ENONCE

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

La fonction h est définie sur $]-1 ; +\infty[$ par : $h(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

1. Calculer la fonction dérivée h'. En déduire les variations de h sur $]-1 ; +\infty[$.
2. Déterminer les limites de h en -1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $0 < h(x) < \mathrm{e}$.

Partie B : Etude de la fonction *f*

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

On appelle C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées premières et seconde de f.

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \mathrm{e} + 1$ est asymptote, à la courbe C_f, au voisinage de $+\infty$.

Préciser la position relative de (D) et C_f.

2. Etude des variations de la fonction f' sur $]-1 ; +\infty[$

a. Pour $x \in\ ]-1 ; +\infty[$ calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Vérifier que $f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ En déduire le sens de variation de f'.

b. Dresser le tableau de variation de f'. (On admettra que $\lim\limits_{x \to -1} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 1$.)

3. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]-1 ; +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
   Dans la suite de l'exercice on notera α la solution non nulle.
   Donner une valeur approchée de α au centième près
4. Etude des variations de f sur $]-1 ; +\infty[$.

a. Etudier les variations de f.

b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. Dresser le tableau de variation de f.

Partie C: Prolongement de la fonction *f* en – 1

On pourra utiliser sans justification que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$

On considère la fonction g définie sur $[-1 ; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x) \text{ si } x > -1. \end{cases}$

On appelle C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la partie B.

Etude de la dérivabilité de *g* en – 1.

a. Montrer que l'on peut écrire : $\dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)$

b. Pour $x \in\ ]-1 ; +\infty[$ déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

c. En déduire que g est dérivable en -1 et préciser sa dérivée $g'(-1)$.

CORRECTION

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

1. h est définie dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et $h'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ donc $h'(x) > 0$

h est donc strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$. Soit $X = \dfrac{x}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to -1^+} X = -\infty$ or $\lim\limits_{x\to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = e$

3. h est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$, donc pour tout $x > -1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) < h(x) < \lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$

donc pour tout $x > -1$, on a : $0 < h(x) < e$.

Partie B : Etude de la fonction *f*

1. $f(x) - (x - e + 1) = e - \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = e - h(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = e$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (x - e + 1) = 0$

La droite (D) d'équation $y = x - e + 1$ est asymptote, à la courbe C_f, au voisinage de $+\infty$.

$e - \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) > 0 \Leftrightarrow e > \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \Leftrightarrow 1 > \dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} > 0$

$x > -1$ donc $x + 1 > 0$ donc pour tout $x > -1$, $e - \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) > 0$ soit $f(x) - (x - e + 1) > 0$

La courbe C_f est donc au dessus de (D) sur $]-1\,;+\infty[$.

2. *a.* $f(x) = x + 1 - h(x)$ donc $f'(x) = 1 - h'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

Soit $u(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ alors $u'(x) = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^4}$

$v(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

donc $f''(x) = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^4}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \dfrac{1}{(x+1)^4}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$(x+1)^4 > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$ et la fonction exponentielle étant strictement positive, le signe de f'' est celui de $2x + 1$

x	-1		$-0{,}5$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'	1	↘	$1 - 4e^{-1}$	↗	1

3. Soit $I =]-1\,;-0{,}5]$ f' est définie continue sur I, strictement décroissante sur I ; $f'(I) = [1 - 4e^{-1}\,;1[$ $0 \in f(I)$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α sur I.
Soit $J =]-0{,}5\,;+\infty[$ f' est définie continue sur J, strictement croissante sur J ;
$f'(J) =]1 - 4e^{-1}\,;1[$ $0 \in f(J)$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution sur J.
$f'(0) = 0$ et $0 \in J$ donc la solution de $f'(x) = 0$ sur J est 0.
$f'(-0{,}72) > 0$ et $f'(-0{,}71) > 0$ de plus f' est strictement décroissante sur I donc $-0{,}72 < \alpha < -0{,}71$
On en déduit le signe de $f'(x)$:

x	-1		α		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

b. $f(x) = x + 1 - h(x)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \mathrm{e}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$

Partie C: Prolongement de la fonction *f* en – 1

a. Si $x \neq -1$, $\dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \dfrac{f(x) - 0}{x + 1} = \dfrac{1}{x+1}\left(x + 1 - \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)$

$\dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \dfrac{1}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ donc $\dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)$

b. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$. Soit $\mathrm{X} = -\dfrac{x}{x+1}$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \mathrm{X} = +\infty$

$\left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right) = -\mathrm{X}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{X}}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{X}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{X}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^+} 1 - \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x}{x+1}\exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1$

c. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1$ donc g est dérivable en – 1 et $g'(-1) = 1$