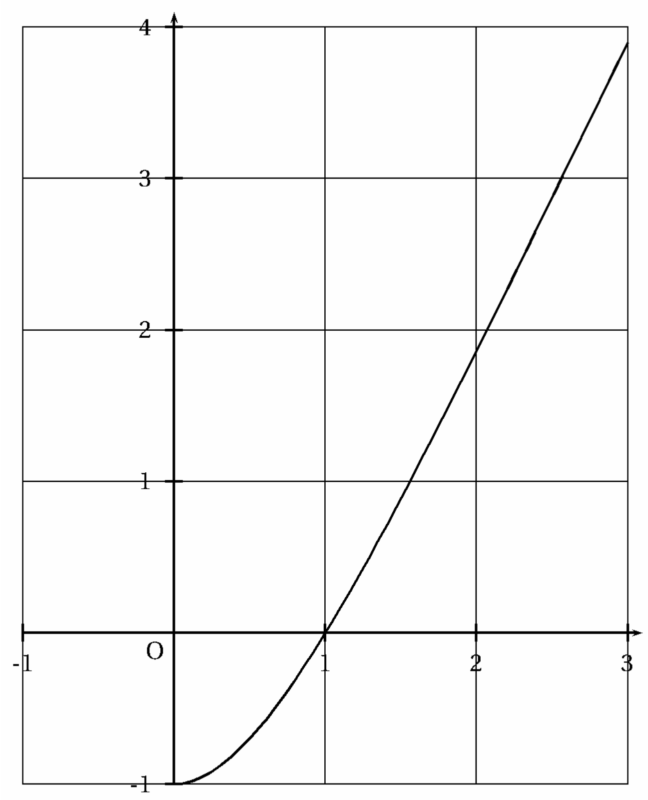
Enoncé

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x - 1)\,(2 - e^{-x}).$$

Sa courbe représentative C est tracée dans le repère orthonormal ci-contre.



1. *a.* Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à C .

On pourra utiliser sans justification que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$

c. Étudier la position relative de C et Δ.

d. Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = x\,e^{-x} + 2\,(1 - e^{-x})$.

e. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) \geq 0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f .

2. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ.

3. Soit m un réel, $m \geq -1$.

Montrer que l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur $[0\,;+\infty[$.

Dans le cas où $m = 1$, donner un encadrement à 10^{-2} près de cette solution.

Correction

1. *a.* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b. $f(x) - (2x - 2) = (x - 1)\,(2 - e^{-x}) - (2x - 2)$

$f(x) - (2x - 2) = 2x - 2 - (x - 1)\,e^{-x} - 2x + 2$

$f(x) - (2x - 2) = -x\,e^{-x} + e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x - 2) = 0$

la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à C en $+\infty$.

c. $f(x) - (2x - 2) = -(x - 1)\,e^{-x}$

La fonction exponentielle est strictement positive

donc $f(x) - (2x - 2)$ *a* le même signe que $-(x - 1)$

Si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$ donc $-(x - 1) < 0$ donc C est en dessous de Δ.

Si $x = 1$ alors $-(x - 1)\,e^{-x} = 0$ donc C et Δ se coupent au point d'abscisse 1.

Si $x < 1$ alors $x - 1 < 0$ donc $-(x - 1) > 0$ donc C est au dessus de Δ.

d. Soit $u(x) = x - 1$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = e^{-x}$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

$f'(x) = (2 - e^{-x}) + (x - 1)\,e^{-x} = 2 - e^{-x} + x\,e^{-x} - e^{-x}$

$f'(x) = 2 - 2\,e^{-x} + x\,e^{-x}$

$f'(x) = x\,e^{-x} + 2\,(1 - e^{-x})$.

e. Pour tout $x \geq 0$, $e^{-x} \leq 1$ donc $1 - e^{-x} \geq 0$

$x\,e^{-x} \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ (somme de termes positifs).

c. $f'(0) = 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Pour que T et Δ soient parallèles, il faut que leurs coefficients directeurs soient égaux.

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0 est $f'(x_0)$. Le coefficient directeur de Δ est 2, il faut donc résoudre $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 2 - 2\,e^{-x} + x\,e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -2\,e^{-x} + x\,e^{-x} = 0$

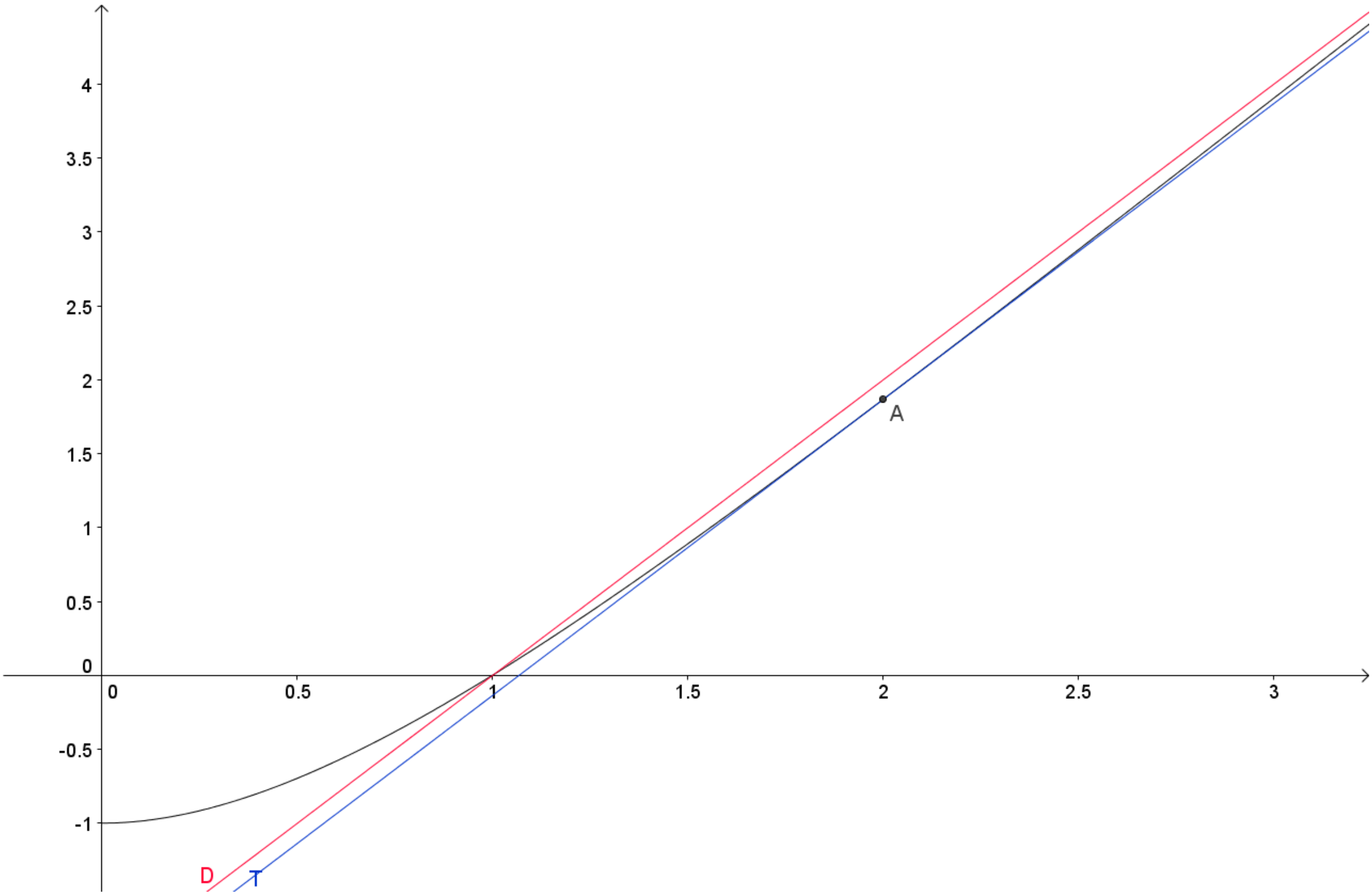
$\Leftrightarrow (x - 2)\,e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f(2) = 2 - e^{-2}$ donc le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ est A $(2\,;2 - e^{-2})$

3. f est définie continue strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, $f([0\,;+\infty[) = [-1\,;+\infty[$

$m \geq -1$ donc $m \in [-1\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur $[0\,;+\infty[$.

$f(1{,}55) < 1$ et $f(1{,}56) > 1$ donc $1{,}55 < \alpha < 1{,}56$.



L’asymptote Δ est en rouge, la tangente T au point A d’abscisse 2 en bleu, la courbe C en noir.