Centres étrangers juin 2007

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2. Étude du signe de la fonction f

a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

d. Étudier le signe de f sur l'intervalle [0 ; α].

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 1].

Correction

I. Existence et unicité de la solution

1. x est solution de l'équation (E) $\Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

2. *a.* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + e^{-x}$ or la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. *b.* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

f est définie continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $0 \in f(\mathbb{R})$ donc l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

2. *c.* f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0{,}56) < 0$ et $f(0{,}57) > 0$ donc $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$

2. *d.* f est strictement croissante sur [0 ; 1] et $f(\alpha) = 0$ donc si $0 \le x < \alpha$ alors $f(x) < 0$; si $\alpha < x \le 1$ alors $f(x) > 0$ et $f(\alpha) = 0$

II. Deuxième approche

1. $g(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x + x\,e^x \Leftrightarrow 1 = x\,e^x \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow f(x) = 0$

2. Résoudre $g(x) = x$ est équivalent à résoudre $f(x) = 0$ or cette équation admet une seule solution sur $\mathbb{R}$, donc α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 1].

$g'(x) = \dfrac{1+e^x-(1+x)\,e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{1-x\,e^x}{(1+e^x)^2} = -e^x\dfrac{e^{-x}-x}{(1+e^x)^2} = -e^x\dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$.

si $0 \le x < \alpha$ alors $f(x) < 0$ donc $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur [0 ; α]

si $\alpha < x \le 1$ alors $f(x) > 0$ donc $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur [α ; 1]