

Il faut rentrer -2, 1 et 13 (ou toute autre série proportionnelle à celle-ci).

Question n° 5

Soit $A \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Indiquer ci-dessous les valeurs possibles pour a , b et c de façon à ce que $ax + by + c = 0$ soit une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

a=

b=

c=

On a $A \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal de la hauteur est $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La hauteur admet donc une équation de la forme $3x + y + c = 0$.

Elle doit aussi passer par A , donc on doit avoir $3 \times 4 + (-1) + c = 0$.

On en déduit que $c = -11$ et qu'une équation de la hauteur est $3x + y - 11 = 0$.

Il faut rentrer 3, 1 et -11 (ou toute autre série proportionnelle à celle-ci).

Question n° 6

Soit $A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Indiquer ci-dessous les valeurs possibles pour a , b et c de façon à ce que $ax + by + c = 0$ soit une équation de la médiatrice de $[AB]$.

a=

b=

c=

On a $A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal de la médiatrice est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La médiatrice admet donc une équation de la forme $8x + 2y + c = 0$.

Le milieu I de $[AB]$ admet comme coordonnées $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$.

La médiatrice doit aussi passer par I , donc on doit avoir $8 \times 1 + 2 \times 2 + c = 0$.

On en déduit que $c = -12$ et qu'une équation de la médiatrice est $8x + 2y - 12 = 0$.

Il faut rentrer 8, 2 et -12 (ou toute autre série proportionnelle à celle-ci).

Question n° 7

Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Indiquer ci-dessous les valeurs que doivent prendre a , b et c pour que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ soit une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

a=

b=

c =

On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si

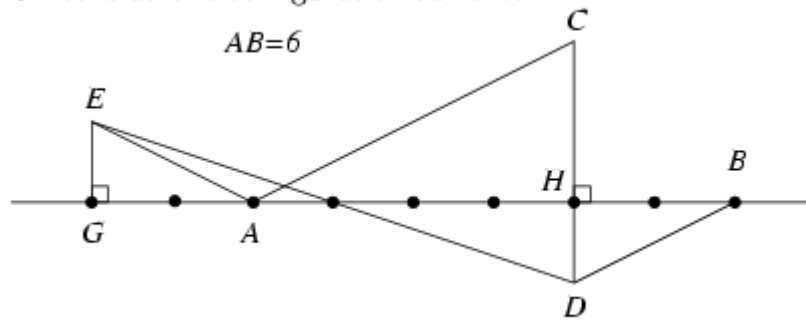
$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0.$$

On obtient : $(x-1)(x+3) + (y+2)(y-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 + y^2 - y + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + y - 5 = 0$.

Il faut rentrer 2, 1 et -5.

Question n° 8

On considère la configuration suivante :



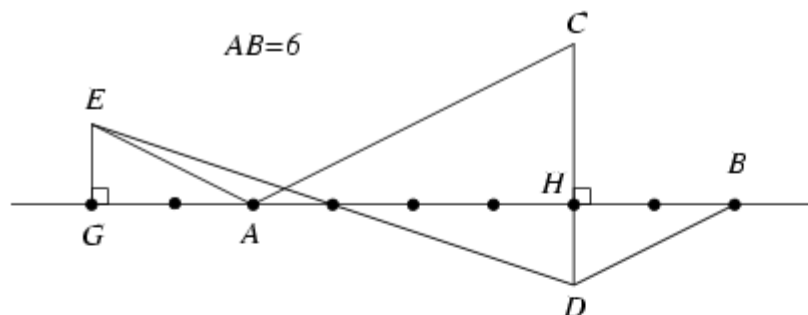
Indiquer ci-dessous les valeurs des produits scalaires demandés :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \text{}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DB} = \text{}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \text{}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = \text{}$$



$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \vec{AB} \cdot \vec{AH} && \text{(car } \vec{AC} \text{ se projette orthogonalement en } \vec{AH} \text{ sur } (AB)) \\ &= AB \times AH && \text{(car } \vec{AB} \text{ et } \vec{AH} \text{ sont colinéaires et de même sens)} \\ &= 6 \times 4 = 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{BA} \cdot \vec{DB} &= \vec{BA} \cdot \vec{HB} && \text{(car } \vec{DB} \text{ se projette orthogonalement en } \vec{HB} \text{ sur } (AB)) \\ &= -BA \times HB && \text{(car } \vec{BA} \text{ et } \vec{HB} \text{ sont colinéaires et de sens contraires)} \\ &= -6 \times 2 = -12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AE} &= \vec{AB} \cdot \vec{AG} && \text{(car } \vec{AE} \text{ se projette orthogonalement en } \vec{AG} \text{ sur } (AB)) \\ &= -AB \times AG && \text{(car } \vec{AB} \text{ et } \vec{AG} \text{ sont colinéaires et de sens contraires)} \\ &= -6 \times 2 = -12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{DE} &= \vec{AB} \cdot \vec{HG} && \text{(car } \vec{DE} \text{ se projette orthogonalement en } \vec{HG} \text{ sur } (AB)) \\ &= -AB \times HG && \text{(car } \vec{AB} \text{ et } \vec{HG} \text{ sont colinéaires et de sens contraires)} \\ &= -6 \times 6 = -36\end{aligned}$$

Question n°9

Soit $A \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et les distances AB et AC . En déduire la valeur de $\cos \widehat{BAC}$. Indiquer alors ci-dessous les **valeurs exactes** trouvées.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \boxed{}$$

$$AB = \boxed{}$$

$$AC = \boxed{}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \boxed{}$$

PRODUIT SCALAIRE EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1. (_____)

Répondre par VRAI (V) ou FAUX (F) :

Question 1

Soient A, B et C trois points distincts du plan.

- a) A, B et C sont alignés si et seulement si : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$
 b) (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
 c) A est le milieu de [BC] si et seulement si : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB^2$

Question 2

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de côté 2.

- a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -2$ b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB} = -2$ c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CO}$

Question 3

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que : $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$, alors :

- a) $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$ b) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ c) $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux

Question 4

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs tels que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, alors :

- a) $\vec{v} = \vec{w}$ b) $\vec{u} = \vec{0}$ c) \vec{u} et $\vec{v} - \vec{w}$ sont orthogonaux

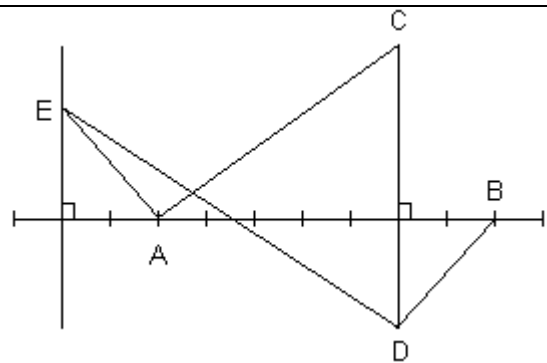
Question 5

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, alors :

- a) $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$ b) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{2}$ c) $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{14}$

Exercice n°2. (_____)

Dans la configuration ci-dessous, on a AB=7



Déterminer, par lecture graphique, les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$

Exercice n°3. (_____)

ABC est un triangle équilatéral de côté a

H est le projeté orthogonal de A sur (BC) et O le centre du cercle circonscrit à ABC.

Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

Exercice n°4. (_____)

\vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de même norme.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux

Exercice n°5. (_____)

A, B et C sont trois points du plan tels que AB=3 , AC=2 et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ radians

- 1) On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- 2) Construire les points D et E définis par $\overrightarrow{AD} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ et $\overrightarrow{AE} = -\vec{u} + 4\vec{v}$
- 3) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE}$
- 4) En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près par défaut de l'angle \widehat{DAE}

Exercice n°6. (_____)

ABCD est un rectangle de centre O tel que $AB=8$ et $AD=5$

- 1) Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- 2) On désigne par α une mesure de l'angle \widehat{AOB}
Calculer $\cos \alpha$ puis en déduire une valeur approchée par défaut à 1 degré près de α
- 3) H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC). Calculer AK et HK
- 4) Donner la valeur exacte de $\tan(\widehat{HDK})$. En déduire une valeur approchée à 1 degré près de \widehat{HDK}

Exercice n°7. (_____)

Soit ABC un triangle. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et BC dans chacun des cas suivants :

- 1) $AB=6$ cm , $AC=5$ cm et $\widehat{BAC} = 60^\circ$
- 2) $AB=7$ cm , $AC=4$ cm et $\widehat{BAC} = 120^\circ$

Exercice n°8. (_____)

On considère un triangle ABC tel que $AB=11$, $AC=13$ et $BC=16$

Déterminer une mesure en degré des trois angles de ce triangle (arrondir à 0,1 degré près)

Exercice n°9. (_____)

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$,

- 1) Déterminer une équation du cercle C_1 de centre le point A(-2 ;1) et de rayon 5
- 2) Déterminer une équation du cercle C_2 de diamètre [BC] avec B(-1 ;2) et C(3 ;-1)
- 3) Déterminer la nature de l'ensemble E_3 d'équation $x^2 + y^2 + 7x - 8y + 8 = 0$
- 4) Déterminer la nature de l'ensemble E_4 d'équation $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0$

Exercice n°10. (_____)

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$,

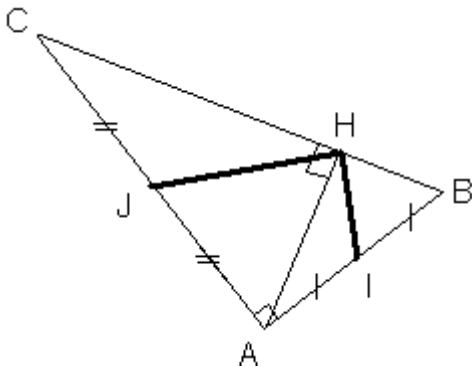
- 1) Identifier l'ensemble E d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$
Etudier l'intersection de E et de la droite (d) d'équation $x - 2y + 1 = 0$
- 2) Identifier les ensembles E_1 d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$ et E_2 d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 = 0$
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de E_1 et E_2

Exercice n°11. (_____)

ABC est un triangle rectangle en A.

H est le projeté orthogonal de A sur (BC)

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]



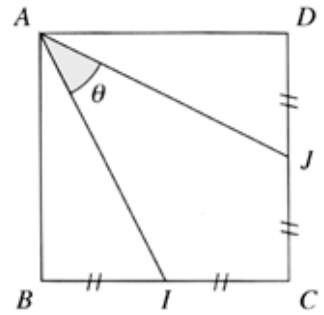
Démontrer que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

Exercice n°12. (_____)

Soit ABCD un carré de côté a , I le milieu de [BC] et J celui de [DC].

On se propose d'évaluer l'angle \widehat{IAJ} de mesure θ .

- 1) Exprimer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de a .
- 2) a). Exprimer \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{AJ} à l'aide des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} .
- b) Donner une autre expression de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
- 3) Dédire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos(\theta)$ et une valeur valeur approchée à 10^{-2} près par défaut, de θ (en degrés).



Exercice n°13. (_____)

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points A(5 ;6) et B(-1 ; -2)

- 1) Déterminer l'équation du cercle C de diamètre [AB]
- 2) Vérifier que le point D(-1 ;6) appartient à C et déterminer une équation de la tangente T à C au point D.

Exercice n°14. (_____)

On considère les points A(2;1;1) , B(3;0;2) et C(0;2;1).

On cherche à déterminer une équation du plan (ABC) de la forme $ax + by + cz = d$, par deux méthodes différentes.

- 1) a) Donner les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . Vérifiez que les points A,B et C définissent un plan (ABC).
- b) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ au plan (ABC). (on pourra écrire que $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$, et choisir a=1)
- c) En déduire une équation du plan (ABC)
- 2) En écrivant que chacun des points A,B et C appartient au plan (ABC), déterminer une équation de ce plan (On sera amené à choisir une valeur pour l'un des nombres a, b, c ou d .)

Exercice n°15. (_____)

Soient les deux plans P et P' d'équations respectives dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Pour P : $(\cos t) x + (\sin t) y - z = 0$

Pour P' : $(\cos t) x + (\sin t) y + z = 0$

où t représente un paramètre réel.

- 1) P et P' sont-ils perpendiculaires? Justifier.
- 2) Pour quelles valeurs de t l'axe Ox est-il parallèle à P ?
- 3) Donner un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans.
- 4) Calculer la distance de A(cos t, sin t, -3) au plan P.

PRODUIT SCALAIRE – CORRECTION

Exercice n°1 ()

Question 1

a) **FAUX**. En effet, si les points B, A et C sont alignés « dans cet ordre » (c'est-à-dire si A appartient au segment [BC]), alors on aura $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$

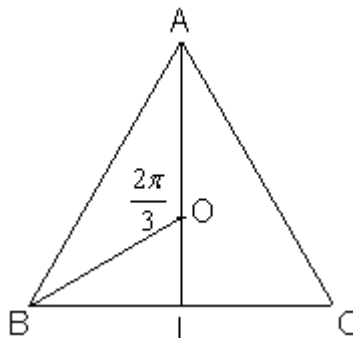
b) **VRAI** par définition

c) **VRAI** A est le milieu de [BC] ssi $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi$ [π] donc ssi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times \underbrace{AC}_{=AB} \times \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} = -AB^2$

Question 2

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de côté 2.

Notons I le pied de la médiane issue de A



a) **FAUX** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Puisque le triangle est équilatéral, la médiane [AI] est aussi hauteur, donc

d'après le théorème de Pythagore, $AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, et ainsi $OA = \frac{2}{3} AI = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

On conclut donc que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$

b) **FAUX** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ car O étant le centre de gravité du triangle équilatéral, il est aussi centre du cercle circonscrit au triangle, donc (BO) est la hauteur issue de B dans le triangle, donc est orthogonale à (AC)

c) **VRAI** En utilisant la relation de Chasles, la distributivité du produit scalaire, et la question précédente, on obtient $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CO} + \underbrace{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OB}}_0$

Question 3

a) **FAUX** on a l'équivalence $\vec{u}^2 = \vec{v}^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$ qui peut être vérifiée par des vecteurs de même norme, mais pas nécessairement égaux ou opposés.

b) **VRAI** car puisque $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ sont des quantités positives, on a l'équivalence $\vec{u}^2 = \vec{v}^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

c) **VRAI** en utilisant l'identité $\vec{u}^2 = \vec{v}^2 \Leftrightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$

Question 4

a) **FAUX** On ne peut pas « simplifier » par \vec{u} . En effet, il « suffirait » que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} d'une part, et \vec{u} et \vec{w} d'autre part, soient orthogonaux, pour que l'on ait $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, sans avoir pour autant $\vec{v} = \vec{w}$

b) **FAUX** Il « suffirait » que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} d'une part, et \vec{u} et \vec{w} d'autre part, soient orthogonaux, pour que l'on ait $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, sans avoir pour autant $\vec{u} = \vec{0}$

c) **VRAI** on a l'équivalence $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$

Question 5

a) **FAUX** A partir de l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$, on en déduit $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, donc

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \pm \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

b) **VRAI** On utilise l'identité $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 2 - 6 = 2$, d'où le résultat

c) **VRAI** On utilise l'identité $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 2 + 6 = 14$, d'où le résultat

Exercice n°2 ()

Si on appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB) (cf figure complétée), alors $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$

Puisque les vecteurs \overline{AB} et \overline{AH} sont colinéaires de même sens, on aura $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = AB \times AH = 7 \times 5 = 35$

Ainsi $\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 35}$

On « réarrange » l'écriture des vecteurs avant de calculer le produit scalaire :

$$\overline{BA} \cdot \overline{DB} = \overline{BA} \cdot (-\overline{BD}) = -\overline{BA} \cdot \overline{BD}$$

Le point H précédemment défini est le projeté orthogonal de D sur (AB), donc $\overline{BA} \cdot \overline{BD} = \overline{BA} \cdot \overline{BH} = BA \times BH$ car les vecteurs \overline{BA} et \overline{BH} sont colinéaires de même sens. Ainsi $\overline{BA} \cdot \overline{BD} = 7 \times 2 = 14$ et on conclut $\boxed{\overline{BA} \cdot \overline{DB} = -14}$

Si on appelle K le projeté orthogonal de E sur (AB) (cf figure complétée), alors $\overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AK}$

Puisque les vecteurs \overline{AB} et \overline{AK} sont colinéaires de sens contraire, on aura $\overline{AB} \cdot \overline{AK} = -AB \times AK = -7 \times 2 = -14$

Ainsi $\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{AE} = -14}$

En utilisant la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, on écrit

$$\overline{AB} \cdot \overline{DE} = \overline{AB} \cdot (\overline{DA} + \overline{AE})$$

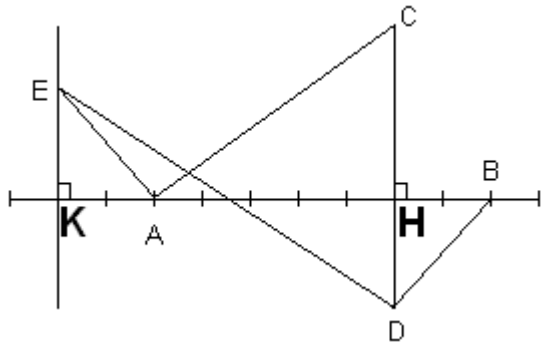
$$= \overline{AB} \cdot \overline{DA} + \overline{AB} \cdot \overline{AE}$$

$$= \overline{AB} \cdot (-\overline{AD}) + \overline{AB} \cdot \overline{AE}$$

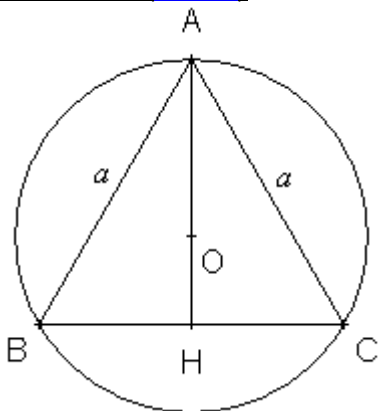
$$= -\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{AE}$$

En projetant le point D sur (AD), on obtient $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = AB \times AH = 7 \times 5 = 35$

Ainsi $-\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{AE} = -35 - 14 = -49$. On conclut $\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{DE} = -49}$



Exercice n°3 ()



1) Puisque le triangle ABC est équilatéral, l'angle \widehat{BAC} mesure $\frac{\pi}{3}$ radians

$$\text{Ainsi } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AB}\| \|\overline{AC}\| \cos(\widehat{BAC}) = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

2) 1^{ère} méthode :

On « réarrange » l'écriture des vecteurs avant de calculer le produit scalaire :

$\overline{AC} \cdot \overline{CB} = (-\overline{CA}) \cdot \overline{CB} = -\overline{CA} \cdot \overline{CB}$. Le produit scalaire $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$ se calcule comme celui ci-dessus :

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \|\overline{CA}\| \|\overline{CB}\| \cos(\widehat{ACB}) = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Ainsi $\boxed{\overline{AC} \cdot \overline{CB} = -\frac{a^2}{2}}$

2^{ème} méthode :

On utilise la relation de Chasles, et la distributivité du produit scalaire, pour écrire

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{CB} &= \overline{AC} \cdot (\overline{CA} + \overline{AB}) \\ &= \overline{AC} \cdot \overline{CA} + \overline{AC} \cdot \overline{AB} \\ &= -AC^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AC} \\ &= -a^2 + \frac{a^2}{2} \boxed{= -\frac{a^2}{2}} \end{aligned}$$

3) 1^{ère} méthode :

H est le projeté orthogonal de B sur (AH)

Ainsi $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$ (symétrie du produit scalaire)
 $= \overline{AH} \cdot \overline{AH} = AH^2$

On utilise un résultat bien connu stipulant que la hauteur AH du triangle équilatéral mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Ainsi $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = AH^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \boxed{= \frac{3}{4}a^2}$

2^{ème} méthode :

On calcule directement $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = \|\overline{AB}\| \|\overline{AH}\| \cos(\widehat{BAH})$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également bissectrice de l'angle \widehat{BAC} , de sorte que l'angle \widehat{BAH} mesure $\frac{\pi}{6}$ radians.

Ainsi $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \boxed{= \frac{3}{4}a^2}$. On retrouve le même résultat !

4) 1^{ère} méthode :

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ et de même pour la longueur OB. Enfin, l'angle \widehat{AOB} mesure $\frac{2\pi}{3}$ radians.

On calcule donc $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \|\overline{OA}\| \|\overline{OB}\| \cos(\widehat{AOB}) = \frac{\sqrt{3}}{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{3}a \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}a^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{6}a^2}$

2^{ème} méthode :

H est le projeté orthogonal de B sur (OA), de sorte que $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \overline{OH}$. Puisque les vecteurs \overline{OA} et \overline{OH} sont colinéaires de sens opposé, on aura $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = -OA \times OH$

Puisque le triangle ABC est équilatéral, la hauteur [AH] issue de A est également médiane issue de A. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est aussi centre de gravité du triangle, de sorte que $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ et

$OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$. On retrouve ainsi $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = -\frac{\sqrt{3}}{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{6}a \boxed{= -\frac{1}{6}a^2}$

Exercice n°4 ()

On applique « l'identité remarquable du produit scalaire » :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2. \text{ Mais puisque, par hypothèse, } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|, \text{ on aura } \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2, \text{ donc } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0.$$

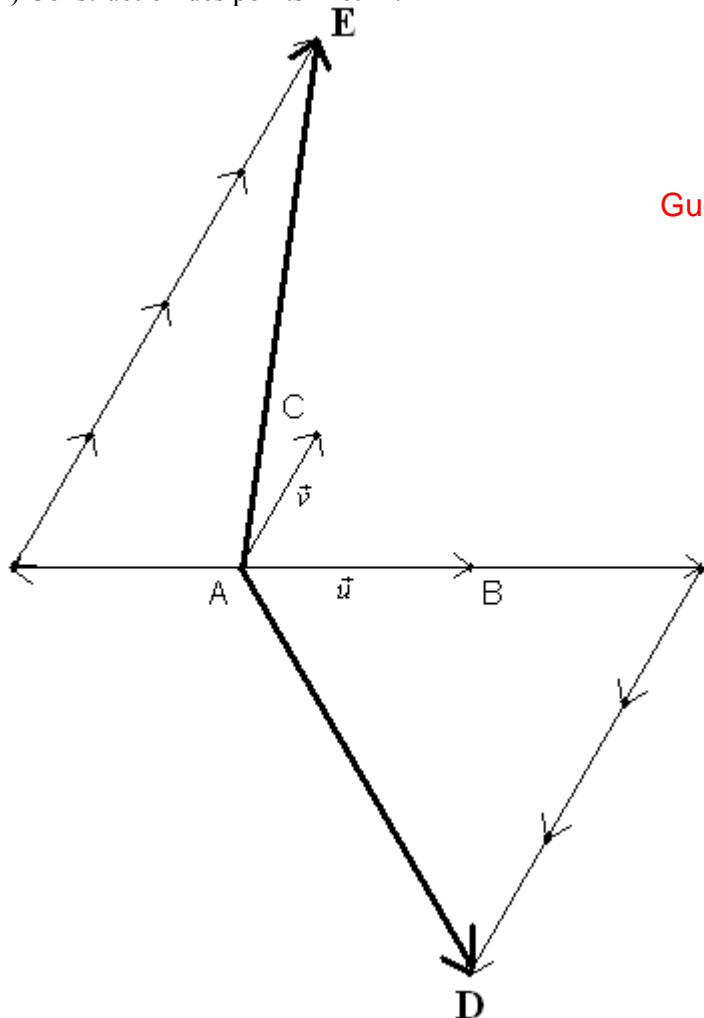
Les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont donc orthogonaux

Exercice n°5 ()

1) Le calcul de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ s'effectue directement à l'aide des données de l'énoncé :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} \boxed{= 3}$$

2) Construction des points D et E :



3) On utilise les « identités remarquables » et la distribution du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} &= (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - 3\vec{v}) = (2\vec{u} - 3\vec{v})^2 = \|2\vec{u}\|^2 - 2 \times 2\vec{u} \cdot 3\vec{v} + \|3\vec{v}\|^2 \\ &= 4\|\vec{u}\|^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2 = 4AB^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9AC^2 = 4 \times 3^2 - 12 \times 3 + 9 \times 2^2 \\ &= 36 - 36 + 36 \boxed{= 36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} &= (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) \\ &= 2\vec{u} \cdot (-\vec{u}) + 2\vec{u} \cdot 4\vec{v} - 3\vec{v} \cdot (-\vec{u}) - 3\vec{v} \cdot 4\vec{v} \\ &= -2\|\vec{u}\|^2 + 8\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 12\|\vec{v}\|^2 \\ &= -2AB^2 + 11\vec{u} \cdot \vec{v} - 12AC^2 \\ &= -2 \times 9 + 11 \times 3 - 12 \times 4 \\ &= -18 + 33 - 48 = 33 - 66 \boxed{= -33} \end{aligned}$$

Enfin,

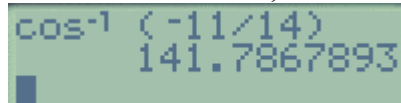
$$\begin{aligned}\overline{AE} \cdot \overline{AE} &= (-\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) = (-\vec{u} + 4\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \times (-\vec{u}) \cdot 4\vec{v} + \|4\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 8\vec{u} \cdot \vec{v} + 16\|\vec{v}\|^2 = AB^2 - 8\vec{u} \cdot \vec{v} + 16AC^2 = 3^2 - 8 \times 3 + 16 \times 2^2 \\ &= 9 - 24 + 64 = 49\end{aligned}$$

4) En calculant le produit scalaire $\overline{AD} \cdot \overline{AE}$ d'une deuxième manière, on obtiendrait $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \|\overline{AD}\| \|\overline{AE}\| \cos(\widehat{DAE})$

Puisque $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = -33$, $\|\overline{AD}\|^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AD} = 36$, on obtient $\|\overline{AD}\| = \sqrt{36} = 6$ et de même $\|\overline{AE}\| = \sqrt{49} = 7$

L'égalité $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \|\overline{AD}\| \|\overline{AE}\| \cos(\widehat{DAE})$ fournit donc $\cos(\widehat{DAE}) = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AE}}{\|\overline{AD}\| \|\overline{AE}\|} = \frac{-33}{6 \times 7} = -\frac{33}{42} = -\frac{11}{14}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle \widehat{DAE} mesure environ $141,8^\circ$ (à $0,1$ degré près)



```
cos^-1 (-11/14)
141.7867893
```

Exercice n°6 ()

1) Le point C se projette orthogonalement en D sur (AD), de sorte que $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AD} = AD^2 = 25$

On « réarrange » le produit scalaire $\overline{AC} \cdot \overline{DC}$ avant de le calculer :

$$\overline{AC} \cdot \overline{DC} = (-\overline{CA}) \cdot (-\overline{CD}) = (-1) \times (-1) \overline{CA} \cdot \overline{CD} = \overline{CA} \cdot \overline{CD}$$

Le point A se projette orthogonalement en D sur (CD), de sorte que $\overline{CA} \cdot \overline{CD} = \overline{CD} \cdot \overline{CA} = \overline{CD} \cdot \overline{CD} = CD^2 = 64$

On applique la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire pour calculer :

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot (\overline{BA} + \overline{AD}) = \overline{AC} \cdot \overline{BA} + \overline{AC} \cdot \overline{AD} = -\overline{AC} \cdot \overline{AB} + \overline{AC} \cdot \overline{AD}$$

Le point C se projette orthogonalement en B sur (AB), de sorte que $\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = AB^2 = 64$

Ainsi $-\overline{AC} \cdot \overline{AB} + \overline{AC} \cdot \overline{AD} = -64 + 25 = -39$

On conclut ainsi que $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = -39$

2) On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$

$$\text{D'une part, } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \left(\frac{1}{2}\overline{CA}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{DB}\right) = \frac{1}{4}\overline{CA} \cdot \overline{DB} = \frac{1}{4}(-\overline{AC}) \cdot (-\overline{BD}) = \frac{1}{4}\overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

On a déjà calculé $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = -39$, donc $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = -\frac{39}{4}$

$$\text{D'autre part } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \|\overline{OA}\| \|\overline{OB}\| \cos(\widehat{AOB})$$

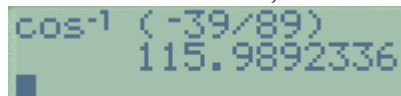
D'après le théorème de Pythagore, la diagonale AC du rectangle mesure $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}$, donc les

semi diagonales mesurent $OA = OB = \frac{1}{2}\sqrt{89}$

$$\text{Ainsi } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2}\sqrt{89} \times \frac{1}{2}\sqrt{89} \cos(\alpha) = \frac{89}{4} \cos(\alpha)$$

En égalant les deux expression du produit scalaire, on obtient $\frac{89}{4} \cos(\alpha) = -\frac{39}{4} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = -\frac{39}{89}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle \widehat{AOB} mesure environ 116° (à 1 degré près)



```
cos^-1 (-39/89)
115.9892336
```

3)

On calcule de deux manière différentes le produit scalaire $\overline{AO} \cdot \overline{AD}$

D'une part, le point D se projette orthogonalement en K sur (AO). Ainsi $\overline{AO} \cdot \overline{AD} = \overline{AO} \cdot \overline{AK}$, et puisque les vecteurs \overline{AO}

et \overline{AK} sont colinéaires de même sens, $\overline{AO} \cdot \overline{AK} = AO \times AK = \frac{1}{2}\sqrt{89} AK$

D'autre part $\overline{AO} \cdot \overline{AD} = \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right) \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \frac{25}{2}$

En égalant les deux expressions du produit scalaire $\overline{AO} \cdot \overline{AD}$, on obtiendra $\frac{1}{2}\sqrt{89}AK = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \boxed{AK = \frac{25}{\sqrt{89}}}$

Par symétrie, on déduit la valeur de HC : $HC = \frac{25}{\sqrt{89}}$

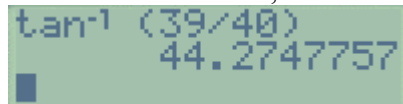
On calcule alors $HK = AC - (AK + HC)$, c'est-à-dire $HK = \sqrt{89} - 2 \times \frac{25}{\sqrt{89}} = \frac{89 - 50}{\sqrt{89}} = \boxed{\frac{39}{\sqrt{89}}}$

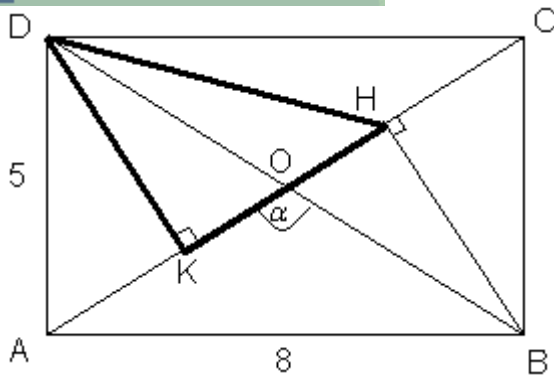
4) Dans le triangle HDK rectangle en K, on calcule $\tan(\widehat{HDK}) = \frac{HK}{DK}$

On calcule la longueur DK en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AKD rectangle en K :

$DK^2 = AD^2 - AK^2 = 25 - \left(\frac{25}{\sqrt{89}}\right)^2 = \frac{1600}{89}$ donc $DK = \sqrt{\frac{1600}{89}} = \frac{40}{\sqrt{89}}$, et on termine de calculer $\tan(\widehat{HDK}) = \frac{\frac{39}{\sqrt{89}}}{\frac{40}{\sqrt{89}}} = \frac{39}{40}$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle \widehat{HDK} mesure environ 44° (à 1 degré près)





Exercice n°7 ()

1) On calcule directement le produit scalaire $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ en utilisant les données de l'énoncé :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AB}\| \|\overline{AC}\| \cos(\widehat{BAC}) = 6 \times 5 \times \cos(60^\circ) = 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = 15$$

On calcule BC en utilisant la formule d'Al Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6^2 + 5^2 - 2 \times 15 = 31 \text{ donc } \boxed{BC = \sqrt{31} \text{ cm}}$$

2) On calcule directement le produit scalaire $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ en utilisant les données de l'énoncé :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AB}\| \|\overline{AC}\| \cos(\widehat{BAC}) = 7 \times 4 \times \cos(120^\circ) = 7 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -14$$

On calcule BC en utilisant la formule d'Al Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 7^2 + 4^2 - 2 \times (-14) = 93 \text{ donc } \boxed{BC = \sqrt{93} \text{ cm}}$$

Exercice n°8 ()

On utilise la formule d'Al Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\widehat{A}). \text{ On en déduit donc la valeur exacte de } \cos(\widehat{A}) :$$

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{34}{286} = \frac{17}{143}$$

Grâce à la calculatrice, on déduit que l'angle \widehat{A} mesure environ $83,2^\circ$ (à 0,1 degré près)

$$\cos^{-1} (17/143) \\ 83.17246682$$

De la même manière :

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \cos(\widehat{B})$ nous permet de calculer $\cos(\widehat{B}) = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \times BC} = \frac{208}{352} = \frac{13}{22}$, donc d'en déduire, grâce à la calculatrice, que $\widehat{B} \approx 53,8^\circ$ à $0,1^\circ$ près

$$\cos^{-1} (13/22) \\ 53.77845338$$

Enfin, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos(\widehat{C})$ nous permet de calculer $\cos(\widehat{C}) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \times BC} = \frac{304}{416} = \frac{19}{26}$, donc d'en déduire, grâce à la calculatrice, que $\widehat{C} \approx 43^\circ$ à $0,1^\circ$ près

$$\cos^{-1} (19/26) \\ 43.0490798$$

Exercice n°9 ()

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$,

1) Un point $M(x; y)$ appartient à C_1 si et seulement si $AM = 5$

En utilisant la formule de la distance dans un repère orthonormé, et l'équivalence $AM = 5 \Leftrightarrow AM^2 = 25$, on obtient :

$$M(x; y) \in C_1 \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = 5 \Leftrightarrow \boxed{(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25}$$

2) 1^{ère} méthode :

On calcule les coordonnées du centre I du cercle, qui est le milieu de [BC] (donc $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = 1$ et

$y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1}{2}$), ainsi que le rayon du cercle, qui vaut $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \frac{5}{2}$

On se retrouve dans la situation de la question 1), ou on applique la formule du cours sur l'équation d'un cercle de centre

et de rayon connu : $\boxed{(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}}$

4^{ème} maths

2^{ème} méthode :

Un point $M(x; y)$ appartient à C_2 si et seulement si $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = 0$

On détermine les coordonnées du vecteur $\overline{MB} \begin{vmatrix} -1 - x \\ 2 - y \end{vmatrix}$ et $\overline{MC} \begin{vmatrix} 3 - x \\ -1 - y \end{vmatrix}$

La condition $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = 0$ se traduit alors par :

$$(-1 - x)(3 - x) + (2 - y)(-1 - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3 + x - 3x + x^2 - 2 - 2y + y + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - y = 5$$

On « transforme » cette expression pour obtenir :

$$x^2 - 2x + y^2 - y = 5$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 5$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}}$$

On retrouve le résultat précédemment établi

3) On transforme l'équation de E_3 :

$$x^2 + y^2 + 7x - 8y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + (y-4)^2 - 16 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{81}{4}}$$

On identifie E_3 comme étant le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{7}{2}; 4\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$

4) On transforme l'équation de E_4 :

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 - 9 + (y-5)^2 - 25 + 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-5)^2 = 0$$

Cette dernière égalité n'est possible que si et seulement si $\begin{cases} (x+3)^2 = 0 \\ \text{et } (y-5)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$

L'ensemble E_4 est donc réduit au seul point S de coordonnées S(-3 ;5)

(on peut aussi voir cet ensemble comme le cercle de centre S et de rayon égal à zéro !)

Exercice n°10 ()

1) On transforme l'équation de E :

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$$

On identifie E comme étant le cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon $\sqrt{10}$

Pour étudier l'intersection du cercle E et de la droite (d) d'équation $x - 2y + 1 = 0$, cherchons les couples $(x; y)$

$$\text{solutions du système } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 & L_1 \\ x - 2y + 1 = 0 & L_2 \end{cases}$$

On résout ce système par substitution, en utilisant la ligne L_2 pour écrire $x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 1$

On remplace, dans la ligne L_1 , x par $2y-1$, et on obtient une équation du second degré à une inconnue y :

$$(2y-1)^2 + y^2 - 4(2y-1) + 2y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 8y + 4 + 2y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 - 10y = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y(y-2) = 0$$

Les solutions de cette équation sont $y = 0 \Rightarrow x = -1$ et $y = 2 \Rightarrow x = 3$

Les points d'intersection de E et (d) sont les points A et B de coordonnées A(-1 ;0) et B(3 ;2)

2) On transforme l'équation de E_1 :

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 18$$

On identifie E_1 comme étant le cercle de centre $\Omega_1(-1; 2)$ et de rayon $\sqrt{18}$

On transforme l'équation de E_2 :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 2$$

On identifie E_2 comme étant le cercle de centre $\Omega_2(3; -2)$ et de rayon $\sqrt{2}$

Pour étudier l'intersection des deux cercles E_1 et E_2 , cherchons les couples $(x; y)$ solutions du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0 & L_1 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 = 0 & L_2 \end{cases}$$

En soustrayant les deux lignes, il vient $\begin{cases} 8x - 8y - 24 = 0 & L_1 - L_2 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 & L_1 - L_2 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 = 0 & L_2 \end{cases}$

On résout ce système par substitution, en utilisant la première ligne pour écrire $x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = y + 3$

On remplace, dans la deuxième ligne, x par $y+3$, et on obtient une équation du second degré à une inconnue y :

$$(y+3)^2 + y^2 - 6(y+3) + 4y + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 0$$

Cette équation admet une unique solution $y = -1 \Rightarrow x = 2$

Les deux cercles n'admettent qu'un seul point d'intersection : le point $A(2; -1)$. Ils sont tangents en ce point.

Exercice n°11 ()

Pour démontrer que (HI) et (HJ) sont perpendiculaires, calculons le produit scalaire $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ}$

On utilise la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire :

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AJ})$$

$$= \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{HA} + \underbrace{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}}_{\substack{0 \text{ car le triangle ABC} \\ \text{est rectangle en A}}}$$

$$= HA^2 - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AI}$$

$$= HA^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$$

car I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC]

Puisque le point C se projette orthogonalement en H sur [AH] et puisque le point B se projette orthogonalement en H sur [AH], on a $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} = AH^2$ et de même $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} = AH^2$

Le produit scalaire $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ}$ vaut donc $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = HA^2 - \frac{1}{2} AH^2 - \frac{1}{2} AH^2 = 0$, ce qui prouve que les vecteurs \overrightarrow{HI} et

\overrightarrow{HJ} sont orthogonaux, donc que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires

Exercice n°12 ()

1) Une première expression de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ est $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \|\overrightarrow{AI}\| \|\overrightarrow{AJ}\| \cos(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles ABI et ADJ rectangles en B et D, on établit que :

$$AJ = AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} \cos(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}) = \boxed{\frac{5a^2}{4} \cos(\theta)}$$

2) a) En utilisant la relation de Chasles, on écrit $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

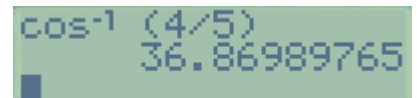
b) En utilisant les deux expressions ci-dessus et la distributivité du produit scalaire, on établit que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_{\substack{0 \text{ car ABCD} \\ \text{est un carré}}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_{\substack{0 \text{ car ABCD} \\ \text{est un carré}}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AD}\|^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2 \end{aligned}$$

3) En égalant les deux expressions de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$, on obtient $\frac{5a^2}{4} \cos(\theta) = a^2 \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{4}{5}$

En utilisant la calculatrice, on obtient une valeur approchée à 10^{-2} près de θ :

$$\theta \approx 36,87^\circ$$



Exercice n°13 ()

1) On calcule les coordonnées du centre I du cercle C, qui est le milieu de [AB] (donc $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$ et

$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$), ainsi que le rayon du cercle, qui vaut :

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$$

L'équation de C est donc : $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$

2) Le point D appartient à C si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de C

On calcule $(x_D - 2)^2 + (y_D - 2)^2 = (-1 - 2)^2 + (6 - 2)^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$, donc D est un point de C

Un vecteur normal à la tangente T à C au point D est le vecteur $\overrightarrow{ID} \begin{cases} x_D - x_I = -1 - 2 = -3 \\ y_D - y_I = 6 - 2 = 4 \end{cases}$

Une équation cartésienne de T est donc $ax + by + c = 0$ avec $\overrightarrow{ID} \begin{cases} -4 = a \\ 3 = b \end{cases}$, donc de la forme $-4x + 3y + c = 0$. On utilise

les coordonnées du point D pour calculer le coefficient c :

$-4x_D + 3y_D + c = 0 \Leftrightarrow c = 4x_D - 3y_D = 4 \times (-1) - 3 \times 6 = -22$ Une équation de T est donc $-4x + 3y - 22 = 0$

Exercice n°14 ()

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = -1 \\ z_B - z_A = 1 \end{cases}$, $\overrightarrow{AC} \begin{cases} x_C - x_A = -2 \\ y_C - y_A = 1 \\ z_C - z_A = 0 \end{cases}$

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel k unique satisfaisant aux trois conditions

$$\begin{cases} k = -2 \\ -k = 1 \\ k = 0 \end{cases} \text{ . Les points A, B et C ne sont donc pas alignés, donc définissent un plan (ABC).}$$

b) Notons $\vec{n}(a; b; c)$ les coordonnées d'un vecteur normal à (ABC).

Puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$, on a $1 \times a + (-1) \times b + 1 \times c = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$

Puisque $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$, on a $(-2) \times a + 1 \times b + 0 \times c = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0$

Le système $\begin{cases} a-b+c=0 \\ -2a+b=0 \end{cases}$ de deux équations à trois inconnues admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. L'énoncé nous conseille de choisir $a=1$

Le système devient alors $\begin{cases} a=1 \\ 1-b+c=0 \\ -2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=b-1=1 \\ b=2 \end{cases}$. Un vecteur normal à (ABC) est donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Une équation du plan (ABC) est alors $x+2y+z+d=0$. On détermine d en utilisant les coordonnées de l'un des points de ce plan, par exemple $A(2;1;1)$. On obtient $x_A+2y_A+z_A+d=0 \Leftrightarrow d=-x_A-2y_A-z_A=-2-2-1=-5$

Une équation du plan (ABC) est alors $\boxed{x+2y+z-5=0}$.

2) Une équation de (ABC) étant de la forme $ax+by+cz=d$, les coordonnées de A, B et C vérifiant cette équation de droite, nous permettent de dresser le système de trois équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} ax_A+by_A+cz_A+d=0 \\ ax_B+by_B+cz_B+d=0 \\ ax_C+by_C+cz_C+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c+d=0 \\ 3a+2c+d=0 \\ 2b+c+d=0 \end{cases}$$

Ce système admettant une infinité de solutions, on doit « fixer arbitrairement » une valeur pour l'une quelconque des inconnues. On fixe par exemple $a=1$ Le système devient :

$$\begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ 2b+c+d=0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ -c-d=4 & L_4=L_3-2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c+d=-2 & L_1 \\ 2c+d=-3 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-c-d=2 & L_1 \\ d=-3-2c=-5 & L_2 \\ c=1 & L_4+L_2 \end{cases}$$

On retrouve alors l'équation $\boxed{x+2y+z-5=0}$

Exercice n°15 ()

1) P et P' admettent pour vecteurs normaux les vecteurs $\vec{n}_1(\cos t; \sin t; -1)$ et $\vec{n}_2(\cos t; \sin t; +1)$.

Le produit scalaire $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (\cos t)(\cos t) + (\sin t)(\sin t) + (-1)(1) = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ nous permet d'affirmer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

2) l'axe Ox est parallèle à P pour toutes les valeurs de t pour lesquelles $\vec{n}_1(\cos t; \sin t; -1)$, vecteur normal à P sera orthogonal à tout vecteur directeur de l'axe Ox.

Un vecteur directeur de l'axe Ox est $\vec{u}(1;0;0)$. Le produit scalaire $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = (\cos t) \times 1 + (\sin t) \times 0 + (-1)(0) = \cos t$. Pour $t = \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = \cos t = 0$, donc l'axe Ox est parallèle à P.

3) Les coordonnées des points de la droite intersection des deux plans vérifient le système $\begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y - z = 0 \\ (\cos t)x + (\sin t)y + z = 0 \end{cases}$,

soit, par soustraction des deux lignes, $\begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Si $t = \frac{\pi}{2}[\pi]$, puisque $\cos t = 0$ et $\sin t = 1$, le système est équivalent à $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$. Un vecteur directeur de la droite

intersection des deux plans est $\vec{v}(1;0;0)$

Si $t \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\begin{cases} (\cos t)x + (\sin t)y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \tan t \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ Un vecteur directeur de la droite intersection des deux plans

est $\vec{v}(1;-1;0)$

4) La distance de $A(\cos t, \sin t, -3)$ au plan P vaut $\frac{|(\cos t)(\cos t) + (\sin t)(\sin t) + 3|}{\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2 + (-1)^2}} = \frac{|1+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$