EXERCICES SUR LE PRODUIT SCALAIRE

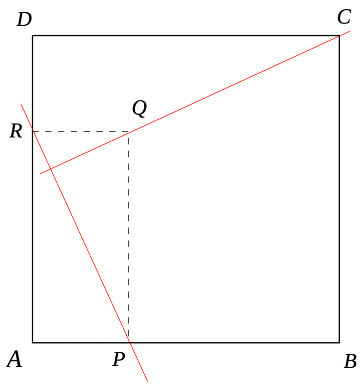
Dans toute cette série d'exercices, les repères considérés sont tous **orthonormaux**.

Exercice 1

Soit un carré $ABCD$. On construit un rectangle $APQR$ tel que :

- P et R sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré
- $AP = DR$

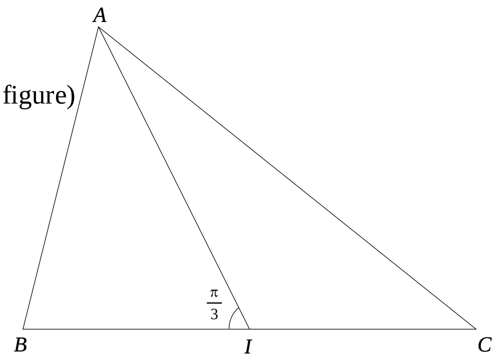
Le problème a pour objet de montrer que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.



1. Justifier que : $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ} \cdot (\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP})$
2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 2

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. (Voir les données sous la figure)



$BI = CI = 2$ et $AI = 3$

Calculer :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $AB^2 + AC^2$
3. $AB^2 - AC^2$
4. AB et AC

Exercice 3

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle :

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

GUESMI.B

Exercice 4

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5 ; 1)$ et tangent à la droite D d'équation :

$$x + y - 4 = 0$$

Indication : On rappelle que la distance entre un point $A(\alpha ; \beta)$ et une droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule : $d(A ; D) = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exercice 5

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère un triangle ABC dans un repère orthonormal avec $A(-1 ; 2)$, $B(3 ; 1)$ et $C(2 ; 4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Exercice 6

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne un point $\Omega(2 ; -3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $R = 5$.
2. Démontrer que le point $A(-2 ; 0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 7

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points suivants :

$$A(2 ; 1),\ B(7 ; 2) \text{ et } C(3 ; 4)$$

Toutes les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport :

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de $(A, 3)(B, 2)(C, -4)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
3. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. L'angle $\widehat{A}$ est-il droit ?

Exercice 8

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$
3. $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}$

Exercice 9

ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

Ce triangle est-il rectangle ? (Si oui, préciser en quel sommet)

GUESMI.B

Exercice 10

MNPQ est un carré avec $MN = 6$. *I* est le centre du carré. Calculer les produits scalaires suivants :

$$\vec{MN} \cdot \vec{QP}$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{PN}$$

$$\vec{IN} \cdot \vec{IP}$$

$$\vec{QI} \cdot \vec{NI}$$

Exercice 11

ABCD est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$. En déduire *BD*.

Exercice 12

Démontrer que :

$$\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = 4 \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 + \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = 2(\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2)$$

Lien avec le losange, le parallélogramme ?

Démontrer que :

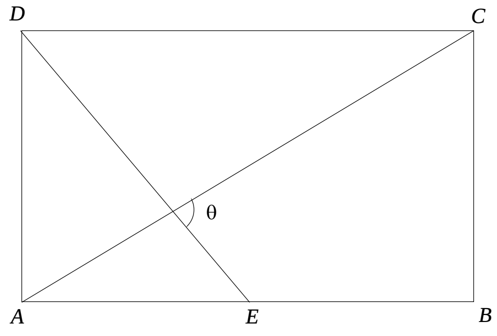
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2$$

En déduire qu'un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires si et seulement si ses côtés sont égaux.

Exercice 13

ABCD est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$.

E est le milieu de [*AB*].



1. Calculer les longueurs *AC* et *DE*.

2. En exprimant chacun des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{DE}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$, calculer le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{DE}$.

3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = (\vec{DE} \, ; \vec{AC})$ en degrés à 0,01 près.

GUESMI.B

Exercice 14

Soit le triangle ABC et K le projeté orthogonal de A sur (BC).

On donne : $AB = 6$, $BK = 4$ et $KC = 7$.

1. I est le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. Faire une figure.
2. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IB}$, ainsi que la somme :

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

3. Déterminer et représenter en rouge l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = 44$.
4. Déterminer et représenter en vert l'ensemble des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Exercice 15

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A(3 ; 5)$.

Chercher une équation de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon OA.

Exercice 16

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, trouver une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(1 ; 2)$ et de rayon 3 et déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.

Exercice 17

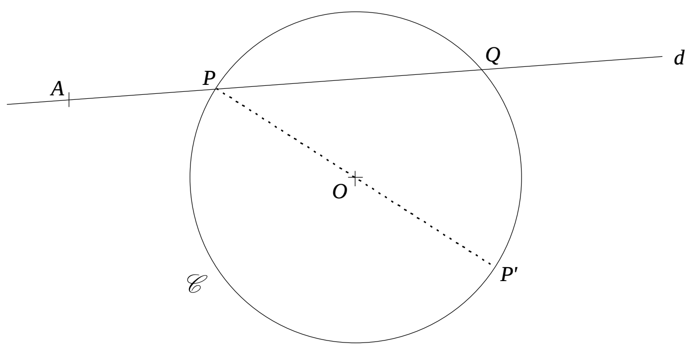
Soient $A(3 ; 1)$ et $B(-2 ; 4)$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$(x - 3)(x + 2) + (y - 1)(y - 4) = 0$$

Exercice 18

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, de rayon R et A est un point fixé du plan.



Le but du problème est d'établir la propriété suivante :

Quelle que soit la droite d passant par A, coupant le cercle $\mathscr{C}$ en deux points P et Q, le produit scalaire $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ est constant.

1. Soit P' le point diamétralement opposé à P. Montrer que :

GUESMI.B

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'}$$

2. Montrer que : $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP'} = AO^2 - R^2$

3. Conclure.

Exercice 19

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$

Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$ dont une équation est :

$$x^2 + y^2 - x + 8y + 10 = 0$$

Exercice 20

[*AB*] est un segment de milieu *I* et $AB = 2$ cm.

1. Montrer que pour tout point *M* du plan : $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$
2. Trouver et représenter l'ensemble des points *M* du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 14$

Exercice 21

On considère un segment [*AB*] avec $AB = 1$ dm.

Déterminer l'ensemble des points *M* tels que :

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1$

b) $MA^2 + MB^2 = 5$

Exercice 22

Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ passant par $A(2\,;1)$ et $B(1\,;3)$ et dont le centre Ω est situé sur la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + y + 1 = 0$.

[Indication : chercher d'abord les coordonnées de Ω]

Exercice 23

Soit *ABCD* un rectangle et *M* un point quelconque du plan. Démontrer que :

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

Soit *ABCD* un parallélogramme et *M* un point quelconque du plan. Démontrer que :

$$MD^2 - MC^2 = MA^2 - MB^2$$

Exercice 24

ABCD est un tétraèdre régulier de côté *a*. *I* est le milieu du côté [*AB*] et *J* est le milieu du côté [*CD*].

1. Calculer (en fonction de *a*) les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$.
2. Calculer et interpréter le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.
3. Calculer et interpréter le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}$.

GUESMI.B

Exercice 25

ABC est un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ puis une mesure des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ (en degrés à 10^{-1} près).

Exercice 26

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le cercle C passant par les points $A(4 ; 2)$ et $B(2 ; 6)$ et dont le centre Ω est situé sur la droite d d'équation $x + y + 2 = 0$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées de Ω.
3. Déterminer une équation de C.

Exercice 27

Le but de cet exercice est de démontrer, à l'aide du produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Soit ABC un triangle. On note A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (BC), (AC) et (AB).

On note $H = (BB') \cap (CC')$.

1. Que valent les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}$?
2. Calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Conclure.

Exercice 28

Les vecteurs $\vec{u}\,(4876 ; -4898873)$ et $\vec{v}\,(317019173 ; 315539)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 29

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'équation suivante est-elle celle d'une sphère ?

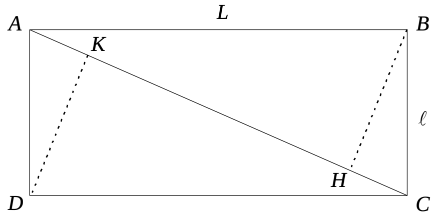
$$x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z + \frac{1}{2} = 0$$

Si oui, préciser les coordonnées de centre Ω et son rayon R.

GUESMI.B

Exercice 30

$ABCD$ est un rectangle de longueur L et largeur ℓ. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).



1. Calculer HK en fonction des longueurs des côtés L et ℓ.

[On pourra évaluer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$]

2. Comment choisir L et ℓ pour avoir $AC = 2HK$? Exprimer alors l'aire du parallélogramme $BHDK$ en fonction de l'aire du rectangle $ABCD$.

Exercice 31

À quelle condition sur les points A, B et C a-t-on : $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2 = (AB + AC)^2$?

Exercice 32

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(-2\,;\,2)$ et $B(2\,;\,2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

3. Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 40$ est un cercle (C) de centre I et de rayon $r = 4$.
4. Déterminer une équation du cercle (C).
5. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
6. Soit λ un réel négatif. Comment choisir λ pour que le point $Z(\sqrt{7}\,;\,\lambda)$ soit sur (C) ?
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en Z.

Exercice 33

$ABCD$ est un losange de sens direct et de centre O. On donne $AC = 10$ et $BD = 6$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
2. On note P le projeté orthogonal de D sur la droite (AB). Calculer AP.

Exercice 34

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, on considère les deux cercles C_1 et C_2 d'équations respectives :

$$x^2+\;y^2=4 \quad \text{et} \quad x^2+\;y^2-2x=4$$

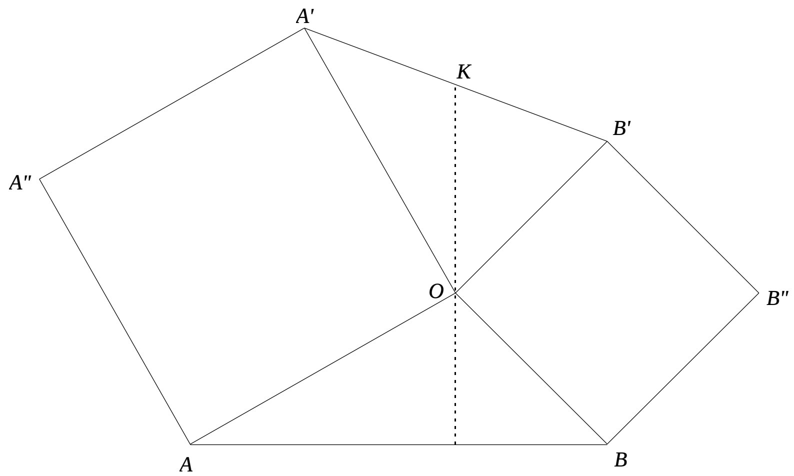
1. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de chaque cercle avec les axes de coordonnées. ($C_1 \cap (Ox)$; $C_1 \cap (Oy)$; $C_2 \cap (Ox)$ et $C_2 \cap (Oy)$)
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection des deux cercles. ($C_1 \cap C_2$)
3. Soit D la droite d'équation $y = 2x + 1$.

   Déterminer les coordonnées des éventuels points de $D \cap C_1$ et $D \cap C_2$.

Exercice 35

Dans un repère orthonormé de centre O, on considère un triangle OAB de sens direct. On construit, à l'extérieur de ce triangle, des carrés $OAA''A'$ et $OBB''B'$. (Voir figure ci-dessous)

On note K le milieu de $[A'B']$.



1. Démontrer que les angles $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\,)$ et $(\overrightarrow{OB'}\,;\overrightarrow{OA'}\,)$ sont supplémentaires.
2. Démontrer que : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}$
3. Calculer $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{AB}$

   En déduire que la médiane issue de O dans le triangle $OA'B'$ est la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
4. Démontrer que les droites (AB') et $(A'B)$ sont perpendiculaires.

GUESMI.B