Qcm

Fonction exponentielle

dans les exercices suivants, les fonctions sont représentées dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

GUESMI.B

E1	Simplifier des écritures

- A ☐ $e^{\ln 2}.e^{\ln 5}=7$.
- B ☐ $e^{-\ln 3}=3$.
- C ☐ $e^{\frac{1}{2}\ln 8}=2\sqrt{2}$.
- D ☐ $e^{-3\ln\frac{1}{2}}=8$.
- E ☐ $\dfrac{e^{2+\ln 32}}{e^{3+\ln 8}}=4e$.

corrigé C1

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -C-D-

A- $e^{\ln 2}.e^{\ln 5} = 2\times 5 = 10$

B- $e^{-\ln 3} = \dfrac{1}{e^{\ln 3}} = \dfrac{1}{3}$

C- $e^{\frac{1}{2}\ln 8} = e^{\ln\sqrt{8}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

D- $e^{-3\ln\frac{1}{2}} = e^{-3(-\ln 2)} = e^{3\ln 2} = e^{\ln(2^3)} = 2^3 = 8$

E- $\dfrac{e^{2+\ln 32}}{e^{3+\ln 8}} = \dfrac{e^2\, e^{\ln 32}}{e^3\, e^{\ln 8}} = \dfrac{32\, e^2}{8\, e^3} = \dfrac{4}{e}$

E2	L'équation ou l'inéquation

A ☐ $e^x = 7$ a pour unique solution $x = \ln 7$.

B ☐ $e^{2x} + 1 < 0$ n'a pas de solution.

C ☐ $e^{-x+2} = e^{2x-1}$ a pour unique solution $x = 1$.

D ☐ $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ a pour ensemble solution $S = \{0;\ \ln 6\}$.

E ☐ $e^{x+1} \geq \dfrac{2}{e^x}$ a pour ensemble solution $S = [\ \dfrac{-1+\ln 2}{2};\ +\infty\ [$.

corrigé C2

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-B-C-E-

A- $e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln 7$

B- $e^{2x} + 1 < 0$ n'a pas de solution car $e^{2x} > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

C- $e^{-x+2} = e^{2x-1}$ équivaut, puisque la foction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, à $-x+2 = 2x-1$ soit à $x = 1$.

D- $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ équivaut au système:

$$\begin{cases} e^x = u \\ u^2 - 5u + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = u \\ u = 2 \text{ ou } u = 3 \end{cases}$$

Or $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ et $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$ d'où $S = \{\ln 2; \ln 3\}$

E- $e^{x+1} \geq \dfrac{2}{e^x}$ équivaut, en multipliant les deux membres par le réel strictement positif e^x, à $e^x e^{x+1} \geq 2$ soit à $e^{2x+1} \geq 2$ ou, la fonction ln étant croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, à $2x+1 \geq \ln 2$ donc à $x \geq \dfrac{-1+\ln 2}{2}$. Finalement $S = [\dfrac{-1+\ln 2}{2}; +\infty[$.

E3	Calcul de limites
A ☐	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$.
B ☐	$\lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^{-x} = 0$.
C ☐	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x} = +\infty$.
D ☐	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 3}{e^{2x}+1} = 1$.
E ☐	$\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x} + x) = 0$.

corrigé C3

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-B-

A- $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty}e^{y}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}=0$.

B- Le formulaire officiel donne: pour $\alpha>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\alpha}e^{-x})=0$

Appliquons ce résultat pour $\alpha=1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}3xe^{-x}=0$.

C- Pour $x\neq 0$, $\dfrac{e^{2x}-1}{3x}=\dfrac{2}{3}\,\dfrac{e^{2x}-1}{2x}$. Or $\lim\limits_{x\to 0}2x=0$ et

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y}-1}{y}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=1$ et alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

D- Pour tout réel x, $\dfrac{e^{x}-3}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^{x}(1-\frac{3}{e^{x}})}{e^{2x}(1+\frac{1}{e^{2x}})}=\dfrac{1-\frac{3}{e^{x}}}{e^{x}(1+\frac{1}{e^{2x}})}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^{x}}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{3}{e^{x}})=1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{2x}}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{e^{2x}})=1$

Nous pouvons conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-3}{e^{2x}+1}=0$.

E- Les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure directement. Transformons l'expression : pour tout réel x,

$e^{-x}+x=\dfrac{1}{e^{x}}+x=\dfrac{1+xe^{x}}{e^{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0^{+}$ car $e^{x}>0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}(1+xe^{x})=1$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}+x)=+\infty$.

E4 Calcul de dérivées

A ☐ $f:x\mapsto xe^{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x)=e^{x}$.

B ☐ $f:x\mapsto e^{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x)=2xe^{2x}$.

C ☐ $f:x\mapsto\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ définie dans $\mathbb{R}-\{0\}$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{-2e^{x}}{(e^{x}-1)^2}$.

D ☐ $f:x\mapsto\sqrt{1+e^{2x}}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}}$.

E

☐ $f : x \mapsto \ln \dfrac{1}{e^x + 2}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-e^x}{e^x + 2}$.

corrigé C4

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -C-E-

A- $f : x \mapsto xe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 1e^x + xe^x = (x+1)\,e^x$.

B- $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction composée $f = e^u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ soit $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$.

C- $f : x \mapsto \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ comme quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles, le dénominateur ne s'annulant pas sur ceux-ci.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

D- $u : x \mapsto 1 + e^{2x}$ est dérivable et > 0 sur $\mathbb{R}$. Donx la fonction composée $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

soit $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1 + e^{2x}}} = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

E- Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = -\ln(e^x + 2)$

$u : x \mapsto e^x + 2$ est dérivable et > 0 sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction composée $f = -\ln u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

soit $f'(x) = -\dfrac{e^x}{e^x + 2}$.

E5 — Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x} - 1$

A

☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x+1)e^{2x}$.

B

☐ f est croissante sur $[-\dfrac{1}{2}; +\infty[$.

C

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

D

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

E

l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

corrigé C5

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -B-C-E-

A- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 1e^{2x} + x(2e^{2x}) = (2x+1)e^{2x}$.

B- $f'(x)$ a le signe de $2x+1$ car $e^{2x} > 0$ pour tout réel x. Alors si $x \geq -\frac{1}{2}$ on a $f'(x) \geq 0$. Donc f est croissante sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$.

C- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{2x} = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D- On peut écrire: pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2}(2xe^{2x}) - 1$.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{y \to -\infty} ye^{y} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^{2x} = 0$.

Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

E- $f(x) = -1 \Leftrightarrow xe^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (car $e^{2x} > 0$), solution unique.

E6

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^{x} - 1}{e^{x} + 1}$ et (C) la courbe de f.

A

Le point $A(0;1)$ est un centre de symétrie pour (C).

B

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

C

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

D

☐ le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$			3
	-1		

E

☐ Une équation de la tangente à (C) en $A(0;1)$ est $y = 4x + 1$.

<u>corrigé C6</u>

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-C-D-

A- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$. De plus

$$f(0-x)=\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{3}{e^{x}}-1}{\frac{1}{e^{x}}+1}=\frac{\frac{3-e^{x}}{e^{x}}}{\frac{1+e^{x}}{e^{x}}}=\frac{3-e^{x}}{1+e^{x}} \text{ alors}$$

$$\frac{1}{2}[f(0+x)+f(0-x)]=\frac{1}{2}[\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}+\frac{3-e^{x}}{1+e^{x}}]=\frac{1}{2}[\frac{2e^{x}+2}{e^{x}+1}]=1$$

On en déduit que $A(0;1)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

B- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$. Il vient alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{-1}{1}=-1$.

C- En factorisant numérateur et dénominateur de $f(x)$ par e^{x} et en simplifiant on obtient : $f(x)=\frac{3-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ et alors la droite d'équation $y=3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

D- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{3e^{x}(e^{x}+1)-(3e^{x}-1)e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}=\frac{4e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$

Puisque $e^{x}>0$ on a $f'(x)>0$ pour tout réel x. Et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les résultats précédents sont résumés par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3

E- Une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en $A(0;1)$ est :
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=x+1$.

E7 Soit f définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x)=e^{-x}\sin x$ et (C) sa courbe représentative.

A ☐ Pour tout x de $[0;2\pi]$ $f'(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$.

B ☐ Pour tout x de $[0;2\pi]$ $f'(x)=\sqrt{2}\,e^{-x}\cos(x-\frac{\pi}{4})$.

C ☐ Une équation de la tangente à (C) à l'origine O est $y=x$.

D ☐ Pour tout x de $[0;2\pi]$ la courbe $(\mathcal{C})$ est située entre la courbe de $g:x\mapsto e^{-x}$ et la courbe de $h:x\mapsto -e^{-x}$.

E $(\mathcal{C})$ et la courbe de g ont un unique point commun d'abscisse π.

☐

corrigé C7

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -C-D-

A- f est dérivable sur $[0;2\pi]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. $f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.

B- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos x - \sin x = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x)$ soit

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x)$

et donc $f'(x) = \sqrt{2}\, e^{-x}\cos(x + \frac{\pi}{4})$.

C- Une équation de la tangente à (C) à l'origine O est :
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = x$.

D- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-1 \le \sin x \le +1$ donc $-e^{-x} \le e^{-x}\sin x \le +e^{-x}$ et par suite $-e^{-x} \le f(x) \le e^{-x}$. La courbe de f est donc située entre les courbes d'équations respectives $y = e^{-x}$ et $y = e^{-x}$.

E- L'abscisse x des points communs à (C) et à la courbe de g est solution de l'équation $f(x) = g(x)$ soit $e^{-x}\sin x = e^{-x}$.
Cette équation équivaut à $e^{-x}(\sin x - 1) = 0$ puis à $\sin x = 1$ puisque $e^{-x} \ne 0$. Sur $[0;2\pi]$, $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

8	Soit la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{2(1-x)}$.

A ☐	$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
B ☐	Pour tout x de $]-\infty; 0[$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{-x}\,\frac{x}{2(x-1)}$.
C ☐	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.
D ☐	Pour tout x de $]-\infty; 1[$ $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$.

E

☐ f admet en 0 un minimum égal à $\frac{1}{2}$.

corrigé C8

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-B-D-E-

A- $\lim\limits_{x\to 1} e^{-x} = e^{-1}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} 2(1-x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

B- Pour tout $x<0$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{-2(x-1)}\,\frac{x}{x} = \frac{e^{-x}}{-x}\,\frac{x}{2(x-1)}$.

C- $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to +\infty} \frac{e^{y}}{y} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$. Alors $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

D- Pour tout x de $]-\infty;1[$, $f'(x) = \frac{-e^{-x}2(1-x) - e^{-x}(-2)}{4(1-x)^2}$ soit

$f'(x) = \frac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$.

E- Puisque $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de x et donc s'annule en 0 en passant du signe $-$ au signe $+$. Par conséquent f admet en 0 un minimum égal à $f(0) = \frac{1}{2}$.

E9

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$

A

☐ La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

B

☐ Pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x) = (x^2-1)\,e^{-x}$.

C

☐ Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

D

☐ Sur l'intervalle $]-1;0[$ la courbe de f est au-dessus de celle de g.

E

☐ Au point $A(0;1)$ les tangentes aux courbes de f et g sont orthogonales.

<u>corrigé C9</u>

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-C-E-

A- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-x}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et pour $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}e^{-x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

B- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2(-e^{-x})$ soit $f'(x) = (x+1)e^{-x}[2-(x+1)] = (x+1)(-x+1)\,e^{-x} = (1-x^2)\,e^{-x}$.

C- $f'(x)$ a le signe du polynôme du second degré $1-x^2$, négatif à l'extérieur des racines -1 et $+1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

D- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = e^{-x}[(x+1)^2 - 1] = x(x+2)\,e^{-x}$.
Cette différence a le signe du polynôme du second degré $x(x+2)$ négatif à l'intérieur des racines -2 et 0, donc < 0 sur $]-1;0[$.
Par suite, sur $]-1;0[$, la courbe de f est au-dessous de celle de g.

E- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en $A(0\,;1)$ est $f'(0) = 1$. Puisque, pour tout réel x, $g'(x) = -e^{-x}$, celui de la tangente à la courbe de g en ce même point est $g'(0) = -1$.
Comme $f'(0) \times g'(0) = -1$, ces deux droites sont orthogonales.

E10

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x) = (x+1)\,e^{\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

A ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

B ☐ Sur $]0;+\infty[$ f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$.

C ☐ Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}$.

D ☐ f est dérivable en 0.

E La courbe de f admet à l'origine O du repère une demi-tangente horizontale.

orrigé C10

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -B-C-

A- $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to 0} e^{x}=e^{0}=1$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$.

D'autre part $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

B- Sur $]0;+\infty[$ f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+(x+1)(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})$ soit

$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}[1-\frac{x+1}{x^2}]=\frac{x^2-x-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

C- Pour $x>0$, $\frac{f(x)}{x}=\frac{x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}=(1+\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

D- $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} e^{y}=+\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

D'où $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ et f n'est pas dérivable en 0.

E- La courbe de f admet à l'origine O du repère une demi-tangente verticale.