EXERCICE 2 Nouvelle Calédonie novembre 2008

On considère la fonction f définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞[par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Restitution organisée de connaissances :

La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} g'(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ g(0) = 1 \end{cases}$

Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

Correction

1. g est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0)$ or $g'(0) = g(0)$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = g(0)$

or $g(x) = e^x$ et $g(0) = 1$ donc en remplaçant dans $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = g(0)$, on obtient $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$ or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.