Polynôme et équations du second degré

Définition

On appelle **polynôme (ou trinôme) du second degré** toute expression pouvant se mettre sous la forme :

$P(x) = ax^2 + bx + c$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Exemples

- $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$ est un polynôme du second degré.
- $P(x) = x^2 - 1$ est un polynôme du second degré avec $b = 0$ mais $Q(x) = x - 1$ n'en est pas un car a n'est pas différent de zéro. (C'est un polynôme du premier degré - ou une fonction affine)
- $P(x) = 5(x-1)(3-2x)$ est un polynôme du second degré car en développant on obtient une expression du type souhaité.

Théorème et définition

Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme :

$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$

Cette expression s'appelle **forme canonique** du polynôme P.

Définition

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$

Propriété

Racines d'un polynôme du second degré

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$

- n'a aucune solution réelle si $\Delta < 0$
- a une solution unique $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$
- a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$

Exemples

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$
  $\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$
  P_1 possède 2 racines :
  $x_1 = \dfrac{-3-1}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-3+1}{-2} = 1$
- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$
  $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 4 = 0$
  P_2 possède une seule racine :
  $x_0 = -\dfrac{-4}{2} = 2$
- $P_3(x) = x^2 + x + 1$
  $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$
  P_3 ne possède aucune racine

Propriété

Somme et produit des racines d'un polynôme du second degré

Soit un polynôme $P\left(x\right)=ax^2+bx+c$ dont le discriminant est strictement positif.

- La somme des racines vaut $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$
- Le produit des racines vaut $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Remarque

Ces propriétés sont souvent utilisés pour résoudre rapidement une équation qui possède une racine "évidente". Par exemple l'équation $x^2-4x+3=0$ admet $x_1=1$ comme racine puisque $1^2-4\times1+3=0$; comme $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}=3$ l'autre racine est $x_2=3$.

Propriété

Signe d'un polynôme du second degré

Le polynôme $P\left(x\right)=ax^2+bx+c$

- est toujours du signe de a si $\Delta<0$
- est toujours du signe de a mais s'annule pour $x=\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta=0$
- est du signe de a "à l'extérieur des racines" (c'est à dire sur $]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$) et du signe opposé entre les racines (sur $]x_1;x_2[$)

Remarque

Suivant chacun des cas on peut représenter le tableau de signe de P de la façon suivante :

- Si $\Delta>0$:

x	$space;-\infty$	$space;$	x_1	$space;$	x_2	$space;$	$+\infty$
$P\left(x\right)$		$\text{signe de } a$	0	$\text{signe de } -a$	0	$\text{signe de } a$	

- Si $\Delta=0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P\left(x\right)$		$\text{signe de } a$	0	$\text{signe de } a$	

- Si $\Delta>0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P\left(x\right)$		$\text{signe de } a$	

Exemples

Si l'on reprend les exemples précédents :

- $P_1\left(x\right)=-x^2+3x-2$
  $\Delta>0$ et $a<0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

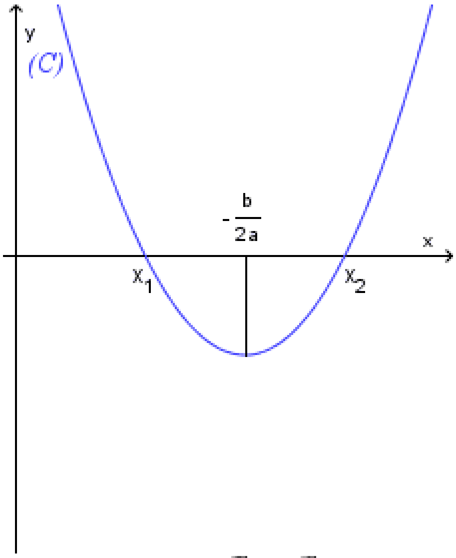
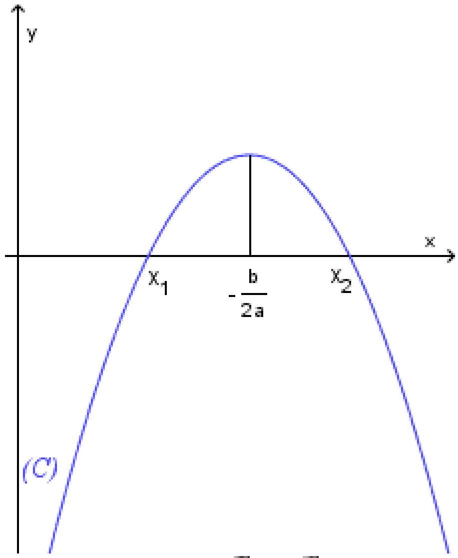
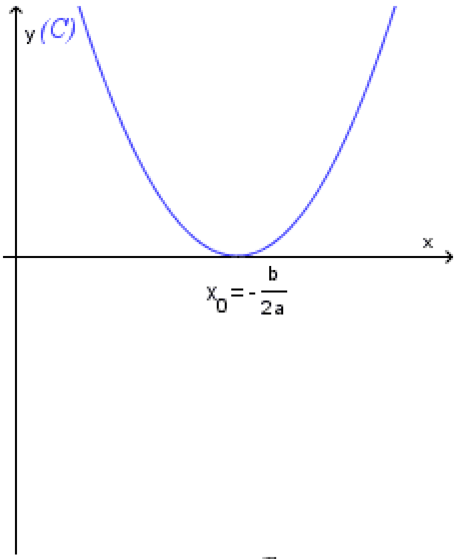
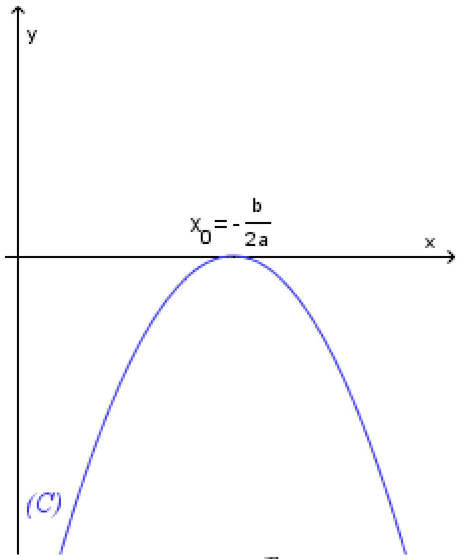
- $P_2\left(x\right)=x^2-4x+4$
  $\Delta=0$ et $a>0$

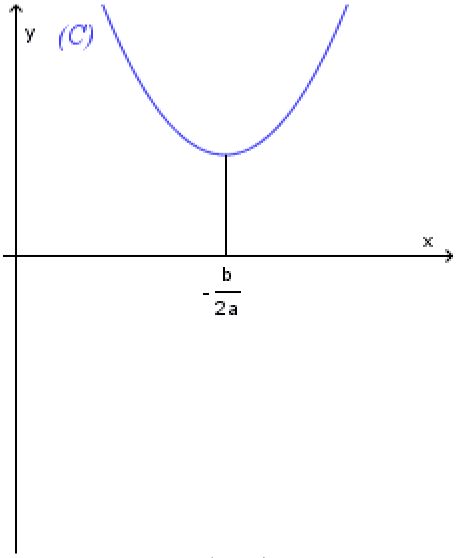
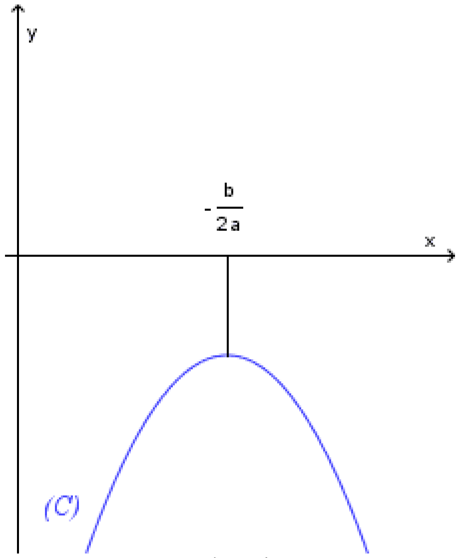
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$P\left(x\right)$		$+$	0	$+$	

- $P_3(x) = x^2 + x + 1$
  $\Delta < 0$ et $a > 0$

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$P(x)$	$+$

On rappelle que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des **points d'intersection de la courbe** C_f et de l'**axe des abscisses**.
En regroupant les propriétés de ce chapitre et celles vues en Seconde on peut résumer ces résultats dans le tableau :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	 2 racines : x_1 et x_2	 2 racines : x_1 et x_2
$\Delta = 0$	 1 racine : x_0	 1 racine : x_0

<table>
<tr>
<td>$\Delta < 0$</td>
<td>
Pas de racine</td>
<td>
Pas de racine</td>
</tr>
</table>