Le produit scalaire

EXERCICE 1

Une unité de longueur a été choisie.
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' est le milieu de [AC] et D le point défini par la relation : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

1. a) Démontrer que D est le barycentre du système : {(A,3); (B,-2); (C,3)}
   b) En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].

2. Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$

3. Calculer DA^2 et DB^2

4. Déterminer l'ensemble (E) des points M vérifiant la relation : $3\,MA^2 - 2\,MB^2 + 3\,MC^2 = 12$
Vérifier que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E).

EXERCICE 2

On considère dans le plan un triangle ABC tel que : AB = 7 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm.
Soit I le milieu de [BC].

1. Montrer que AI = $\sqrt{33}$ cm.

2. a) Soit M un point du plan.
Pour quelle valeur du réel *m* le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant du point M ?
Déterminer alors $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
   b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.

EXERCICE 3

Écrire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, sachant que le projeté orthogonal de l'origine sur $\mathcal{P}$ est le point A(1; 5; 7).

EXERCICE 4

Écrire une équation de la sphère de centre I(3; 1; -4), passant par le point A(4; 2; 1).

EXERCICE 5

Vérifier que A(4; -1; 2) est un point de la sphère $\mathcal{S}$; écrire une équation du plan tangent en A à $\mathcal{S}$.
$\mathcal{S}\ :\ x^2+y^2+z^2-6x+2y+4z-3=0$.

EXERCICE 6

Calculer la distance *d* du point A à la droite $\mathcal{D}$ sachant que :
la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $-x+4y-2=0$;
et le point A a pour coordonnées (-1; 3).

EXERCICE 7

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) et D(0; -1; 0).

1. Vérifier que le triangle ABC est équilatéral.

2. Les droites (AD) et (BC) sont-elles orthogonales ?

3. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].
Calculer $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CJ}$. En déduire une mesure en degrés de l'angle $\widehat{ICJ}$.

4. On appelle H le projeté orthogonal de J sur la droite (CI).
Calculer les coordonnées de H.
Quel rôle joue le point H sur le triangle ABC ?

EXERCICE 8

ABCD est un tétraèdre, tel que AB = CD = a. On appelle I, J, K et L les milieux respectifs de [AD], [BC], [AC] et [BD].
1. Montrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{IJ}$ et que $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{KL}$.
2. Montrer que (IJ) et (KL) sont sécantes et orthogonales.
3. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Calculer la longueur de ses côtés en fonction de a.
4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que IKJL soit un carré.

EXERCICE 9

Soit $\vec{u}\left(\sqrt{2}-1; 1; \sqrt{2}+1\right)$ et $\vec{v}\left(1; \sqrt{2}+1; -4+2\sqrt{2}\right)$.
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$; qu'en déduit-on pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
Vérifier ce résultat par un autre calcul.

EXERCICE 10

Soient A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
Démontrer que $(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + CB^2) = 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de relations de Chasles judicieusement choisies dans le premier membre.

EXERCICE 11

1. Soit ABC est triangle. Pour tout point M du plan, montrer l'égalité : .
2. *Application :* montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Indication : On appelle H le point d'intersection de deux hauteurs. Montrer que H appartient aussi à la troisième hauteur.

Correction

EXERCICE 1

1. a) Le point D est défini par la relation suivante : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ donc :

D'où : **D est le barycentre du système {(A,3); (B,-2); (C,3)}**

1. b) On sait que :
D est le barycentre du système (A, 3) (B, -2) (C, 3),
B' est le milieu du segment [AC], donc B' est le barycentre de (A, 3) (C, 3).
D'après le théorème d'associativité du barycentre, D est le barycentre de (B', 6) (B, -2).
D appartient donc à la droite (BB'), médiatrice du segment [AC] (car ABC est un triangle équilatéral).

2. On sait que D est le barycentre de (B', 6) (B, -2). Donc :

3.

Comme $\overrightarrow{BD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$, alors :

4.

L'ensemble des points M est le cercle de centre D et de rayon $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Vérifions que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à l'ensemble (E) :
Comme ABC est un triangle équilatéral, alors GA = GB = GC, donc :

$$3GA^2 - 2GB^2 + 3GC^2 = 4GB^2 = 4 \times \left(\frac{2}{3}BB'\right)^2 = 4 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12$$

G appartient à l'ensemble (E).

EXERCICE 2

1. Montrons que AI = $\sqrt{33}$:

Première méthode :

D'après le théorème de la médiane, on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Donc :

D'où : AI = $\sqrt{33}$ cm.

Deuxième méthode :

Remarquons d'abord que (AI) est la médiane du triangle ABC issue de A.

Identité du parrallélogramme :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a : $||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 + ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$

En prenant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on a :

$||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|| = 2||\overrightarrow{AI}||$ et $||\vec{u}-\vec{v}|| = ||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{BC}||$.

L'identité du parrallèlogramme devient alors :

$||\overrightarrow{AI}||^2 = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - \frac{1}{2}||BC||^2\right)$

L'application numérique donne : $AI^2 = \frac{1}{2}\left(7^2 + 5^2 - \frac{1}{2}\times 4^2\right) = 33$

D'où : AI = $\sqrt{33}$ cm.

2. a) Pour quelle valeur du réel *m* le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant du point M ?

Donc $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M si et seulement si *m* = -2.

On obtient alors : $\vec{u} = -2\overrightarrow{IA}$.

2. b) Déterminons l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que -MA² + MB² + MC² = -25 :

Transformons -MA² + MB² + MC² afin de faire apparaître le point I.

Or, on remarque que -25 = -33 + 2^2 + 2^2 = -IA² + IB² + IC², donc :

Soit J le point du plan tel que $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{IA}$

On a donc que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0$.

$\mathcal{F}$ est donc le cercle de diamètre [IJ].

EXERCICE 3

Ecrivons une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$, sachant que le projeté orthogonal de l'origine sur $\mathcal{P}$ est le point A(1; 5; 7) :

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que pour tout point M(x; y; z) du plan $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OA} = 0$

M appartient au plan $\mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

.

D'où l'équation du plan $\mathcal{P}$.

EXERCICE 4

Ecrivons une équation de la sphère de centre I(3; 1; -4), passant par le point A(4; 2; 1) :

Calculons le rayon de la sphère : $R^2 = AI^2 = (3 - 4)^2 + (1 - 2)^2 + (-4 - 1)^2 = 27$.

On en déduit l'équation de la sphère : $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 27$.

EXERCICE 5

Vérifions que A(4; -1; 2) est un point de la sphère $\mathcal{S}$:

Transformons l'équation de $\mathcal{S}$:

Regardons si les coordonnées de A vérifient l'équation de $\mathcal{S}$:

$(4 - 3)^2 + (-1 + 1)^2 + (2 + 2)^2 = 1^2 + 0^2 + 4^2 = 17$.

Donc le point A appartient à la sphère $\mathcal{S}$.

Ecrivons une équation du plan tangent en A à $\mathcal{S}$:

Appelons ce plan $\mathcal{P}$.

Le centre de la sphère est le point I(3; -1; -2). $\overrightarrow{AI}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

M (x ;y ;z) appartient à $\mathcal{P} \iff \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\iff (4-3) \times (x-4) + (-1-(-1)) \times (y+1) + (2-(-2)) \times (z-2) = 0$

$\iff x + 4z - 12 = 0$

D'où l'équation du plan $\mathcal{P}$.

EXERCICE 6

Calculons la distance *d* du point A à la droite $\mathcal{D}$:

Distance d'un point à une droite dans le plan :

On considère la droite $\mathcal{D}$: ax + by + c = 0, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

$M(x_M; y_M; z_M)$ est un point du plan.

La distance $d(\mathrm{M}, \mathcal{D})$ vaut ainsi : $d(\mathrm{M}, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

En appliquant la formule, il vient : $d = \dfrac{ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

D'où, $d = \dfrac{-1 \times (-1) + 4 \times 3 - 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{17}} = \dfrac{11\sqrt{17}}{17}$

Remarque : Quand on a oublié la formule, on la redémontre...

Soit $H(xH; y_H)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

On note $\mathcal{D}'$ la perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ passant par A.

$\vec{n}(a; b)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ (car c'est un vecteur normal de $\mathcal{D}$)

Soit $B(x_B; y_B)$ un point de $\mathcal{D}$

$|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}| = \ |\overrightarrow{AH}|| \times |\vec{n}| = d \times |\vec{n}|$

D'autre part, avec l'autre formule du produit scalaire,

On en déduit que : $d = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{n}|}{||\vec{n}||} = \dfrac{|ax_A + b_{y_A} + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

EXERCICE 7

1. Vérifions que le triangle ABC est équilatéral :

On a facilement que $AB = BC = CA = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$ donc le triangle ABC est équilatéral.

2. Les droites (AD) et (BC) sont-elles orthogonales ?

On a : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = (0-1)\times(0-0) + ((-1)-0)\times(0-1) + (0-0)\times(1-0) = 1$

Donc les droites (AD) et (BC) ne sont pas orthogonales.

3. Calculons $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CJ}$:

On a $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, donc :

Déduisons-en une mesure de l'angle $\widehat{ICJ}$:

$\cos(\widehat{ICJ}) = \dfrac{\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CJ}}{||\overrightarrow{CI}||\times||\overrightarrow{CI}||}$.

Or, $|\overrightarrow{CI}| = ||\overrightarrow{CI}|| = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, donc ;

$\cos(\widehat{ICJ}) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{3}$

Avec la calculatrice, on obtient : $\widehat{ICJ} = 48°$.

4. Calculons les coordonnées du point H :

Le point H est l'intersection de la droite (CI) et du plan $\mathcal{P}$ normal à la droite (CI) passant par I. On choisit pour vecteur normal de $\mathcal{P}$ le vecteur $\vec{n} = 2\overrightarrow{CI}$ qui a pour coordonnées (1; 1; -2).

L'équation de $\mathcal{P}$ est donc de la forme : $x + y - 2z + d = 0$.

Pour trouver d, on dit que :

$J \in P \iff \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + 0 + d = 0$

$\iff d = 0$

D'où, $\mathcal{P} : x + y - 2z = 0$.

D'autre part, $(CI) : \begin{cases} x = & t \\ y = & t \\ z = & -2t+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

On injecte l'équation de (CI) dans l'équation de $\mathcal{P}$ et on trouve :

$t + t - 2\times(-2t+1) = 0 \iff t = \dfrac{1}{3}$.

On en déduit, $H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Quel rôle joue le point H sur le triangle ABC ?

On remarque que $3\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, donc H = G, centre de gravité du triangle ABC.

EXERCICE 8

1. Montrons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$ et que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{KL}$:

De même,

2. Montrons que (IJ) et (KL) sont sécantes et orthogonales :

Donc (IJ) et (KL) sont orthogonales.

On note P le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ passant par I.

Ainsi M appartient au plan $P \Longleftrightarrow$ Il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{IM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{DC}$.

Or, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, donc $J \in P$.

, donc $K \in P$.

, donc $L \in P$.

Donc, les points I, J, K et L sont coplanaires. De plus, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont non colinéaires, donc les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

3. Déterminons la nature du quadrilatère IKJL :

Les diagonales (IJ) et (KL) de ce quadrilatère sont orthogonales, donc IKJL est un losange de côté $\overrightarrow{IL}|| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| = \frac{a}{2}$.

4. Trouvons une condition nécessaire et suffisante pour que IKJL soit un carré :

IKJL est un carré $\Longleftrightarrow |\overrightarrow{IJ}|| = |\overrightarrow{KL}|$

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 9

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

Vérifions ce résultat par un autre calcul :

Donc $\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u} - \vec{v}||^2$.

D'où : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

EXERCICE 10

Démontrons que $(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + CB^2) = 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$:

EXERCICE 11

1. Soit ABC est triangle. Pour tout point M du plan, montrer l'égalité : .

   2. *Application :* montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
   Indication : On appelle H le point d'intersection de deux hauteurs. Montrer que H appartient aussi à la troisième hauteur.
   1. **Montrons, pour tout point M du plan, l'égalité : :**
   .

   2. **Montrons que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes :**
   Soit H le point d'intersection de la hauteur issue de A et de celle issue de B. Montrons que H appartient à la hauteur issue de C.
   Pour cela, on doit montrer que $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
   .
   D'où : le point H appartient à la hauteur issue de C. Les trois hauteurs d'un triangle sont donc concourantes.