Qcm

Calcul intégral

Guesmi.B

E1	Calculs simples d'intégrales à l'aide de primitives.
A ☐	$\int_1^4 (t+1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{t}})\, dt = \frac{1}{4}$.
B ☐	$\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{2}{5}$.
C ☐	$\int_1^3 \frac{2u}{\sqrt{u^2+2}}\, du = 2(\sqrt{11}-\sqrt{3})$.
D ☐	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\, dx = -\frac{1}{3}$.
E ☐	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+\frac{\pi}{4})\, dx = 0$.

corrigé C1

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -B-C-

A- Une primitive sur $[1;4]$ de $f : t \to t+1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{t}}$ est F telle que

$F(t)=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{t}-4\sqrt{t}$. Donc $\int_1^4 f(t)dt=\left[F(t)\right]_1^4=\frac{29}{4}$.

B- Soit $f : x \to \frac{x}{(x^2+1)^2}$. On peut écrire $f(x)=-\frac{1}{2}\left[\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right]$.

Alors $f=-\frac{1}{2}\left[\frac{-v'}{v^2}\right]$, avec $v : x \to x^2+1$, dérivable et non nulle

sur $[0;2]$. Une primitive de f sur $[0;2]$ est donc $F=-\frac{1}{2}\frac{1}{v}$.

Donc $\int_0^2 f(x)dx=\left[\frac{-1}{2(x^2+1)}\right]_0^2=\frac{2}{5}$.

C- Soit $f : u \to \frac{2u}{\sqrt{u^2+2}}$. On peut écrire $f(u)=2\left[\frac{2u}{2\sqrt{u^2+2}}\right]$.

Alors $f=2\left[\frac{v'}{2\sqrt{v}}\right][$, avec $v : u \to u^2+1$, dérivable et strictement

positive sur $[1;3]$. Une primitive de f sur $[1;3]$ est donc

$F=2\sqrt{u^2+2}$. Donc $\int_1^3 f(u)du=\left[2\sqrt{u^2+2}\right]_1^3=2(\sqrt{11}-\sqrt{3})$.

D- Soit $f : x \to cos^2 x\, sin\, x$. On peut écrire $f(x)=-[cos^2 x(-sin\, x)]$.

Alors $f=-u^2u'$, avec $u : x \to cos\, x$, dérivable sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Une primitive de f sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ est donc $F=-\frac{u^3}{3}$.

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\left[\frac{-cox^3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$.

E- Une primitive sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ de $f : x \to sin(2x+\frac{\pi}{4})$ est F telle que

$F(x)=-\frac{1}{2}cos(2x+\frac{\pi}{4})$. Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

E2	Les classiques à ne pas manquer !

A ☐ $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = -\frac{1}{2}$.

B ☐ $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = 2$.

C ☐ $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D ☐ Pour tout x de $\mathbb{R}-\{1\}$, $\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$ donc $\int_{-3}^{0} \frac{x^2}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{7}{4}+\ln 2$.

E ☐ Une primitive sur $]0;+\infty[$ de $f: x \to \ln x$ est $F: x \to x\ln x - x$.

<u>corrigé C2</u>

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -C-E-

A- Soit $f : x \to \frac{\ln x}{x}$. On peut écrire $f(x) = \ln x . \frac{1}{x}$.

Alors $f = u^1 u'$, avec $u : x \to \ln x$, dérivable sur $[1; e]$.

Une primitive de f sur $[1;e]$ est donc $F = \frac{u^2}{2}$.

Donc $\int_1^e f(x)dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}$.

B- Soit $f : x \to \frac{1}{x \ln x}$. On peut écrire $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$.

Alors $f = \frac{u'}{u}$, avec $u : x \to \ln x$, dérivable et strictement positive sur $[e; e^2]$. Une primitive de f sur $[e; e^2]$ est donc $F = \ln u$.

Donc $\int_e^{e^2} f(x)dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln 2$.

C- $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = [\tan x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

D- On peut vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.

$f : x \to \frac{2}{x-1}$ est de la forme $2\,\frac{u'}{u}$ avec $u : x \to x-1$ dérivable et

$f : x \to \frac{2}{x-1}$ est de la forme $2\,\frac{u'}{u}$ avec $u : x \to x-1$ dérivable et strictement négative sur $[-3; 0]$. Donc une primitive de f sur $[-3;0]$ est $F = 2\ln(-u)$.

$g : x \to \frac{1}{(x-1)^2}$ est de la forme $\frac{v'}{v^2}$ avec $v : x \to x-1$ dérivable et non nulle sur $[-3;0]$. Donc une primitive de g sur $[-3;0]$ est $\frac{-1}{v}$.

Finalement $\int_{-3}^{0} \frac{x^2}{(x-1)^2}dx = \left[x + 2\ln(-x+1) - \frac{1}{x-1}\right]_{-3}^{0} = \frac{15}{4} - 4\ln 2$.

E- Soit a un réel strictement positif. La fonction f étant dérivable sur $]0;+\infty[$, une primitive de f sur cet intervalle est la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \int_a^x \ln t \, dt$. C'est la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x = a$. Intégrons par parties :

posons $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$

u, v, u', v' sont dérivables sur $]0;+\infty[$.

$F(x) = [t \ln t]_a^x - \int_a^x 1 dt = x\ln x - a\ln a - [t]_a^x = x\ln x - a\ln a - x + a$.

Une autre primitive de ln sur $]0;+\infty[$ est la fonction $x \to x\ln x - x$.

E3	Calculs simples utilisant les propriétés de l'intégrale.

A ☐ $\int_0^1 (\ln(1+x)+3)\,dx + \int_0^1 \ln\frac{1}{1+x}\,dx = 3$.

B ☐ $\int_1^3 e^{1+x^2}dx + \int_3^1 e^{1+x^2}dx = 0$.

C ☐ $\int_0^2 |x-1|\,dx = 21$.

D ☐ $\int_{-4}^{-1} x^3e^x \geq 0$.

E ☐ $\int_0^1 x^2e^x\,dx \geq \int_0^1 xe^x dx$.

corrigé C3

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-B-

A- Pour tout $x>-1$, $\ln\frac{1}{1+x} = -\ln(1+x)$, donc en utilisant la linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^1 (\ln(1+x)+3)\,dx + \int_0^1 \ln\frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^1 3\,dx = [3x]_0^1 = 3.$$

B- $\int_3^1 e^{1+x^2}dx = -\int_1^3 e^{1+x^2}dx$ donc $\int_1^3 e^{1+x^2}dx + \int_3^1 e^{1+x^2}dx = 0$.

C- $\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^2 |x-1|dx$. Or sur $[0;1]$, $x-1\leq 0$, donc $|x-1| = -x+1$ et sur $[1;2]$, $x-1\geq 0$, donc $|x-1| = x-1$. Alors :

$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1(-x+1)dx + \int_1^2(x-1)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 = 1.$$

D- $e^x>0$ sur $\mathbb{R}$ et $x^3<0$ sur $[-4;-1]$. Donc $x^3e^x \leq 0$ sur $[-4;-1]$. Alors $\int_{-4}^{-1} x^3e^x dx \leq 0$.

E- Sur $[0;1]$ on a $x^2 \leq x$ donc $x^2e^x \leq xe^x$. Alors $\int_0^1 x^2e^x\,dx \leq \int_0^1 xe^x dx$.

E4

Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$

et l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ où a et b sont des réels.

A ☐ f est dérivable sur les intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;+1[$ et $]+1;+\infty[$.

B ☐ Pour tout x de $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$, $f(x)=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}\right]$,

donc $f=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-v'}{v^2}\right]$ où $v : x \to x^2-1$.

C ☐ f admet des primitives sur $[0;2]$.

D ☐ $I=\int_2^3 f(x)\,dx$ existe et une primitive de f sur $[2;3]$ est F

telle que $F(x)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^2-1}$.

E ☐ $I=\dfrac{5}{48}$.

corrigé C4

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-B-E-

A- f est une fonction rationnelle définie dans $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$, donc f est dérivable sur les intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;+1[$ et $]+1;+\infty[$.

B- On fait apparaître la forme connue $-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$ en écrivant que pour tout x de $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$, $f(x)=-\frac{1}{2}\left[\frac{-2x}{(x^2-1)^2}\right]$.

Alors $f=-\frac{1}{2}\left[\frac{-v'}{v^2}\right]$ avec $v: x \to x^2-1$.

C- f n'est pas définie (condition nécessaire) sur $[0;2]$. Donc f n'admet pas de primitive sur cet intervalle.

D- Sur $[2;3]$ f est dérivable. On peut donc affirmer que f admet des primitives sur cet intervalle, donc que I existe. Une de ces primitives est la fonction F telle que $\mathrm{F}=-\frac{1}{2}\frac{1}{v}$ soit $\mathrm{F}(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-1}$.

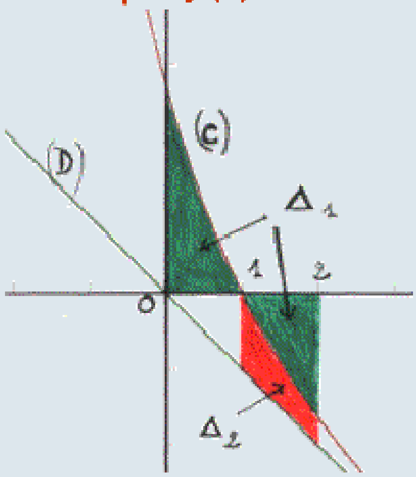
E- $\mathrm{I}=\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-1}\right]_2^3=(-\frac{1}{16})-(-\frac{1}{6})=\frac{5}{48}$.

E5

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal la courbe (C) représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+e^{-x+1}$.

On note $\mathrm{A}(\Delta_1)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$.

On note $\mathrm{A}(\Delta_2)$ l'aire de l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y)$ du plan tels que $1\leq x\leq 2$ et $-x\leq y\leq f(x)$.



A ☐ $\mathrm{A}(\Delta_1)=\int_0^2 f(x)\,dx$ unités d'aire (u.a).

B ☐ Si, pour tout réel α, on note $\mathrm{I}(\alpha)=\int_1^\alpha f(x)\,dx$, alors on a :

$$\mathrm{I}(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}-e^{-\alpha+1}+e.$$

Aide

C ☐ $\mathrm{A}(\Delta_1)=-\mathrm{I}(0)-\mathrm{I}(2)$ u.a.

D $\mathrm{A}(\Delta_2) = \int_1^2 -e^{-x+1}\,dx$ u.a.

E $\mathrm{A}(\Delta_1) = e - 1 + \dfrac{1}{e}$ u.a et $\mathrm{A}(\Delta_2) = 1 - \dfrac{1}{e}$ u.a.

corrigé C5

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -C-E-

A- f ne garde pas le même signe sur $[0;2]$ donc $\mathrm{A}(\Delta_1) \neq \int_0^2 f(x)\,dx$ u.a.

B- Pour tout réel α, $\mathrm{I}(\alpha) = \int_1^{\alpha}\left(-x + e^{-x+1}\right)dx = \left[-\dfrac{x^2}{2} - e^{-x+1}\right]_1^{\alpha} = -\dfrac{\alpha^2}{2} - e^{-\alpha+1} + \dfrac{3}{2}$.

C- f est dérivable sur $[0;2]$, positive sur $[0;1]$ et négative sur $[1;2]$. Donc en u.a $\mathrm{A}(\Delta_1) = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = -\int_1^0 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = -\mathrm{I}(0) - \mathrm{I}(2)$.

D- Sur $[1;2]$, f et $g : x \to -x$ sont dérivables, et $f \geq g$. Donc

$\mathrm{A}(\Delta_2) = \int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^2 e^{-x+1}dx$ u.a

E- $\mathrm{A}(\Delta_1) = -(-e + \dfrac{3}{2}) - (-2 - e^{-1} + \dfrac{3}{2}) = e - 1 + e^{-1}$ u.a.

$\mathrm{A}(\Delta_2) = \left[-e^{-x+1}\right]_1^2 = -e^{-1} - (-1) = 1 - e^{-1}$ u.a.

E6

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ et l'intégrale $\mathrm{I}(a) = \int_1^a f(x)\,dx$, où a est un réel strictement positif.

A Pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}$.

B Une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$ sur $]0;+\infty[$ est donc la fonction G telle que $\mathrm{G}(x) = \ln\dfrac{x}{x+1}$.

C A l'aide d'une intégration par parties et des résultats précédents on trouve : $\mathrm{I}(a) = 2\ln 2 - \dfrac{\ln(1+a)}{a} + \ln\dfrac{a}{a+1}$.

D $\lim\limits_{a \to 0} \mathrm{I}(a) = 2\ln 2 - 1$

☐

E $\ln(1+a)=\ln[a(1+\frac{1}{a})]=\ln a+\ln(1+\frac{1}{a})$. On en déduit $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{I}(a)=+\infty$.

☐

corrigé C6

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -B-C-

A- On vérifie aisément que, pour $x>0$, $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+1)}{x(x+1)}=\frac{-1}{x(x+1)}$.

Donc, en réalité, pour $x>0$, $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

B- $g: x \to \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}$ avec $u: x \to x$ et $v: x \to x+1$, u et v étant dérivables et strictement positives sur $]0;+\infty[$. Donc une primitive de g sur $]0;+\infty[$ est G telle que $\mathrm{G}(x)=\ln x-\ln(x+1)$ soit $\mathrm{G}(x)=\ln\frac{x}{x+1}$.

C- Calculons $\mathrm{I}(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.

Posons $\begin{cases} u(x)=\ln(x+1) \\ v'(x)=\frac{1}{x^2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x+1} \\ v(x)=\frac{-1}{x} \end{cases}$

u, v, u, v' sont dérivables sur $]0;+\infty[$.

Alors $\mathrm{I}(a)=\left[\frac{-1}{x}\ln(x+1)\right]_1^a-\int_1^a \frac{-1}{x(x+1)}dx=\frac{-1}{a}\ln(a+1)+\ln 2+\left[\mathrm{G}(x)\right]_1^a$, soit

$\mathrm{I}(a)=2\ln 2-\frac{\ln(1+a)}{a}+\ln\frac{a}{a+1}$.

D- D'après le cours, $\lim\limits_{a\to0}\frac{\ln(1+a)}{a}=1$. D'autre part $\lim\limits_{a\to0}\frac{a}{a+1}=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\ln X=-\infty$. Donc $\lim\limits_{a\to0}\ln\frac{a}{a+1}=-\infty$. Alors $\lim\limits_{a\to0}\mathrm{I}(a)=-\infty$.

E- $\lim\limits_{a\to+\infty}(1+\frac{1}{a})=1$ et $\lim\limits_{X\to1}\ln X=0$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{a})=0$.

$\lim\limits_{a\to+\infty}\ln a=+\infty$. D'autre part $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{a}{a+1}=1$ et $\lim\limits_{X\to1}\ln X=0$ donc

$\lim\limits_{a\to+\infty}\ln\frac{a}{a+1}=0$. On en déduit : $\lim\limits_{a\to+\infty}\mathrm{I}(a)=-\infty$.

E7

Soit les intégrales $\mathrm{I}=\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$, $\mathrm{J}=\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx$ et $\mathrm{K}=\int_0^{\pi} e^x \cos 2x\, dx$.

A ☐ A l'aide de deux intégrations par parties successives on obtient :

$$\mathrm{K}=\frac{e^{\pi}-1}{4}-\frac{K}{4} \quad \text{puis} \quad \mathrm{K}=\frac{e^{\pi}-1}{5}.$$

B ☐ $\mathrm{I}+\mathrm{J}=e^{\pi}$.

C ☐ En utilisant la relation $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ on trouve que

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x dx + \frac{1}{2}\mathrm{K} \quad \text{soit} \quad \mathrm{I}=\frac{3}{5}(e^{\pi}-1).$$

D ☐ $\mathrm{J}=\frac{2e^{\pi}+3}{5}$.

E ☐ $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ donc $\mathrm{I}-\mathrm{J}=\mathrm{K}$.
On retrouve ainsi la valeur de K obtenue au A.

corrigé C7

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-C-E-

A- Posons $\begin{cases} u(x)=e^x \\ v'(x)=\cos 2x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x)=e^x \\ v(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

u, u', v, v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc $\mathrm{K}=\left[\dfrac{1}{2}e^x \sin 2x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\dfrac{1}{2}e^x \sin 2x\,dx=-\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}e^x \sin 2x\,dx$.

Soit $\mathrm{M}=\int_0^{\pi}e^x \sin 2x\,dx$.

Posons $\begin{cases} u(x)=e^x \\ v'(x)=\sin 2x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x)=e^x \\ v(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

u, u', v, v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc $\mathrm{M}=\left[-\dfrac{1}{2}e^x \cos 2x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\dfrac{1}{2}e^x \cos 2x\,dx=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{\pi}+\dfrac{1}{2}\mathrm{K}$.

Alors $\mathrm{K}=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{\pi}+\dfrac{1}{2}\mathrm{K}\right]$. D'où $\mathrm{K}=\dfrac{e^{\pi}-1}{4}-\dfrac{\mathrm{K}}{4}$ puis $\mathrm{K}=\dfrac{e^{\pi}-1}{5}$.

B- $\mathrm{I}+\mathrm{J}=\int_0^{\pi}e^x(\cos^2 x+\sin^2 x)dx=\int_0^{\pi}e^x dx=\left[e^x\right]_0^{\pi}=e^{\pi}-1$.

C- $\mathrm{I}=\int_0^{\pi}e^x\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=\int_0^{\pi}\dfrac{e^x+\cos 2x}{2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}e^x dx+\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}e^x \cos 2x\,dx$

$\mathrm{I}=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}e^x dx+\dfrac{1}{2}\mathrm{K}=\dfrac{1}{2}(e^{\pi}-1)+\dfrac{1}{2}\mathrm{K}=\dfrac{1}{2}(e^{\pi}-1)+\dfrac{1}{10}(e^{\pi}-1)=\dfrac{3}{5}(e^{\pi}-1)$.

D- De $\mathrm{I}+\mathrm{J}=e^{\pi}-1$ on tire $\mathrm{J}=e^{\pi}-1-\mathrm{I}=e^{\pi}-1-\dfrac{3}{5}(e^{\pi}-1)=\dfrac{2}{5}(e^{\pi}-1)$.

E- $\mathrm{I}-\mathrm{J}=\int_0^{\pi}e^x(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx=\int_0^{\pi}e^x \cos 2x\,dx=\mathrm{K}$.

On retrouve bien la valeur de K obtenue initialement, à savoir

$\mathrm{K}=\mathrm{I}-\mathrm{J}=\dfrac{3}{5}(e^{\pi}-1)-\dfrac{2}{5}(e^{\pi}-1)=\dfrac{e^{\pi}-1}{5}$.

E8 Soit la fonction F définie sur $\mathrm{I}=]0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\int_1^x \dfrac{e^t}{t}\,dt$.

A ☐ F est la primitive de f sur I telle que $\mathrm{F}(1)=2$.

B ☐ F est décroissante sur I.

C ☐ Pour tout x de I, $\ln x=\int_1^x \dfrac{1}{t}\,dt$ donc $\mathrm{F}(x)-\ln x=\int_1^x \dfrac{e^t-1}{t}\,dt$

D

- [ ] Pour $x > 0$, le signe de $F(x) - \ln x$ est résumé ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$F(x) - \ln x$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

E

- [ ] Le tableau des variations de F est le suivant :

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	$\|\|$	$+$	
$F(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

<u>corrigé C8</u>

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -C-E-

A- $f : t \to \dfrac{e^t}{t}$ est dérivable sur I. Donc F est la primitive de f sur I qui s'annule en 1, soit telle que $F(1)=0$.

B- F étant une primitive de f sur I, F est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)=\dfrac{e^x}{x}$. Comme $e^x>0$ sur $\mathbb{R}$, pour $x>0$ on a $F'(x)>0$ sur I et donc F est croissante sur I.

C- Pour $x>0$, $F(x)-\ln x=\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt-\int_1^x \frac{1}{t}\,dt=\int_1^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$.

D- Pour $t>0$, $e^t>1$. Donc $\dfrac{e^t-1}{t}>0$. Alors, pour $x>1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t-1}{t}\,dt>0$.

De même pour $0<x<1$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t-1}{t}\,dt>0$ soit $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t-1}{t}\,dt<0$.

Pour $x>0$, le signe de $F(x)-\ln x$ est résumé ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$F(x)-\ln x$	||	$-$	0	$+$	

E- Pour $x>1$, $F(x)>\ln x$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$.

Pour $0<x<1$, $F(x)<\ln x$. Or $\lim\limits_{x\to 0} \ln x=-\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} F(x)=-\infty$.

Le tableau des variations de F est donc le suivant :

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	||	$+$	
$F(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

E9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$.

Pour tout réel strictement positif α on pose :

$I(\alpha)=\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx$, $J(\alpha)=\displaystyle\int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ et $K(\alpha)=\displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

A ☐ $I(\alpha)$ est un réel positif.

B ☐ $J(\alpha)=\alpha+\ln\dfrac{1+e^\alpha}{2}$.

C ☐ $K(\alpha)=\displaystyle\int_0^\alpha \left(1-\frac{e^\alpha}{1+e^\alpha}\right)dx$.

D ☐	Pour tout réel x, $f(x)+f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.
E ☐	De la relation précédente on déduit par intégration : $I(\alpha)=K(\alpha)-f(\alpha)+\ln 2$.

orrigé C9

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-C-E-

A- Pour tout réel x, $e^{-x}>0$, $1+e^x>1$ donc $ln(1+e^x)>0$.

Alors pour tout réel x, $f(x)\geq 0$. Donc $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ est un réel positif.

B- $g: x \to \dfrac{e^x}{1+e^x}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u: x \to 1+e^x$. Comme u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G=ln\,u$. Alors $J(\alpha)=\left[ln(1+e^x)\right]_0^{\alpha}=ln(1+e^{\alpha})-ln2=ln\dfrac{1+e^{\alpha}}{2}$.

C- $\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}=1-\dfrac{1}{1+e^x}$. Alors $K(\alpha)=\int_0^{\alpha}(1-\dfrac{e^x}{1+e^x})\,dx$ soit

$K(\alpha)=\int_0^{\alpha}dx-J(\alpha)=\alpha-ln\dfrac{1+e^{\alpha}}{2}$.

D- Pour tout réel x, $f'(x)=-e^{-x}ln(1+e^x)+e^{-x}\dfrac{e^x}{1+e^x}$ donc

$f(x)+f'(x)=e^{-x}ln(1+e^x)-e^{-x}ln(1+e^x)+\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{1}{1+e^x}$.

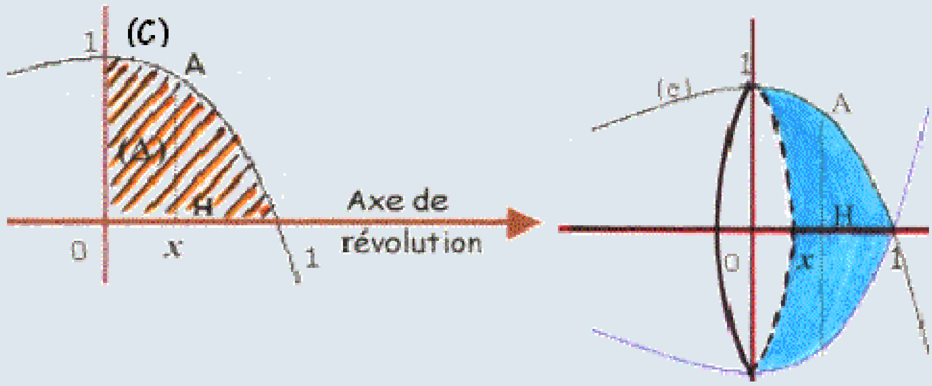
E- De la relation précédente on déduit par intégration :

$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx+\int_0^{\alpha} f'(x)\,dx=\int_0^{\alpha}\dfrac{1}{1+e^x}\,dx$ soit

$I(\alpha)+\left[f(x)\right]_0^{\alpha}=K(\alpha)$. D'où $I(\alpha)=K(\alpha)-f(\alpha)+ln2$.

E10

Soit (C) la portion de courbe représentant sur $[0;1]$ la fonction f définie par $f(x)=(1-x)e^x$, et soit (Δ) le domaine plan limité par (C) et les axes de coordonnées.
On veut déterminer le volume V du solide engendré par la rotation de (Δ) autour de (Ox).



A ☐ L'intersection du solide et du plan d'abscisse x, perpendiculaire à l'axe de révolution, est un disque de rayon $AH=(1-x)e^x$.

B ☐ En unités de volume, $\frac{V}{\pi}=\int_0^1(1-x)^2e^{2x}dx$.

C ☐ Si on pose $J=\int_0^1(1-x)e^{2x}dx$ alors $\frac{V}{\pi}=-\frac{1}{4}+J$.

D ☐ $J=\frac{e^3+3}{4}$.

E ☐ $V=\frac{\pi(e^2-5)}{4}$ unités de volume.

---

corrigé C10

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-B-E-

A- L'intersection du solide et du plan d'abscisse x, perpendiculaire à l'axe de révolution, est un disque dont le centre a pour abscisse x et dont le rayon AH est égal à l'ordonnée du point A de (C) d'abscisse x. Cette ordonnée est positive car $0 \leq x \leq 1$. D'où $AH = f(x) = (1-x)e^{x}$.

B- L'aire du disque de rayon AH est $S(x) = \pi \times AH^2 = \pi(1-x)^2 e^{2x}$ u.a.

Alors le volume du solide est $V = \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \pi(1-x)^2 e^{2x}dx$ unités de volume. Donc $\dfrac{V}{\pi} = \int_0^1 (1-x)^2 e^{2x}dx$ u.v.

C- Calculons $\dfrac{V}{\pi} = \int_0^1 (1-x)^2 e^{2x}\, dx$ en intégrant par parties.

Posons $\begin{cases} u(x) = (1-x^2) \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = -2(1-x) \\ v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

u, u', v, v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc $\dfrac{V}{\pi} = \left[\dfrac{1}{2}(1-x)^2 e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -(1-x)e^{2x}dx$. Si on pose $J = \int_0^1 (1-x)e^{2x}dx$ alors $\dfrac{V}{\pi} = -\dfrac{1}{2} + J$.

D- Calculons $J = \int_0^1 (1-x)e^{2x}dx$ en intégrant par parties.

Posons $\begin{cases} u(x) = (1-x) \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

u, u', v, v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc $J = \left[\dfrac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\dfrac{1}{2}e^{2x}dx = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$. Alors

$J = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}(e^2 - 1)$ soit $J = \dfrac{1}{4}(e^2 - 3)$.

E- On en déduit : $\dfrac{V}{\pi} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}(e^2 - 3) = \dfrac{1}{4}(e^2 - 5)$ soit $V = \dfrac{\pi(e^2 - 5)}{4}$ u.v.
