Corrigés des exercices : Variables aléatoires, lois classiques

1. * Soit X une v.a.r. discrète prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que:

$$P([X < 5]) = 1/3 \ ; \ P([X > 5]) = 1/2 \ ; \ P([X = 3]) = P([X = 4]).$$

$P([X = 3]) = P([X = 4]) = a$, $P([X = 5]) = b$, $P([X = 6]) = c$, avec $2a + b + c = 1$, $c = 1/2$ et $2a = \dfrac{1}{3}$. Donc $a = \dfrac{1}{6}$, $c = 1/2$ et $b = 1 - 2a - b = 1/6$.

---

2. * On joue à pile ou face avec 2 pièces. Soit X le nombre de piles obtenus. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

$\Omega = \{(p,p),(p,f),(f,p),(f,f)\}$. $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ avec $P([X = 0]) = P(\{(f,f)\} = \dfrac{1}{4}$, $P([X = 1]) = P(\{(p,f),(f,p)\}) = \dfrac{1}{2}$ et $P([X = 2]) = P(\{(p,p)\}) = \dfrac{1}{4}$.

On a alors $\mathbb{E}(X) = 0 \times \dfrac{1}{4} + 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{4}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = 1}$ et $\mathrm{var}(X) = 0^2 \times \dfrac{1}{4} + 1^2 \times \dfrac{1}{2} + 2^2 \times \dfrac{1}{4} - 1 = \dfrac{1}{2} + 1 - 1$, soit $\boxed{\mathrm{var}(X) = \dfrac{1}{2}}$. En fait, X suit la loi $\mathcal{B}\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

---

3. * Le nombre X de kilogrammes de tomates récoltées dans un jardin en une semaine est une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est la suivante :

k	0	1	2	3
$P([X = k])$	0.1	0.5	0.3	0.1

Quelle est l'espérance de X et sa variance ?

$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1 = 0.5 + 0.6 + 0.3$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = 1.4}$.
$\mathrm{var}(X) = 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.1 - 1.4^2 = 0.5 + 1.2 + 0.9 - 1.96$, soit $\boxed{\mathrm{var}(X) = 0.64}$.

---

4. * Un chef de service commercial estime avoir une probabilité 0.6 de faire gagner 100 000 euros à son entreprise. Si cette opération est manquée, la perte est de 20 000 euros. Quelle est l'espérance mathématique du gain ?

$\mathbb{E}(X) = 100000 \times 0.6 - 20000 \times 0.4 = 60000 - 8000 = 52000.$

---

5. ** Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noires, 2 blanches et 2 noires, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes, et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues.
Donner la loi de X et sa fonction de répartition.

Guesmi.B

$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$ avec $P([X=0]) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)P(N_2)P(N_3)$ (tirages indépendants) et donc $P([X=0]) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{32}$. De même,

$$\begin{aligned} P([X=1]) &= P(B_1)P(N_2)P(N_3) + P(N_1)P(B_2)P(N_3) + P(N_1)P(N_2)P(B_3) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P([X=2]) &= P(N_1)P(B_2)P(B_3) + P(B_1)P(N_2)P(B_3) + P(B_1)P(B_2)P(N_3) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{32} \end{aligned}$$

et $P([X=3]) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{32}$.

---

6. ** On lance 2 dés et on appelle Z la v.a.r. égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus. Déterminer la loi de Z, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

$Z(\Omega) = [\![0,5]\!]$ avec $[Z=0] = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
$[Z=1] = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1)\}$
$[Z=2] = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(6,4),(5,3),(4,2),(3,1)\}$
$[Z=3] = \{(1,4),(2,5),(3,6),(6,3),(5,2),(4,1)\}$
$[Z=4] = \{(1,5),(2,6),(6,2),(5,1)\}$ et $[Z=5] = \{(1,6),(6,1)\}$.

On a alors $P([Z=0]) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{3}{18}$, $P([Z=1]) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$, $P([Z=2]) = \dfrac{8}{36} = \dfrac{4}{18}$, $P([Z=3]) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{3}{18}$, $P([Z=4]) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{2}{18}$, $P([Z=5]) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

$F_Z(x) = \dfrac{3}{18}\mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \dfrac{8}{18}\mathbb{1}_{[1,2[}(x) + \dfrac{12}{18}\mathbb{1}_{[2,3[}(x) + \dfrac{15}{18}\mathbb{1}_{[3,4[}(x) + \dfrac{17}{18}\mathbb{1}_{[4,5[}(x) + \mathbb{1}_{[5,+\infty[}(x)$ où $\mathbb{1}_E(x) = 1$ si $x \in E$ et $\mathbb{1}_E(x) = 0$ si $x \notin E$.

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{5} kP([Z=k]) = \frac{1}{18}\left[1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 1\right] = \frac{35}{18} \approx 1.94$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k=0}^{5} k^2P([Z=k]) = \frac{1}{18}\left[1 \times 5 + 4 \times 4 + 9 \times 3 + 16 \times 2 + 25 \times 1\right] = \frac{105}{18} = \frac{35}{6}$$

et $\mathrm{var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \dfrac{35}{6}\left[1 - \dfrac{35}{54}\right]$ soit $\boxed{\mathrm{var}(Z) = \dfrac{35 \times 34}{18 \times 18} = \dfrac{595}{162} \approx 3.67}$.

---

7. ** L'oral d'un examen comporte 20 sujets possibles. Le candidat tire 3 sujets au hasard. Ce candidat a révisé seulement 12 sujets. On considère la variable X égale au nombre de sujets révisés parmi les 3 tirés. Quelle est la loi de probabilité de X ?

On a $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ avec $P([X=0]) = \dfrac{C_8^3}{C_{20}^3} \approx 0.05$, $P([X=1]) = \dfrac{C_8^2 \times C_{12}^1}{C_{20}^3} \approx 0.3$, $P([X=2]) = \dfrac{C_8^1 \times C_{12}^2}{C_{20}^3} \approx 0.46$ et $P([X=3]) = \dfrac{C_{12}^3}{C_{20}^3} \approx 0.19$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ ** Une urne contient 5 boules toutes distinctes. On tire 3 boules une à une avec remise. Soit X la v.a.r. égale au nombre de boules différentes tirées. Déterminer la loi de X .

$\mathrm{card}\Omega = 5^3$ et $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

Pour avoir $[X = 1]$, il faut tirer 3 fois la même boule et on a 5 choix possibles. Ainsi, $\boxed{P([X = 1]) = \frac{5}{5^3} = \frac{1}{25} = 0,04}$.

Pour avoir $[X = 3]$, pour la première boule, on a 5 choix, pour la deuxième 4 et pour la troisième 3. Ainsi, $\boxed{P([X = 3]) = \frac{5 \times 4 \times 3}{5^3} = \frac{12}{25} = 0,48}$.

Pour avoir $[X = 2]$, il faut 2 boules distinctes (5×4 choix), la boule différente des autres pouvant être en premier, en deuxième ou en troisième. Ainsi, $\boxed{P([X = 2]) = \frac{5 \times 4 \times 3}{5^3} = \frac{12}{25}}$.

Remarque : On a bien $P([X = 1]) + P([X = 2]) + P([X = 3]) = 1$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ * A l'arrivée d'une course, il y a 9 chevaux: 4 noirs et 5 alezans. On appelle X la v.a.r. égale au nombre de chevaux alezans précédant le premier cheval noir.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

$X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$ avec $P([X = 0]) = \frac{4}{9} = \frac{56}{126}$,

$P([X = 1]) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18} = \frac{35}{126}$,

$P([X = 2]) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{10}{63} = \frac{20}{126}$,

$P([X = 3]) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{63} = \frac{10}{126}$,

$P([X = 4]) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{63} = \frac{4}{126}$,

$P([X = 5]) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{126}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{5} kP([X = k]) = \frac{1}{126} [1 \times 35 + 2 \times 20 + 3 \times 10 + 4 \times 4 + 5 \times 1] = 1$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{5} k^2 P([X = k]) = \frac{1}{126} [1 \times 35 + 4 \times 20 + 9 \times 10 + 16 \times 4 + 25 \times 1] = \frac{294}{126}$$

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{294}{126} - 1 = \frac{168}{126} = \frac{26}{21} \approx 1.24$$

$\boxed{\textbf{10.}}$ ** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ et soit X une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On définit Y par $Y = X$ si $X \neq 0$ et, si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque dans $[\![0, n]\!]$.
Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

On a $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Si $k \neq 0$, $P([Y=k]) = \sum_{i=0}^{n} P([Y=k]/[X=i])P([X=i])$ avec $P([Y=k]/[X=k]) = 1$ et $P([Y=k]/[X=i]) = 0$ si $i \notin \{0,k\}$ et $P([Y=k]/[X=0]) = \dfrac{1}{n+1}$.
Si $k=0$, $P([Y=0]/[X=i]) = 0$ si $i \neq 0$ et $P([Y=0]/[X=0]) = \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} P([Y=k]) = \dfrac{1}{n+1}P([X=0]) + P([X=k]) \text{ si } k \in [\![1,n]\!] \\ P([Y=0]) = \dfrac{1}{n+1}P([X=0]) \end{array}}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP([Y=k]) = \sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{1}{n+1}P([X=0]) + P([X=k])\right] \\
&= \frac{1}{n+1}P([X=0])\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} kP([X=k]) \\
&= \frac{1}{n+1}P([X=0]) \times \frac{n(n+1)}{2} + \mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}P([X=0]) + \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(X) = np$ et $P([X=0]) = (1-p)^n$ donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n}{2}\left((1-p)^n + 2p\right)}$.

---

11. * Dans une bibliothèque se trouvent 10 livres en langue étrangère : 5 en anglais, 2 en allemand et 3 en russe. On prélève au hasard 5 de ces livres. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de volumes en russe prélevés. Déterminer la loi de probabilité, puis la fonction de répartition de X et représenter celle-ci.

$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$; $P([X=0]) = \dfrac{C_7^5}{C_{10}^5} \approx 0.08$, $P([X=1]) = \dfrac{C_7^4 \times C_3^1}{C_{10}^5} \approx 0.42$, $P([X=2]) = \dfrac{C_7^3 \times C_3^2}{C_{10}^5} \approx 0.42$ et $P([X=3]) = \dfrac{C_7^2}{C_{10}^5} \approx 0.08$.
Pour $x < 0$, $F(x) = 0$; pour $x \in [0,1[$, $F(x) = 0.08$; pour $x \in [1,2[$, $F(x) = 0.5$; pour $x \in [2,3[$, $F(x) = 0.92$ et enfin $F(x) = 1$ pour $x \geq 3$.

---

12. ** Un lot contient 3% de pièces défectueuses. On prélève au hasard un échantillon de 10 pièces. Les pièces étant très nombreuses, on admet que le tirage peut être considéré comme fait au hasard et avec remise. Soit X la variable “nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon”. Déterminer la loi de X. Calculer $P([X=0])$, $P([X \geq 1])$, $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X)$.

X peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 10. Cette variable aléatoire suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.03)$ car les pièces sont suffisamment nombreuses pour que le tirage puisse être considéré comme avec remise. On a, plus précisément, $P([X=k]) = \dbinom{10}{k}0.03^k 0.97^{10-k}$.

Ainsi, $P([X=0]) = 0.97^{10} \approx 0.74$, $P([X \geq 1]) = 1 - P([X=0]) \approx 0.26$, $\mathbb{E}(X) = 0.3$ et $\sigma(X) = \sqrt{0.3 \times 0.97} \approx 0.54$.

---

13. ** Un QCM comporte 5 affirmations. Pour chaque affirmation, on doit répondre par vrai (V) si l'affirmation est toujoures vraie, faux (F) si elle est toujours fausse ou par (P) si on ne peut pas conclure. Une réponse au QCM est une suite de 5 lettres parmi V, F ou P.

1) a) Quel est le nombre de réponses possibles pour le QCM ?

b) Le nombre de réponses comprenant exactement 3 V est-il égal à $\binom{5}{3}$?

2) On décide d'attribuer 2 points pour chaque réponse exacte. Combien de points doit-on retirer par réponse inexacte pour que le score d'un candidat qui répond au hasard ait une espérance mathématique nulle ?

3) Un candidat répond au hasard et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses. Indiquer la loi suivie par X et préciser ses paramètres et calculer $\mathbb{E}(X)$.

---

1) a) Pour chaque question, il y a 3 réponses possibles et il y a 5 affirmations, ce qui donne $3^5 = 243$ réponses possibles au QCM.

b) La réponse comprend 3 V mais aussi 2 autres lettres parmi F et P. $\binom{5}{3}$ est le nombre de choix possibles pour les 3 V dans les 5 places disponibles. Mais une fois les 3 V placés, on peut mettre F ou V dans chacune des 2 places restantes. Le nombre cherché est donc $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times 2 \times 2$ et non $\binom{5}{3}$.

2) Si un candidat répond au hasard, il a 1 chance sur 3 de donner la bonne réponse et 2 chances sur 3 de se tromper. L'espérance mathématique sur une question est donc $2 \times \dfrac{1}{3} - x \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2(1-x)}{3}$. Elle est nulle pour $x = 1$: il faut donc enlever 1 point par mauvaise réponse pour avoir une espérance nulle.

3) La loi suivie par X est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5, \dfrac{1}{3}\right)$: en effet, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $P([X = k]) = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix} \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-k}$. On peut la représenter dans un tableau :

k	0	1	2	3	4	5
$P([X = k])$	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

et $\mathbb{E}(X) = 5 \times \dfrac{1}{3}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{5}{3}}$.

---

14. ** Une cible est composée d'un carré de côté 20cm et d'un disque de rayon 10cm de même centre. On suppose que la cible est toujours atteinte. La probabilité d'atteindre un secteur de la cible est proportionnelle à l'aire de ce secteur.

1) Calculer la probabilité p d'atteindre le disque avec une fléchette.

2) On lance 3 fléchettes sur la cible. Les lancers sont supposés indépendants. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où le disque est atteint.

a) Quelle est la probabilité d'atteindre exactement 2 fois le disque ?

b) Quelle est la probabilité d'atteindre au moins 1 fois le disque ?

c) Quelle est l'espérance mathématique de X ?

---

1) L'aire du carré est 400 cm^3 et l'aire du disque 100π cm^3 donc la probabilité d'atteindre le disque est $p = \dfrac{100\pi}{400} = \dfrac{\pi}{4}$.

2) Les lancers sont indépendants et la probabilité d'atteindre le disque est la même pour chaque lancer donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{\pi}{4}$.

a) $P([X = 2]) = C_3^2 p^2 (1-p) = \dfrac{3\pi^2(4-\pi)}{64} \approx 0.397$.

b) $P([X \geq 1]) = 1 - P([X = 0]) = 1 - (1-p)^3 \approx 0.99$

c) $\mathbb{E}(X) = np = \dfrac{3\pi}{4} \approx 2.36$.

$\boxed{\textbf{15.}}$ ** 1) Une grande enveloppe contient les 12 "figures" d'un jeu de cartes (4 rois, 4 dames, 4 valets). On tire, simultanément et au hasard, 5 cartes de l'enveloppe. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus. Déterminer la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.

2) Dans la même enveloppe, contenant les 12 cartes, on effectue successivement 5 fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des 5 tirages. Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

---

1) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ avec $P([X = 0]) = \dfrac{C_8^5}{C_{12}^5} = \dfrac{7}{99}$; $P([X = 1]) = \dfrac{C_4^1 \times C_8^4}{C_{12}^5} = \dfrac{35}{99}$; $P([X = 2]) = \dfrac{C_4^2 \times C_8^3}{C_{12}^5} = \dfrac{42}{99}$; $P([X = 3]) = \dfrac{C_4^3 \times C_8^2}{C_{12}^5} = \dfrac{14}{99}$ et $P([X = 4]) = \dfrac{C_4^4 \times C_8^1}{C_{12}^5} = \dfrac{1}{99}$.

On a alors $\mathbb{E}(X) = 1 \times \dfrac{35}{99} + 2 \times \dfrac{42}{99} + 3 \times \dfrac{14}{99} + 4 \times \dfrac{1}{99} = \dfrac{165}{99} = \dfrac{5}{3} \approx 1.67$.

2) On répète, de manière indépendante, $n = 5$ tirages d'une carte parmi 12. Cette carte est un roi avec la probabilité $p = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

On est ici dans le cas d'une variable Y de loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$. On a donc $P([Y = k]) = C_5^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-k}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, soit $P([Y = 0]) \approx 0.132$, $P([Y = 1]) \approx 0.329$, $P([Y = 2]) \approx 0.329$, $P([Y = 3]) \approx 0.165$, $P([Y = 4]) \approx 0.041$ et $P([Y = 5]) \approx 0.004$.

En moyenne, le nombre de rois obtenus par cette méthode est $\dfrac{5}{3} \approx 1.67$.

$\boxed{\textbf{16.}}$ * Une machine peut être équipée de 2 ou de 4 composants. La probabilité qu'un composant tombre en panne est égale à p avec $0 \leq p \leq 1$ et chaque composant fonctionne indépendamment des autres. On définit les variables aléatoires suivantes :

X est le nombre de composants en panne quand la machine est équipée de 2 composants et Y est le nombre de composants en panne quand la machine est équipée de 4 composants.

1) Quelles sont les lois de probabilité suivies par X et Y ? Exprimer $P([X = k])$ et $P([Y = k])$ en fonction de k.

2) La machine ne fonctionne plus si plus de la moitié des composants tombent en panne.

a) Quelle est la probabilité p_2 que la machine ne fonctionne plus quand elle est équipée de 2 composants ?

b) Quelle est la probabilité p_4 que la machine ne fonctionne plus quand elle est équipée de 4 composants ?

c) Comparer, en fonction de p les probabilités p_2 et p_4. Dans quels cas est-il préférable d'avoir 2 composants plutôt que 4 ?

Le fonctionnement de chaque composant est indépendant du fonctionnement des autres et la probabilité de panne est identique pour tous les composants. X et Y suivent donc des lois binomiales de paramètres $n = 2$ et p pour X et $n = 4$ et p pour Y.

$P([X = k]) = C_2^k p^k (1-p)^{2-k}$ pour $0 \leq k \leq 2$ et $P([Y = k]) = C_4^k p^4 (1-p)^{4-p}$ pour $0 \leq k \leq 4$.

2) a) $p_2 = P([X > 1]) = P([X = 2]) = p^2$

b) $p_4 = P([Y > 2]) = P([Y = 3]) + P([Y = 4]) = C_4^3 p^3 (1-p) + C_4^4 p^4 = p^3(4 - 3p)$.

c) $p_2 - p_4 = p^2(3p^2 - 4p + 1) = p^2(3p-1)(p-1)$ (1 est racine évidente du trinôme).

On a toujours $p \in [0,1]$ donc $p \geq 0$ et $p-1 \leq 0$. On aura alors $p_2 - p_4 \geq 0$ si et seulement si $3p-1 \leq 0$ c'est-à-dire si $p \leq \dfrac{1}{3}$.

---

17. Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule. Les 30 cases blanches (B), jaunes (J), vertes (V) ou rouges (R) ont toutes la même probabilité d'être atteintes. Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros, si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros, si la fléchette atteint une case jaune, le joueur gagne rien et ne perd rien, si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désignant un réel positif.

1) On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer a pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que $\mathbb{E}(X)$ soit nulle).

2) Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a) Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?

b) Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ? Quel est le nombre moyen de parties gagnantes ?

---

1) Il y a 18 cases blanches, 6 cases jaunes, 4 cases vertes et 2 cases rouges donc

$$P(B) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5},\quad P(J) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5},\quad P(V) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \text{ et } P(R) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

a) $X(\Omega) = \{0, 5, 8, -a\}$ avec $P([X=0]) = P(J) = \dfrac{1}{5}$, $P([X=5]) = P(V) = \dfrac{2}{15}$, $P([X=8]) = P(R) = \dfrac{1}{15}$ et $P([X=-a]) = \dfrac{3}{5}$.

b) $\mathbb{E}(X) = (-a)\times\dfrac{3}{5} + 0\times\dfrac{1}{5} + 5\times\dfrac{2}{15} + 8\times\dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{15}(-9a+18)$ donc $\mathbb{E}(X) = 0$ pour $\boxed{a=2}$.

2) a) $p = P([X>0]) = P(V) + P(R) = \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{3}{15}$, soit $\boxed{p = \dfrac{1}{5}}$.

b) Si N est le nombre de parties gagnées, N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5,p)$. En particulier, $P([N=2]) = C_5^2 p^2(1-p)^3$, $P([N=5]) = p^5$ et $\mathbb{E}(N) = 5p$.

Avec $p = \dfrac{1}{5}$, on obtient $\mathbb{E}(N) = 1$, $P([N=2]) = \dfrac{128}{625} \approx 0.2048$ et $P([N=5]) = 0.00032$.

Guesmi.B