Qcm

ARITHMETIQUE

Préambule: dans les exercices suivants, les notations sont habituelles.

E1	Si $a \equiv b(n)$
A	$\forall x \in \mathbb{Z}, a - x \equiv b - x\left[n\right]$
B	$a + n \equiv b\left[n\right]$
C	$a \times x \equiv b \times x\left[n \times x\right]$
D	$a! \equiv b!\left[n\right]$
E	n divise (b-a)

Aide

CORRECTION

C1

A- $\forall x \in \mathbb{Z}, -x = -x(n)$ donc $\forall x \in \mathbb{Z}, a - x = b - x[n]$

B- $n \equiv 0(n)$ donc $a + n \equiv b[n]$

C- si x=0, $0 \equiv 0[0]$. Sinon, $b - a = k \times n$ donc en multipliant par x non nul, $bx - ax = k \times nx$ ce qui en d'autres termes signifie $a \times x \equiv b \times x[n \times x]$

D- $a! = b![n]$ non : par exemple $5 = 1[4]$ mais $5! = 0[4]$ donc D est fausse

E- OUI n divise (b-a) car $b - a = k \times n$ donc n divise b-a ou a-b au choix par définition.
Dans Z, si a divise b, a divise -b.

E2 Soient a et b deux relatifs , $g=(a\wedge b)$, $m=(a\vee b)$ et $a=g\times a'$ ainsi que $b=g\times b'$

A ☐	$m=a'\times b'\times g$
B ☐	$(a'\wedge b')=1$
C ☐	$(a'+b'\wedge a'\times b')=1$
D ☐	$(a+b\wedge m)=(a\wedge b)$
E ☐	$(a'^2+b'^2\wedge a'+b')=1$

Aide

A- A est fausse: $m=|a'\times b'|\times g$; en effet, par essence m et g sont des nombres strictement positives, ce qui n'est pas le cas de a' et b'.

B- Presque une définition. Si g est le pgcd de a et b alors, $a=g\times a'$, $b=g\times b'$ et $(a'\wedge b')=1$. B est vraie

C- Soit $g=(a'+b'\wedge a'\times b')$. G divise a'(a'+b') et b'(a'+b'), donc a'(a'+b')-a'b' et b'(a'+b')-a'b', soit a'^2 et b'^2. g divise $pgcd(a'^2,a'b')=a'\times pgcd(a',b')=a'$ et g divise $pgcd(b'^2,a'b')=b'\times pgcd(a',b')=b'$. On a donc g=1. C est vraie

D- Une conséquence triviale. On multiplie par g : $g(a'+b'\wedge a'\times b')=g=(a\wedge b)$ et $(ga'+gb'\wedge ga'\times b')=(a\wedge b)$; D est juste

E- Il suffit de prendre a'=3 et b'=5 pour voir que ceci est faux. En effet, la somme de 2 impairs est paire et la somme de 2 carrés impaires est paire . Deux nombres pairs ne sont pas premiers entre eux

E3 Soit le polynôme P défini : $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)=n^3-n$

A ☐	P(n) est pair
B ☐	$P(n)\equiv 0[4]$
C ☐	n^3-n est divisible par 3
D ☐	$n^3-n\equiv 0[6]$

Aide

E $P(n) \equiv 0[12]$

corrigé C3

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-C-D-

A- Si n est pair $n \equiv 0[2]$ et donc $n^2 \equiv 0[2]$, par suite $n^2 - n \equiv 0[2]$ et P(
est pair.
Si n est impair $n \equiv 1[2]$ et donc $n^2 \equiv 1[2]$, par suite $n^2 - n \equiv 0[2]$ et
est pair. Par disjonction des cas P(n) est pair

B- $P(n) \equiv 0[4]$ P(2)=6 n'est pas congru à 0 modulo 4, donc B est fausse

C- $n \equiv 0(3) \Rightarrow n^3 \equiv 0(3)$ et $n^3 - n \equiv 0(3)$; de même $n \equiv 1(3) \Rightarrow n^3 \equiv 1(3)$ et $n^3 - n \equiv 0(3)$; enfin $n \equiv 2(3) \Rightarrow n^3 \equiv 2(3)$ et $n^3 - n \equiv 0(3)$. Par disjonctio
des cas, on a montré que $P(n) \equiv 0(3)$.

D- On sait que $P(n) \equiv 0(2)$ d'après A et $P(n) \equiv 0(3)$. 2 et 3 sont premiers
entre eux, donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, $P(n) \equiv 0(6$

E- P(6)=210 n'est pas congru à 0 modulo 12. Donc cette proposition est fa

E4 Soit $a = 3n - 5$ et $b = 2n - 7$ définis $\forall n \geq 4$

A a et b sont premiers entre eux pour tout n. Aide

B

Si n=12345, alors le pgcd(a,b) vaut 11.

C

Tout diviseur commun à a et b divise 11.

D

Il existe des valeurs n pour lesquelles $\frac{2a}{b}$ est un entier naturel.

E

$n = 10 \Leftrightarrow 2a - 3b = 11$

---

corrigé C4

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -B-C-D-

A- Si n=9, a=22 et b=11, ce qui infirme la proposition.

B- Si n=12345, a=37030 et b=24683 ; 24683 est un nombre premier, donc a et b sont premiers entre eux.

C- Si d divise a et b, il divise 2a-3b=6n-10-6n+21=11, donc C est juste

D- On a vu en A que si n=9, 2a=44 et b=11, donc $\frac{2a}{b} = 4$. La proposition est donc vraie.

E- Il est clair que $n = 10 \Rightarrow 2a - 3b = 11$, mais que la réciproque est fausse. Il suffit de voir la réponse de la question A.

E5 Soit le polynôme P défini : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = 9^n$

A
☐ $P(5) \equiv 1[11]$

B
☐ $P(60) \equiv 2[11]$

C
☐ Il existe des valeurs de n pour lesquelles le reste de la division de P(n) par 11 est 2

Aide

D
☐ $2 \times P(n-1) \equiv 2^{6n-5}[11]$

E
☐ P(2) s'écrit (2D9) en hexadécimal

corrigé C5

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-D-E-

A- $9^2 \equiv 4(11)$, $9^4 \equiv 4^2 = 16 \equiv 5(11)$, d'où $9^5 \equiv 5 \times 9 \equiv 1(11)$; A est donc juste

B- si $9^5 \equiv 1(11)$ alors, $9^{5\times 12} \equiv 1^{12}(11)$ et $9^{60} \equiv 1(11)$; B est fausse.

C- Cherchons les congruences successives des puissances de 9 modulo 11 : $9 \equiv 9(11)$, $9^2 \equiv 4(11)$ $9^3 \equiv 3(11)$ $9^4 \equiv 5(11)$ $9^5 \equiv 1(11)$ et le cycle est fini ; les seules congruences modulo 11 des puissances de 9 sont 9,4,3,5,1 et donc la réponse est négative. est fausse.

D- Pour n variant de 2 à 6, les congruences respectives de $2^{6n-5}[11]$ sont : 7,8,6,10,2 et celles de $2 \times P(n-1)[11]$ sont : 7,8,6,10,2 . Cette égalité est donc vraie.

E- P(3)=719 et 2D9= $= 2\times 16^2 + 13\times 16 + 9 = 729$; la proposition est juste.

E 6

Soit n appartenant à N, et $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

vérifiant : $\begin{cases} n = 8a+1 \\ n = 5b+2 \end{cases}$ et l'équation (E) : $8x+5y=1$

où $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

A ☐ L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{(5k-3, -8k+5), k \in \mathbb{Z}\}$

Aide

B ☐ $(a,-b)$ est solution de (E)

C

$n \equiv 15[40]$

D

L'ensemble des solutions de $8x+5y=100$ est $S=\{(500k-300,-800k+500), k\in\mathbb{Z}\}$

E

Un groupe d'hommes et de femmes ont dépensé 1(pièces. Chaque homme a dépensé 8 pièces et chaq femme 5 pièces. Le problème qui consiste à cherc le nombre d'hommes et de femmes admet plusieur solutions.

corrigé C6

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-B-E-

A- (-3,5) est une solution évidente. Donc $\begin{matrix} 8x+5y=1 \\ 8\times -3+5\times 5=1 \end{matrix}$ et par sou

$8(x+3)+5(y-5)=0$. 5 divise 8(x+3), or 8 et 5 sont premiers ; d'apr

théorème de GAUSS, 5 divise x+3, et x=5k-3. On en déduit que y-5=-8k

l'ensemble des solutions est bien $S=\{(5k-3,-8k+5),k\in\mathbb{Z}\}$. A e

B- On a $n-n=8a+1-5b-2=0$ d'où $8a-5b=1$ et B est juste.

C- On sait que (a,-b) est solution de (E) et on connaît toutes les solutions d

donc $n=8(5k-3)+1=40k-23\equiv 17[23]$; on obtient la même chose avec

est fausse

D- (10,4) est une solution évidente. Donc $\begin{matrix} 8x+5y=100 \\ 8\times 10+5\times 4=100 \end{matrix}$ et par

soustraction, $8(x-10)+5(y-4)=0$. 5 divise 8(x-10), or 8 et 5 sont

premiers ; d'après le théorème de GAUSS, 5 divise x-10, et x=5k+10. O

déduit que y-4=-8k, donc l'ensemble des solutions est bien

$S=\{(5k+10,-8k+4),k\in\mathbb{Z}\}$. D est donc fausse. La tentation ne

faire perdre la tête. Il y a des méthodes, il faut s'y tenir.

E- On doit donc résoudre $8x+5y=1$, avec x et y qui doivent être positi

donc $5k+10>0 \Leftrightarrow k>-2$ et $-8k+4>0 \Leftrightarrow k<\frac{1}{2}$; il y adonc 2 vale

qui conviennent : k=0 et k=-1, soit 2 solutions (10,4) et (5,12) ; la répons

donc juste.

E7 Soient a et b deux entiers premiers entre eux

A

☐ a+b et 2ab sont premiers entre eux

B

☐ a^2 et b^2 sont premiers entre eux

Aide

C pgcd(a+b, ab)=1

D $(a+b)$ et (a^2-ab+b^2) sont premiers entre eux ou divisibles par 3

E Il existe des valeurs de a et b pour lesquelles $(a+b)$ et (a^2-ab+b^2) sont divisibles par 6

corrigé C7

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -B-C-D-

A- si a=7 et b=9, a+b=16 et 2ab=126 ne sont pas premiers entre eux est fausse.

B- Soit g le pgcd de a² et b². $g\,|\,a^2$ et $g\,|\,b^2$ donc $g\,|\,a^2b$ et $g\,|\,ab^2$ don divise $pgcd(a^2b,ab^2)=a\times b\times pgcd(a,b)=a\times b$. Ensuite g divise $pgcd(a^2,ab)=a\times pgcd(a,b)=a$ et g divise $pgcd(b^2,ab)=b\times pgcd(a,b)=b$. On a donc g=1. (il est clair que si $pgcd(a,b)=1\Rightarrow pgcd(ac,bc)=c$). B est juste

C- Si $g\,|\,a+b$ et $g\,|\,ab$, $g\,|\,(a+b)a-ab=a^2$ et $g\,|\,(a+b)b-ab=b^2$; or et b² sont premiers entre eux, donc g=1 et a+b et ab sont premie entre eux.

D- Soit $g=pgcd(a+b,a^2-ab+b^2)$. $g\,|\,a+b$ et $g\,|\,a^2-ab+b^2$, $g\,|\,(a+b)^2-a^2+ab-b^2=3ab$; or a+b et ab sont premiers entre eu $g\,|\,3(a+b)$ et donc $g\,|\,pgcd(3(a+b),3ab)=3$; Au total g|3 ou g=1, c qui signifie que D est juste.

E- On sait que 3 peut diviser ces 2 nombres. Pour que E soit juste, i faudrait que 2 divise ces nombres. Pour que a+b soit pair, il faut que a et b soient impairs (ils sont premiers entre eux) . Or si c'e le cas, a² est impair, de même que b² et ab, donc a²-ab+b² serai impair et 2 ne peut diviser ce nombre. La réponse E est fausse.

E8 Soit les nombre de Fermat $F_n=2^{2^n}+1$ où $n\in\mathbb{N}$

A ☐ $F_n\equiv 7(10)$

B ☐ $n\equiv 3(4)\Rightarrow F_n\equiv 37(100)$

C ☐ $n\equiv 3(4)\Rightarrow F_n\equiv 57(100)$

Aide

D ☐ $F_n\,|\,F_{n+1}-2$

E ☐ $pgcd(F_n,F_{n+1})=1$

corrigé C8

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -A-C-D-E-

A- $n>1 \Rightarrow 2^n \equiv 0[4]$; donc $2^{4k}=(16)^k \equiv 6[10]$ par récurrence évident

Et enfin $2^{2^n}+1 \equiv 7[10]$; A est juste.

B- $n=3 \Rightarrow 2^3=8$ et $2^8 \equiv 56[100]$, donc $n\equiv 3 \Rightarrow F_3 \equiv 57[100]$. B est don

fausse.

C- Montrons le par récurrence. Pour n=0 la propriété est vrais, on vient de le montrer. Soit n quelconque, supposons que

$2^{2^{4n+3}}+1 \equiv 57[100]$. $2^{2^{4(n+1)+3}}=2^{2^{4n+3}\times 2^4}=\left(2^{2^{4n+3}}\right)^{16}$; donc

$\left(2^{2^{4n+3}}\right)^{16} \equiv 56^{16}[100]$; or $56^{16} \equiv 56[100]$ (il suffit d'élever au carr

fois de suite). Au total, $2^{2^{4(n+1)+3}}+1 \equiv 57[100]$; CQFD

D- Posons $a=2^{2^n}$. $F_{n+1}-2=a^2-1=(a-1)\times(a+1)=(a-1)\times F_n$; or a-1 appartient à N. on en déduit par définition que $F_n \mid F_{n+1}-2$. D est juste

E- Soit d un diviseur de F_n et de $F_{n+1}-2$, alors d divise 2 (combina linéaire) . les seules possibilités sont n=1 ou n=2. Or n=2 est impossible car F_n est impair. Donc d=1 et les nombres sont premiers entre eux.

E 9

Soit $E=\{0,1,2,3,\dots,24,25\}$; soit $\Omega=\{A,B,C,D,E,\dots,X,Y,Z\}$ à tout élément de E on associe dans l'ordre un élément de Ω par une fonction bijective (g(0)=A, g(1)=B, g(2)=C ….). On note g^{-1} la réciproque de Ω dans E (g^{-1}(A)=0, g^{-1}(B)=1, g^{-1}(C)=2 …). Soit enfin f une application de E dans E qui à $x \to f(x)=17x+22[26]$. A tout caractère « z » de Ω on associe y un caractère de Ω tel que $y=g\circ f\circ g^{-1}($ On dit que l'on a codé le caractère « z ». Inversement tout caractère « t » de Ω on associe x un caractère Ω tel que $x=g^{-1}\circ f\circ g(t)$. On dit que l'on a décodé le caractère « t ».

A La seule solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation $17x-26y=1$ est (23,15) .

B La seule solution dans $E\times E$ de l'équation $17x-26y=1$ est (23,15)

C le codage de « HUIT » est « LYCA »

Aide

D f n'est pas une bijection de E dans E

E La fonction réciproque de f est $f^{-1}(x)=23x+14[2$

---

corrigé C9

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -B-E-

A- $17\times 23-26\times 15=1$, donc (23,15) est solution, mais on sait qu'il existe une infinité de solutions. Plus précis : $17(x+23)-26(y+15)=0$ et $17(x+23)=26(y+15)$. 17 et 26 sont premiers, 17 divise donc y+15 d'après le TDG. Y=17k-15 et x=-26k
23

B- Montrons que la seule solution dans $E\times E$ est (23,15) : on a $0\le 17\text{k-}15\ \le 25\ \ \Leftrightarrow 15\le 17\text{k}\ \le 40 \Leftrightarrow \dfrac{15}{17}\le \text{k}\ \le \dfrac{40}{17}$; les seules valeurs k sont 1 et 2. On a aussi $0\le \text{-}26\text{k-}23\ \le 25\ \ \Leftrightarrow 23\le -26\text{k}\ \le 48 \Leftrightarrow \dfrac{23}{26}\le \text{k}\ \le \dfrac{48}{26}$; la seule valeur k admissibles est donc 1. On a ainsi prouvé que la seule solution dans $E\times E$ est (23,15) :

C- H est codé 7 dans E ; f(7)=11 ; 11 est codé L. U est codé 20 dans f(20)=24 : 24 est codé Y. I est codé 8 dans E : f(8)=2 : 2 est co

D- On peut chercher les images de tout élément de E par f et voir à tout élément de E on associe un seul élément de E. F est donc bijective. L'autre moyen est de réfléchir si l'équation f(x)=y où y est dans E admet une seul solution dans E, ce qui prouverait que est bijective. Or $f(x)=z \Leftrightarrow 17x+22\equiv z[26] \Leftrightarrow 17x-26y=z-22$. cette équation admet une infinité de solutions dans $Z\times Z$ si pgcd(17,26) divise z-22, ce qui est le cas. Enfin si on cherche le solutions dans E, il n'y en aura qu'une . en effet les solutions son la forme x=-26k+r .

E- Comme f est bijective de E dans E, f admet une bijection réciproque de E dans E. D'après la 1° question on sait que $17\times 23\equiv 1[26]\ 14\times 17+22\equiv 0[26]$ donc $f\circ f^{-1}(x)=17(23x+14)+22\equiv x[26]$. On a donc $f\circ f^{-1}=Id$. Comm sait que f admet une fonction réciproque, que l'on en tient une , c'est la bonne car la fonction réciproque d'une fonction est uniq E est vraie.

E10

Soit $a=2^{p\times q-1}$, b$=2^{p-1}$, c$=2^{q-1}$ où p et q sont des nombres premiers supérieurs à 2. $d=2^{n-1}$ où n est un entier quelconque positif. De plus, le petit théorème de Fermat énonce que si p est premier, et si p ne divise pas a, alors, $a^{p-1}\equiv 1[p]$.

A
☐ Si q est premier, alors c est premier

B
☐ c divise a et b divise a

C
☐ si d est premier, alors n est premier

D
☐ Si m est le plus petit entier positif tel que $2^m\equiv 1[p]$, et si $2^r\equiv 1[p]$, alors m divise r

E
☐ Si n est premier, d'après le théorème de Fermat, tout diviseur premier de $d=2^n-1$ est de la forme 2kn+1

Aide

---

corrigé C10

Vous avez coché les cases: -

Il fallait cocher les cases: -B-C-D-E-

A- $2^{11}-1=23\times 89$, A est donc fausse

B- On sait que $1+x+x^2+x^3+.....+x^{p-1}=\frac{x^p-1}{x-1}$ et faisons $x=2^q$. On a alors $(2^q-1)\times\left(1+(2^q)+(2^q)^2+(2^q)^3+.....+(2^q)^{p-1}\right)=(2^q)^p-1=2^{pq}-1$ c qui prouve que c divise a et de même on montre que b divise a. B es vraie $2^{pq}-1$ n'est pas premier. Donc par contraposition, si 2^n-1 es premier, n est premier.

C- Montrons le par contraposition. Supposons que n n'est pas premier. On a donc n=pq avec p et q diviseurs de n supérieurs à 2. D'après la question B,

D- divisons r par m : $r=mp'+r'$ et $0\leq r'<m$. On a $2^m\equiv 1[p]$, donc $2^{mp'}\equiv 1[p]$ et $2^{mp'+r'}\equiv 2^{r'}[p]$ donc d'après les hypothèses, $2^r\equiv 2^{r'}\equiv 1[p]$. Or m est le plus petit entier positif satisfaisant cett propriété et $0\leq r'<m$. Donc r'=0 et m divise r. C est juste.

E- n est premier. Soit p un diviseur premier, donc $2^n\equiv 1[p]$. $2^{p-1}\equiv 1[p]$ d'après le théorème de Fermat. D'après ce qui précède, n divise p-1 mais p étant premier supérieur à 2, p-1 est pair. Donc p=2kn+1 (n e aussi impair). E est juste. Cette propriété permet de chercher par les diviseurs de 2^n-1 uniquement les nombres de la forme 2kn+1, ce qui réduit le champ des recherches.