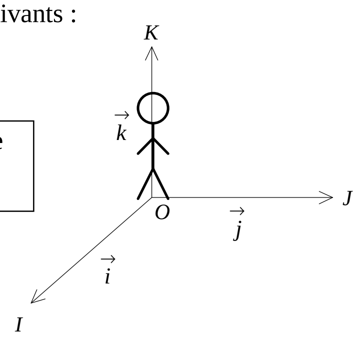
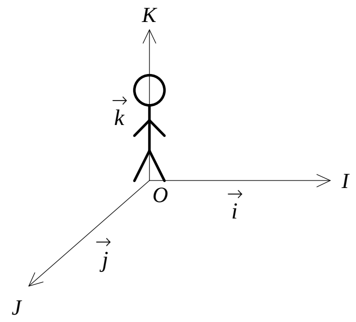
PRODUIT SCALAIRE ET PRODUIT VECTORIEL DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

Avant toutes choses, nous avons besoin dans ce chapitre d'orienter l'espace, c'est-à-dire distinguer les deux types de repères suivants :

Repère direct





Repère indirect

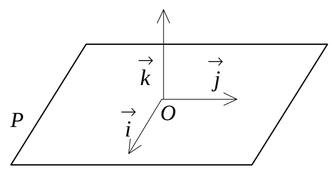
Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $(O, \vec{k})$, les pieds en O et regardant le point I.

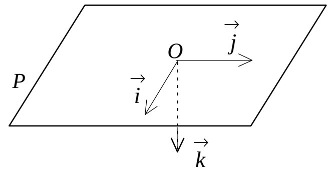
Un repère est dit "direct" si, l'observateur à le point J à sa gauche. Il est dit "indirect" dans le cas contraire.

L'espace étant orienté, il est alors possible d'orienter tout plan de l'espace :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère d'un plan P. Soit $\vec{k}$ un vecteur normal au plan P. On dira que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est direct dans P lorsque le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'est dans l'espace :

Repère du plan direct





Repère du plan indirect

Les bases de l'espace ou des plans s'orientent de la même façon que les repères.

Dans toute la suite du chapitre, les bases ou repères considérés seront orthonormaux.

I) Définition du produit scalaire (euclidien) et conséquences

<u>Définition 1</u>

On se place dans une base <u>orthonormale</u> de l'espace. Soient $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire (euclidien) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

<u>Exemple</u> : Avec $\vec{u}\,(1\,;2\,;3)$ et $\vec{v}\,(2\,;3\,;6)$, on obtient $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 + 6 + 18 = 26$.

<u>Remarques</u> :

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2 = \|\vec{u}\|^2$. On notera parfois (convention) $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$.

  De même, si A et B sont deux points, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ et on notera parfois $\overrightarrow{AB}^{\,2} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$.

- Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors le produit scalaire est nul. Mais attention, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ n'entraîne pas nécessairement ($\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$). (Considérer par exemple $\vec{u}\,(1\,;\,2\,;\,0)$ et $\vec{v}\,(2\,;\,-1\,;\,0)$ pour s'en convaincre)
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ($\vec{v}=k\,\vec{u}$) alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=x.kx+y.ky+z.kz=k(x^2+y^2+z^2)=k\,\|\vec{u}\|^2$.

<u>Théorème 1</u> *Autres expressions du produit scalaire*

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$
2. Lorsque $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$
3. Lorsque $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v'}$ où $\vec{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction donnée par $\vec{u}$.

<u>Démonstrations</u> :

Notons $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a alors :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2=x^2+2x\,x'+x'^2+y^2+2y\,y'+y'^2+z^2+2z\,z'+z'^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2+2\,(x\,x'+y\,y'+z\,z')$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$$

D'où l'expression 1.

Établissons tout d'abord les expressions 2 et 3 dans un cas particulier :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ($\vec{v}=k\,\vec{u}$ avec $k\in\mathbb{R}$) alors on a :

$$\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|\times|k|\,\|\vec{u}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$$

Or, $|k|\times\cos(\vec{u},\vec{v})=k$ (puisque $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$ si $k>0$ et $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$ si $k<0$)

Donc : $\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})=k\,\|\vec{u}\|^2=\vec{u}\cdot\vec{v}$ (d'après une remarque précédente)

et $\vec{u}\cdot\vec{v'}=\vec{u}\cdot\vec{v}$ (puisque dans ce cas $\vec{v'}=\vec{v}$)

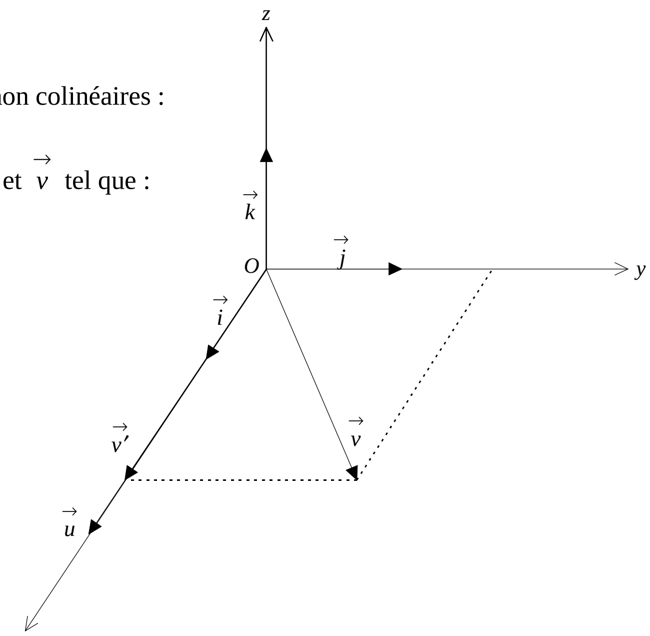
Dans ce cas, les expressions 2 et 3 sont vérifiées.

Supposons maintenant que $\vec{u}\neq\vec{0}$ et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires :

Posons $\vec{i}=\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Soit $\vec{j}$ un vecteur coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que :

$$(\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}\ \text{et}\ \|\vec{j}\|=1.$$

Soit $\vec{k}$ le vecteur orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tel que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ soit directe.



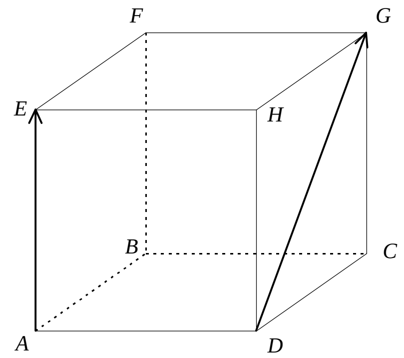
Nous avons ainsi construit une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormale directe.

Dans cette base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$\vec{u}\,(\|\vec{u}\|, 0, 0)$, $\vec{v}\,(\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}, \vec{v}), \|\vec{v}\|\sin(\vec{u}, \vec{v}), 0)$ et $\vec{v}'\,(\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}, \vec{v}), 0, 0)$, d'où :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}' = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$. (Expressions 2 et 3)

<u>Exemple</u> : *ABCDEFGH* est un cube d'arête a.



Calculons de plusieurs façons le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG}$:

Avec la définition en considérant la base orthonormale $\left(\dfrac{\overrightarrow{AD}}{AD}, \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \dfrac{\overrightarrow{AE}}{AE}\right)$:

On a $\overrightarrow{AE}\,(0\,;0\,;a)$ et $\overrightarrow{DG}\,(0\,;a\,;a)$ d'où $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG} = a^2$.

Avec le cosinus :

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG} = AE \times DG \times \cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DG}) = a \times a\sqrt{2} \times \cos\dfrac{\pi}{4} = a^2$.

Avec le vecteur projeté :

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = AE^2 = a^2$.

<u>Définition 2</u>

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>orthogonaux</u> si leur produit scalaire est nul :

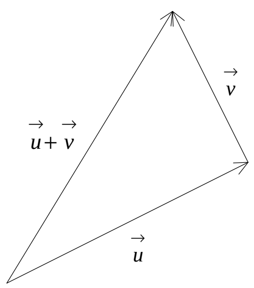
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

<u>Conséquence</u> : le théorème de Pythagore

On a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \underset{\text{Expression 1}}{\overset{\text{Théorème 1}}{\Leftrightarrow}} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Illustration :



<u>Remarque</u> : si un vecteur est orthogonal à tout vecteur, alors c'est le vecteur nul.

En effet, on a alors en particulier : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$

En notant (x, y, z) les coordonnées de $\vec{u}$: $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0$

D'où, nécessairement : $\qquad x = y = z$

Et donc : $\qquad \vec{u} = \vec{0}$

II) Propriétés du produit scalaire

Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Bilinéarité (linéarité par rapport aux deux variables) :

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$ (linéarité par rapport à la première variable)

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)

Séparation : si $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ alors $\vec{u} = \vec{0}$.

Démonstrations :

Symétrie : évident d'après la définition.

Bilinéarité : notons $(x\,;y\,;z)$, $(x'\,;y'\,;z')$ et $(x''\,;y''\,;z'')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (x + x')\,x'' + (y + y')\,y'' + (z + z')\,z'' = x\ x'' + x'\ x'' + y\ y'' + y'\ y'' + z\ z'' + z'\ z''$$

$$= x\ x'' + y\ y'' + z\ z'' + x'\ x''\ y'\ y'' + z'\ z'' = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda x\, x' + \lambda y\, y' + \lambda z\, z' = \lambda(x\, x' + y\, y' + z\, z')$$

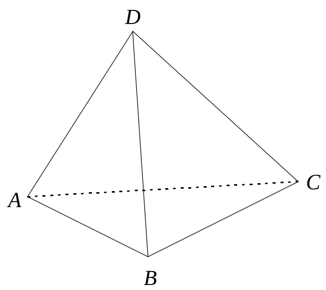
La symétrie livre la linéarité par rapport à la seconde variable.

Séparation : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \times 2\|\vec{u}\|^2 = 0 \Rightarrow \|\vec{u}\| = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Exemple : à l'aide de la linéarité, démontrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$

Exercice : *ABCD* est un tétraèdre régulier d'arête *a*. (Chaque face est un triangle équilatéral de côté *a*)

Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales :



Remarquons que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \times a \times \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{a^2}{2}$.

De même, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{2}$.

D'où : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} = 0$

Donc les arêtes $[AB]$ et $[CD]$ sont orthogonales. On procède de même pour les deux autres.

Théorème 2 *Inégalité de Cauchy-Scwharz*

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\qquad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Démonstration : (dans le cas d'un produit scalaire quelconque, l'inégalité étant évidente pour le produit scalaire euclidien en utilisant la relation $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$)

L'inégalité est évidente si $\vec{v} = \vec{0}$.

Supposons désormais $\vec{v} \neq \vec{0}$. L'idée de la démonstration consiste à considérer le carré scalaire :

$$P(X) = \| \vec{u} + X\vec{v} \|^2 \text{ où } X \text{ est un réel quelconque}$$

Comme c'est un carré, on a : $P(X) \geqslant 0$ quelque soit le réel X.

En utilisant les propriétés du produit scalaire :

$$P(X) = (\vec{u} + X\vec{v}) \cdot (\vec{u} + X\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2X\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}\,X^2.$$

Il apparaît que P est un polynôme du second degré en X (puisque $\vec{v} \neq \vec{0}$) :

$$P(X) = \| \vec{v} \|^2 X^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}\,X + \| \vec{u} \|^2$$

Et comme on sait que P est positif sur $\mathbb{R}$, il admet au plus une racine. Son discriminant Δ est donc négatif.

$$\Delta = 4(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4(\| \vec{u} \| \| \vec{v} \|)^2 \leqslant 0$$

Ce qui s'écrit encore : $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leqslant (\| \vec{u} \| \| \vec{v} \|)^2$

La fonction racine carrée étant strictement croissante, et tenant compte de la relation $\sqrt{A^2} = |A|$, on obtient :

$$| \vec{u} \cdot \vec{v} | \leqslant \| \vec{u} \| \| \vec{v} \|$$

<u>Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz</u> :

$$| \vec{u} \cdot \vec{v} | = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (\| \vec{u} \| \| \vec{v} \|)^2 \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow P \text{ admet une racine double } X_0$$

Si P admet une racine double X_0 alors $\| \vec{u} + X_0\vec{v} \|^2 = 0$ donc $\vec{u} + X_0\vec{v} = \vec{0}$ (séparation). On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors il existe un réel k (unique) tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$. En posant $X_0 = -k$, il apparaît que $P(X_0) = 0$. Donc X_0 est une racine de P. Et comme X_0 est unique (puisque k l'est), c'est une racine double de P.

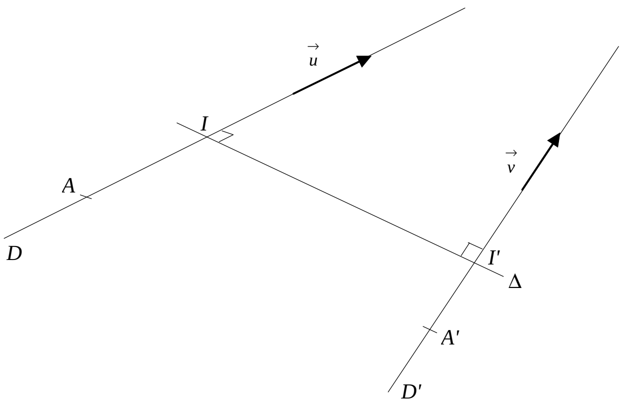
On a donc :

$$| \vec{u} \cdot \vec{v} | = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires}$$

<u>Application</u> : la perpendiculaire commune.

Dans l'espace, on considère deux droites D et D' dirigées par des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

Montrer que, dans ces conditions, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à D et D'.



Guesmi.B

Soit A un point fixé de D et A' un point fixé de D'.

Soit I un point quelconque de D et I' un point quelconque de D'.

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'I'}$$

Notons, par ailleurs : $\overrightarrow{IA} = \alpha\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{A'I'} = \beta\,\vec{v}$

Ainsi : $\overrightarrow{II'} = \alpha\,\vec{u} + \overrightarrow{AA'} + \beta\,\vec{v}$

Montrons qu'il n'y a qu'un seul point I de D et un seul point I' de D' tels que (II') soit perpendiculaire à D et D'.

La condition $\overrightarrow{II'}\,.\,\vec{u} = 0$ est équivalente à :

$$\alpha\,\vec{u}^{\,2} + \vec{u}\,.\,\overrightarrow{AA'} + \beta\,\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$$

La condition $\overrightarrow{II'}\,.\,\vec{v} = 0$ est équivalente à :

$$\alpha\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}\,.\,\overrightarrow{AA'} + \beta\,\vec{v}^{\,2} = 0$$

La droite (II') est donc une perpendiculaire commune à D et D' si et seulement si α et β sont solutions du système

$$(S) : \begin{cases} \alpha\,\vec{u}^{\,2} + \beta\,\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\,\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AA'} \\ \alpha\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \beta\,\vec{v}^{\,2} = -\,\vec{v}\,.\,\overrightarrow{AA'} \end{cases}$$

Or, le déterminant de ce système est : $\delta = \vec{u}^{\,2} \times \vec{v}^{\,2} - (\vec{u}\,.\,\vec{v})^2$

Et comme, par hypothèse, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte.

En conséquence ce déterminant est non nul.

Il existe donc un unique couple (α, β) satisfaisant les conditions $\overrightarrow{II'}\,.\,\vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{II'}\,.\,\vec{v} = 0$.

Autrement dit, il existe un unique point I de D et un unique point I' de D' tel que la droite $\Delta = (II')$ soit perpendiculaire à D et D'.

Voyons maintenant une autre inégalité importante découlant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

<u>Conséquence</u> *Inégalité triangulaire*

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

<u>Démonstration</u> :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

En extrayant la racine carrée : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

<u>Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire</u> :

Supposons que : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. Alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$. Et donc, a fortiori : $|\vec{u}\,.\,\vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.

On a donc inégalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

$$\text{Il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{v} = k\,\vec{u}$$

Montrons que k est positif :

D'une part : $\| \vec{u} + k\,\vec{u} \| = (1 + k)\, \| \vec{u} \|$.

D'autre part : $\| \vec{u} \| + \|k\,\vec{u} \| = (1 + |k|)\, \| \vec{u} \|$.

L'égalité $\| \vec{u} + k\,\vec{u} \| = \| \vec{u} \| + \|k\,\vec{u} \|$ n'est réalisée que si $1 + k = 1 + |k|$, c'est-à-dire lorsque $k > 0$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens (on dit encore "positivement liés")

Réciproquement, supposons que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens :

$$\text{Il existe } k \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \vec{v} = k\,\vec{u}$$

D'une part : $\| \vec{u} + k\,\vec{u} \| = (1 + k)\, \| \vec{u} \|$.

D'autre part : $\| \vec{u} \| + \|k\,\vec{u} \| = (1 + |k|)\, \| \vec{u} \| = (1 + k)\, \| \vec{u} \|$ puisque $k > 0$.

On a donc : $\| \vec{u} + k\,\vec{u} \| = \| \vec{u} \| + \|k\,\vec{u} \|$ c'est-à-dire $\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$.

Bilan :

$$\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \| \iff \text{Il existe } k \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \vec{v} = k\,\vec{u}$$

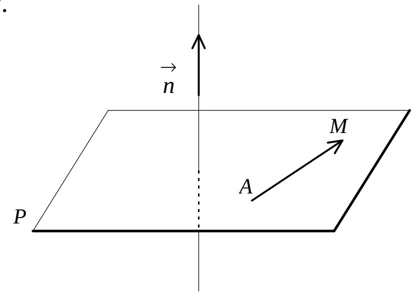
III) Applications du produit scalaire

1) Équation cartésienne d'un plan

Définition 3
Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à P.

Soit A un point du plan P. On a donc, pour tout point M de P, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Réciproquement, si un point M vérifie $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, alors M est dans le plan P.



Conséquence : le plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Exemple : trouver une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(2 ; 1 ; -3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}\,(1 ; 1 ; 2)$.

Soit $M(x ; y ; z)$ un point quelconque de ce plan P. On a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, ce qui s'écrit encore :

$$(x - 2)\times 1 + (y - 1)\times 1 + (z + 3)\times 2 = 0$$

D'où une équation de P : $\qquad x + y + 2z + 3 = 0.$

Guesmi.B

Théorème 3

Dans un repère orthonormal :

Tout plan P admet une équation (dite cartésienne) de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (avec a, b et c non tous nuls)

Le vecteur $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ est normal à ce plan.

Démonstration :

Elle repose sur les équivalences suivantes : (en notant $M(x\,;\,y\,;\,z)$, $A(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ et $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$)

$$M \in P \text{ si et seulement si } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Et en posant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$: $\qquad ax + by + cz + d = 0$

Cas particuliers : le plan (Oxy) a pour équation $z = 0$, le plan (Oxz) a pour équation $y = 0$ et le plan (Oyz) a pour équation $x = 0$.

Exercice :

On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$P : x - 4y + 7 = 0$

$Q : x + 2y - z + 1 = 0$

1. Montrer que ces plans sont sécants. On note d leur droite d'intersection.
2. Donner une représentation paramétrique de d et donner un vecteur directeur de d.

Un vecteur normal à P est : $\vec{n}\,(1\,;\,-4\,;\,0)$. Un vecteur normal $\vec{n'}$ à Q est : $\vec{n'}\,(1\,;\,2\,;\,-1)$. Étudions la colinéarité de ces deux vecteurs : existe-t-il un réel k tel que $\vec{n'} = k\,\vec{n}$? La réponse est clairement non. (Il faudrait que k soit solution des trois équations $1 = k \times 1$; $2 = k \times (-4)$ et $-1 = k \times 0$ ...)

Les plans P et Q sont donc sécants.

Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à la droite d si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Posons $y = t$, il vient alors $x = 4t - 7$ et $z = 4t - 7 + 2t + 1 = 6t - 6$. D'où une représentation paramétrique de d :

$$\begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = t \\ z = 6t - 6 \end{cases}$$

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\,(4\,;\,1\,;\,6)$

Note : on montre de même l'orthogonalité de deux plans en montrant l'orthogonalité de leurs vecteurs normaux et le parallélisme de deux plan avec la colinéarité de leurs vecteurs normaux.

2) Équation d'une sphère

Théorème 4

Toute sphère S de centre $\Omega(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de rayon R admet une équation de la forme :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Démonstration : Immédiate : cela découle du fait que S est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $\Omega M^2 = R^2$.

Théorème 5

La sphère S de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration : On utilise, par exemple, le théorème de la médiane :

Soit I le milieu de $[AB]$ (et donc le centre de la sphère), alors : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = MI^2 - R^2$. (Où R est le rayon de la sphère). On en déduit :

$$M \in S \iff MI = R \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Exemple :

Équation de la sphère S de diamètre $[AB]$ avec $A(0 ; 0 ; -1)$ et $B(1 ; 2 ; -3)$. Préciser son centre et son rayon.

Soit $M(x ; y ; z)$ un point quelconque de cette sphère. La condition $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ s'écrit :

$$x(x - 1) + y(y - 2) + (z + 1)(z + 3) = 0$$

$$x^2 - x + y^2 - 2y + z^2 + 4z + 4 = 0$$

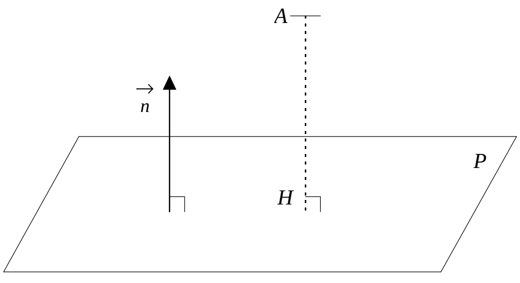
$$(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y - 1)^2 - 1 + (z + 2)^2 = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = \frac{5}{4}$$

D'où les coordonnées du centre $\Omega(\frac{1}{2} ; 1 ; -2)$ et le rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3) Distance d'un point à un plan

Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ un point et P un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. Comment calculer la distance entre le point A et le plan P ?



Notons $H(x_H ; y_H ; z_H)$ le projeté orthogonal de A sur P.

Nous savons que le vecteur $\vec{n}\,(a ; b ; c)$ est normal au plan P.

Donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires :

Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AH} = t\,\vec{n}$.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}$:

D'une part, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) + c(z_H - z_A)$. Et puisque $H \in P$, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = -(ax_A + by_A + cz_A + d)$

D'autre part, puisque $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, on a : $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$.

D'où : $$AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

IV) Définition du produit vectoriel et conséquences

Définition 4

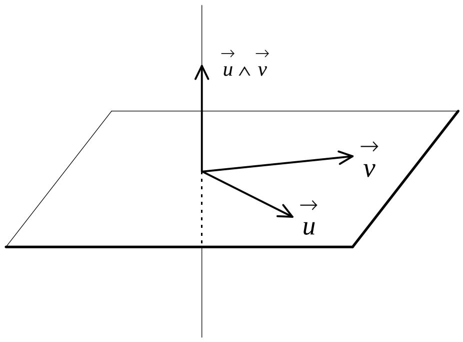
On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires (et donc non nuls) :

Rappel : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (direction de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe (sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)
- $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \sin(\vec{u}, \vec{v})$ (norme ou longueur de $\vec{u} \wedge \vec{v}$)



Cas des vecteurs colinéaires : d'après la définition, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. De plus, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires (et donc non nuls) , alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ puisque $\| \vec{u} \| \neq 0$, $\| \vec{v} \| \neq 0$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0\ (\pi)$.

On peut donc énoncer la conséquence suivante :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Ce qui sera parfois un critère pour savoir si trois points sont alignés ou non.

Théorème 6

Si $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}\,(yz' - zy'\,;zx' - xz'\,;xy' - yx')$

Nous admettrons ce théorème.

Règle pratique pour calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

On écrit sur une ligne les coordonnées de $\vec{u}$ en répétant, à la suite la première et la seconde coordonnée. On procède de même avec $\vec{v}$ sur une seconde ligne. Les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont obtenues à l'aide des produits en croix suivants :

Guesmi.B

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & x & y \\ x' & y' & z' & x' & y' \end{array}$$

Première coordonnée : $y\,z' - z\,y'$

Deuxième coordonnée : $z\,x' - x\,z'$

Troisième coordonnée : $x\,y' - y\,x'$

<u>Exemple</u> : $\vec{u}\,(2\,;-1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-4\,;2\,;-2)$:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & -4 & 2 \end{array}$$

D'où $\vec{u} \wedge \vec{v}\,(-4\,;-8\,;0)$

V) Propriétés du produit vectoriel

<u>Antisymétrie</u> : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.

<u>Bilinéarité</u> (linéarité par rapport aux deux variables) :

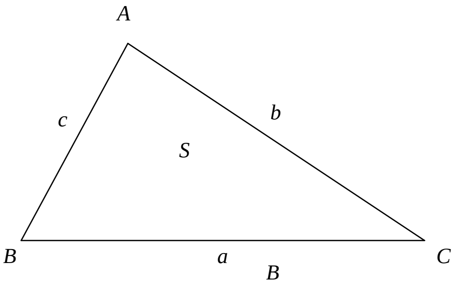
$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $(\lambda\,\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (linéarité par rapport à la première variable)

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\lambda\,\vec{v}) = \lambda\,\vec{u} \wedge \vec{v}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)

Ces propriétés se démontrent avec le théorème 6 en écrivant les coordonnées des vecteurs en jeu (c'est lourd ...)

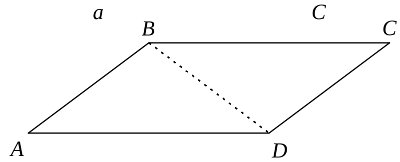
VI) Applications du produit vectoriel

<u>1) Aire d'un triangle ou d'un parallélogramme</u>



Lorsque ABC est un triangle, on a établi en Première que l'aire S de ABC est donnée par : $S = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\hat{A}$ où $b = AC$, $c = AB$ et $\hat{A}$ est l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Ce qui s'écrit encore : $S = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{AB}\|\,|\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.



On en déduit : $\boxed{\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.}$

De même, en présence d'un parallélogramme $ABCD$, on a $\boxed{\text{aire}(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|.}$

<u>Exemple</u> : Soient $\vec{u}\,(3\,;2)$ et $\vec{v}\,(1\,;2)$. Soient O un point et A, B et C les points définis par :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u},\ \overrightarrow{OB} = \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$$

Calculer (en u.a.) l'aire du parallélogramme $OACB$. (Réponse : 4 u.a.)

Généralisation : si $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$. Démontrer que l'aire du parallélogramme *OACB* est donnée par :

$$\text{aire}(OACB) = |xy' - x'y| \quad \text{u.a.}$$

En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a : aire(*OACB*) = 0.

2) Équation d'un plan (*ABC*)

On a vu dans les applications sur le produit scalaire comment trouver l'équation d'un plan connaissant l'un de ses points et un de ses vecteurs normaux. Comment faire pour trouver l'équation du plan lorsqu'il est défini par trois points *A*, *B* et *C* non alignés ? On utilise alors le produit vectoriel qui fournit un vecteur normal.

Exemple :

$A(1\,;2\,;-1)$, $B(2\,;3\,;0)$ et $C(1\,;2\,;4)$.

On a $\overrightarrow{AB}\,(1\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(0\,;0\,;5)$. Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\,(5\,;-5\,;0)$. Les points *A*, *B* et *C* sont donc non alignés. Il existe un et un seul plan *P* passant par ses points. Un vecteur normal à ce plan est $\vec{n}\,(5\,;-5\,;0)$. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de *P*, on a $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ d'où une équation cartésienne de *P* :

$$(x-1)\times 5 + (y-2)\times(-5) = 0$$

$$5x - 5y + 5 = 0$$

$$x - y + 1 = 0.$$

Un autre méthode, consiste à considérer une équation cartésienne de *P* de la forme $ax + by + cz + 1 = 0$ puis à résoudre le système obtenu en écrivant les conditions $A \in P$, $B \in P$ et $C \in P$.

Exercice : soit *P* le plan d'équation : $x + y + z = 0$.

Trouver deux vecteurs non colinéaires de *P*. (Réponse : $\vec{u}\,(1\,;-1\,;0)$ et $\vec{v}\,(0\,;1\,;-1)$)

Guesmi.B