

# ÉLECTRONIQUE DES CIRCUITS INTÉGRÉS

« NIVEAU ZÉRO »

*Site Web enseignement :*

<https://intranet2.espci.fr/enseignement/disciplines/?e=elec>

*Forum aux questions :*

<https://iadc.info.espci.fr/bin/cpx/mforum>

et cliquer sur **Électronique** dans la liste des forums



## « NIVEAU ZÉRO »

Ce document a pour but de rappeler et d'ordonner des connaissances qui, en principe, ont été acquises dans les classes préparatoires. L'expérience prouve qu'elles sont abordées de manières diverses selon les prépas, et que leur assimilation est souvent très imparfaite.

Il est pourtant *indispensable* que le contenu de ce document soit parfaitement assimilé : il contient des notions qui sont constamment utilisées dans le cours d'électronique, et, pour certaines d'entre elles, dans le cours de commande de processus.



## TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION .....	1
2. SOURCES (ou GÉNÉRATEURS) .....	3
2.1. Sources de tension.....	3
2.1.1. Source de tension « idéale ».....	3
2.1.2. Source de tension « réelle » .....	4
2.2. Sources de courant .....	4
2.2.1. Source de courant « idéale » .....	4
2.2.2. Source de courant « réelle » .....	4
2.3. Sources indépendantes et sources dépendantes .....	7
2.4. Signaux typiques .....	7
3. CHARGES (ou RÉCEPTEURS) PASSIFS .....	8
3.1. Résistances .....	8
3.2. Condensateurs .....	9
3.3. Inductances .....	10
4. ASSOCIATION DE GÉNÉRATEURS ET DE RÉCEPTEURS.....	10
4.1. Conservation de la charge électrique (loi des nœuds) .....	10
4.2. Circulation du champ électrique (loi des mailles) .....	10
4.3. Théorème de THÉVENIN.....	12
4.3.1. Forme « marche à vide et court-circuit » .....	12
4.3.2. Forme « de Thévenin ».....	13
4.4. Théorème de NORTON.....	14
4.5. Exemples de mise en œuvre des théorèmes de Thévenin et Norton.....	16
4.5.1. Générateur de Thévenin équivalent à un diviseur de tension .....	16
4.5.2. Schéma équivalent « petits signaux » selon Thévenin d'un amplificateur « émetteur commun » (voir le chapitre sur la technologie bipolaire).....	16
4.5.3. Charge d'un condensateur .....	17
4.5.4. Pont de Wheatstone .....	19
4.5.5. <i>Exercice</i> : estimation de l'erreur de mesure de la résistance interne d'un générateur de tension ...	19
4.5.6. <i>Autres exercices</i> .....	19
4.6. Adaptation d'impédances .....	19
4.6.1. Cas de la transmission d'une tension.....	20
4.6.2. Cas de la transmission d'une puissance.....	21
5. FILTRES : DUALITÉ TEMPS-FRÉQUENCE.....	23
5.1. Filtre RC passe-bas du premier ordre .....	23

5.1.1.	Point de vue temporel : réponse indicielle d'un filtre <i>RC</i> passe-bas du premier ordre .....	24
5.1.2.	Point de vue fréquentiel : réponse harmonique d'un filtre <i>RC</i> passe-bas du premier ordre .....	25
5.1.3.	Dualité temps-fréquence.....	31
5.2.	Filtre <i>RC</i> passe-haut du premier ordre .....	33
5.2.1.	Point de vue temporel : réponse indicielle d'un filtre <i>RC</i> passe-haut du premier ordre .....	33
5.2.2.	Point de vue fréquentiel : réponse harmonique d'un filtre <i>RC</i> passe-haut du premier ordre.....	34
5.2.3.	Dualité temps-fréquence.....	36
5.2.4.	Animation et <i>exercices corrigés</i> sur les filtres :.....	36
5.2.5.	Validité du modèle.....	36
6.	Schémas équivalents en continu et en régime variable (« alternatif ») .....	41
7.	Annexes .....	45

# 1. INTRODUCTION

Tout système électronique de traitement de l'information comprend

- des entrées, qui reçoivent des signaux électriques ; ces derniers peuvent être
  - *analogiques* : ce sont des courants ou des tensions dont l'amplitude peut prendre toute valeur dans une certaine gamme ; ces signaux sont issus de capteurs (ou transducteurs) qui transforment une grandeur physique ou chimique en un courant ou une tension ;
  - *numériques* (également appelées *digitaux* en français), c'est-à-dire des courants ou des tensions dont l'amplitude ne peut prendre que deux valeurs ; ces signaux sont généralement reçus par l'intermédiaire d'interfaces numériques ;
- des sorties, qui peuvent être *analogiques* (elles peuvent notamment commander des *actionneurs*) ou *numériques*,
- une chaîne de traitement, qui peut être
  - entièrement numérique si les entrées et les sorties sont numériques,
  - entièrement analogique,
  - mixte analogique-numérique.

Ainsi, un lecteur de CD audio (Figure 1) possède une entrée analogique (la tête de lecture laser du disque), des entrées numériques (touches de commande, écran tactile, ...). Il a des sorties analogiques (écouteurs, haut-parleurs) et éventuellement des sorties numériques pour interfaçage avec un ordinateur ou d'autres systèmes numériques. La chaîne de traitement est mixte :

- le signal issu de la tête de lecture est traité de manière entièrement numérique,
- le résultat numérique de ce traitement est transformé en tensions analogiques par deux *convertisseurs numérique-analogique* (un par voie),
- ces tensions sont amplifiées et filtrées pour être acheminées vers les haut-parleurs.

De manière générale, un circuit électronique est constitué de *sources* ou *générateurs*, et de *récepteurs* ou *charges*. Un même élément peut jouer le rôle de générateur ou de charge, suivant le point de vue sous lequel on le considère : ainsi, l'amplificateur (Figure 1) est une source pour le haut-parleur, mais il est une charge pour le convertisseur numérique-analogique.

Certains composants ne peuvent être que des charges : ce sont les composants dits *passifs* tels que les résistances, condensateurs, diodes. Par opposition, les composants *actifs* (transistors, amplificateurs opérationnels) peuvent jouer le rôle de générateurs. Il faut pour cela qu'ils

soient *alimentés*, c'est-à-dire qu'ils soient raccordés à une source de tension constante, qui ne

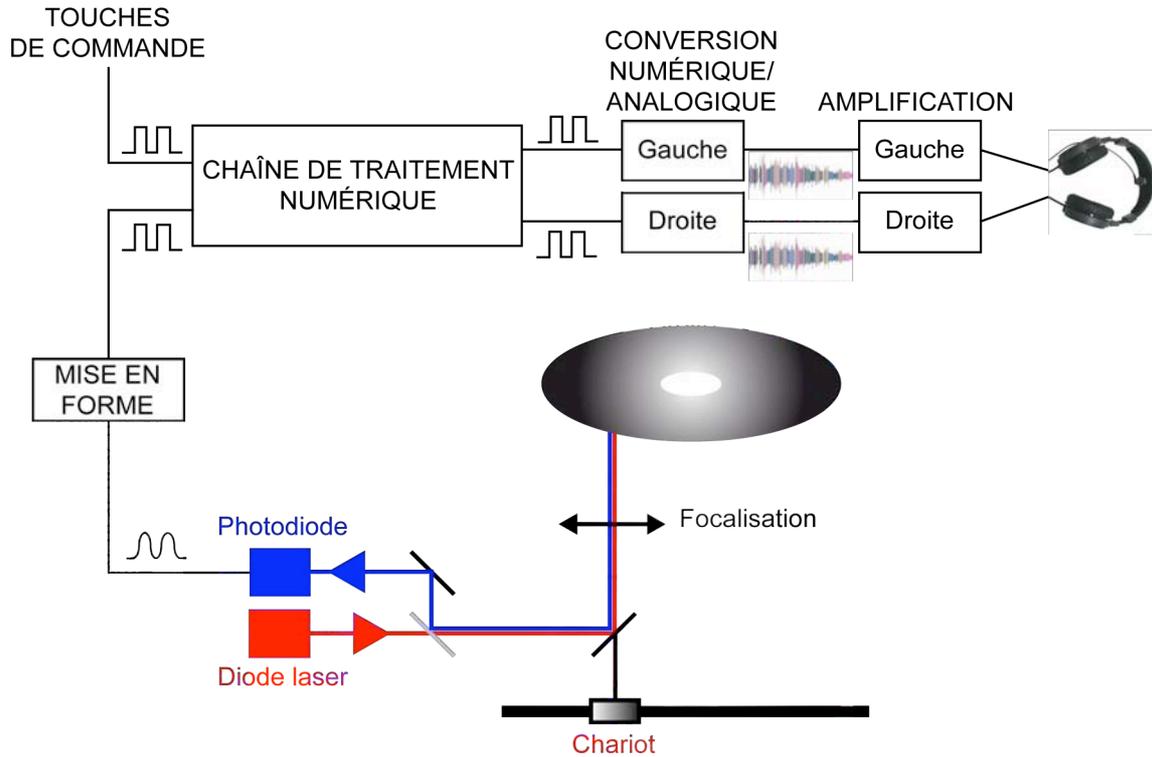


Figure 1

produit aucune information, mais qui fournit l'énergie nécessaire à leur fonctionnement. Cette tension constante, dite *tension d'alimentation*, peut être apportée par une source autonome (pile, batterie, cellules solaires), ou être élaborée à partir de la tension sinusoïdale du secteur (220 Volts, 50 Hz en France) par un circuit appelé *alimentation stabilisée*. Quelques principes de réalisation des alimentations stabilisées sont présentés en cours.

Ces notions peuvent être formalisées par la définition de *dipôles* et de *quadripôles*.

### Définition

Un dipôle est un élément qui possède deux bornes ; son comportement est modélisé par une relation du type  $V = f(I)$  ou  $I = g(V)$ .

Ainsi, une résistance, un condensateur, une diode (voir section 3), une source de courant, un générateur de tension (voir section 2), entrent dans la catégorie des dipôles.

**Définition**

Un quadripôle (Figure 2) est un élément qui possède quatre bornes ; son comportement peut être modélisé par des relations du type

$$V_1 = f_1(I_1, I_2)$$

$$V_2 = f_2(I_1, I_2)$$



Figure 2

Un filtre (voir section 5) ou un amplificateur sont des exemples de quadripôles.

**Remarque**

Si le quadripôle est constitué de composants qui sont linéaires ou en mode de fonctionnement linéaire, les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont linéaires. On peut alors utiliser une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

$Z_{11}$  est l'impédance d'entrée du quadripôle, et  $Z_{22}$  est son impédance de sortie.

On peut également exprimer la relation à l'aide des admittances :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

ou encore à l'aide des paramètres hybrides

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}.$$

Nous n'utiliserons pas ce formalisme, que l'on rencontre néanmoins fréquemment dans les ouvrages ou articles.

## 2. SOURCES (ou GÉNÉRATEURS)

### 2.1. Sources de tension

#### 2.1.1. Source de tension « idéale »

**Définition**

Une source de tension idéale fournit une tension  $V$  indépendante du courant  $I$  qu'elle débite dans la charge ; cette tension est donc indépendante de la charge.

La tension  $V$  peut être soit constante, soit variable dans le temps.

## 2.1.2. Source de tension « réelle »

**Définition**

Une source de tension réelle fournit une tension  $V$  qui dépend de  $I$ , donc de la charge.

On modélise généralement une source de tension réelle par un générateur de tension idéal auquel est branchée, en série, une résistance dite *résistance interne* ou *résistance de sortie* (Figure 3).

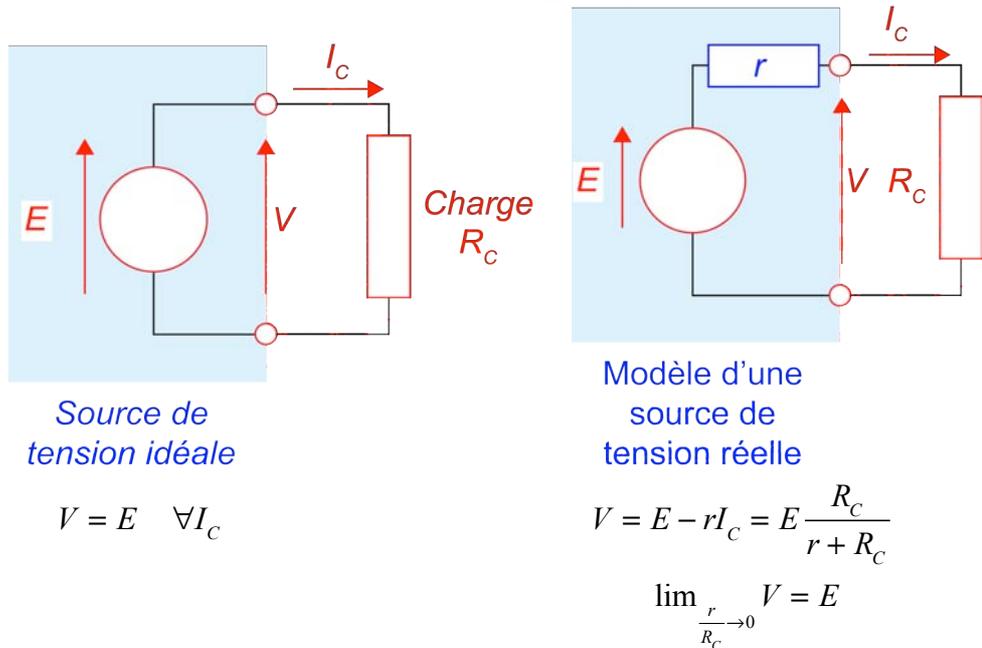


Figure 3

## 2.2. Sources de courant

## 2.2.1. Source de courant « idéale »

**Définition**

Une source de courant idéale fournit un courant  $I$  indépendant de la tension  $V$  aux bornes de sa charge ; ce courant est donc indépendant de la charge.

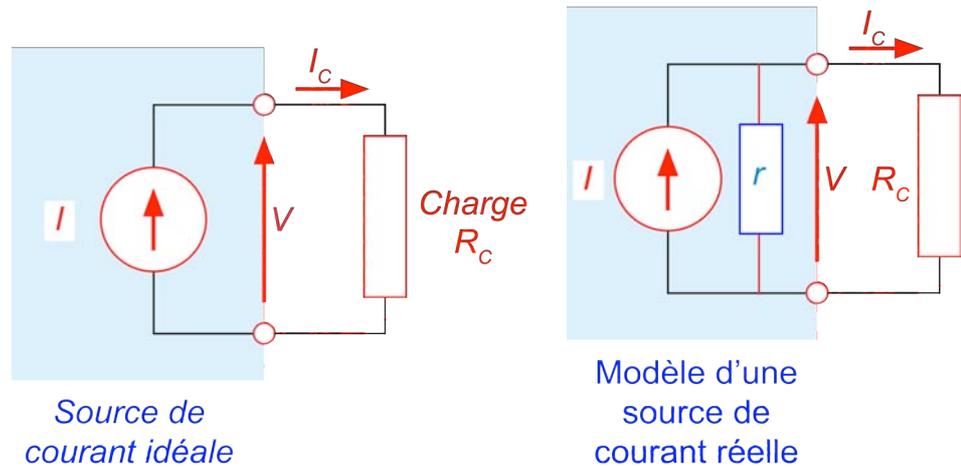
Le courant  $I$  peut être soit constant, soit variable dans le temps.

## 2.2.2. Source de courant « réelle »

**Définition**

Une source de courant réelle fournit un courant  $I_C$  qui dépend de  $V$ , donc de la charge.

On modélise généralement une source de courant réelle par un générateur de courant idéal auquel est branchée, en parallèle, une résistance dite *résistance interne* ou *résistance de sortie* (Figure 4).



$$I_C = I \quad \forall V$$

$$I_C = I - \frac{V}{r} = I \frac{1}{\frac{1}{R_C} + \frac{1}{r}}$$

$$\lim_{\frac{R_C}{r} \rightarrow 0} I_C = I$$

Figure 4

**Remarque :** lorsque l'on souhaite analyser un circuit, une source peut être représentée indifféremment par un générateur de tension réel ou par un générateur de courant réel, quelle que soit sa réalisation physique. Le choix de l'une ou l'autre représentation est dicté uniquement par des considérations de commodité :

- si l'on cherche à établir l'expression de la *tension aux bornes de la charge*, on représente la source par un générateur de tension réel, et l'on obtient la tension recherchée (voir Figure 3) par application de la formule du diviseur de tension (voir section 4) ; pour établir le modèle du générateur de tension réel, on peut
  - soit mesurer  $E$  et  $r$  si l'on dispose du circuit,
  - soit calculer  $E$  et  $r$  à l'aide du *théorème de Thévenin* (voir section 4.3) si l'on dispose du schéma électronique du circuit.
- si l'on cherche à établir l'expression du *courant* qui traverse la charge, on représente la source par un générateur de courant réel, et l'on obtient le courant recherché (voir Figure 4) par application de

la formule du diviseur de courant (voir section 4) ; pour établir le modèle du générateur de courant réel, on peut

- soit mesurer  $I$  et  $r$  si l'on dispose du circuit,
- soit calculer  $I$  et  $r$  à l'aide du *théorème de Norton* (voir section 4.4) si l'on dispose du schéma électronique du circuit.

D'autre part, si la source a été réalisée, et si l'on sait qu'elle fournit une tension faiblement dépendante de la charge, on la modélise de préférence par une source de tension ; si elle fournit un courant faiblement dépendant de la charge, on la modélise de préférence par une source de courant.

Notons que les deux schémas représentés sur la Figure 5 sont équivalents du point de vue de la charge : dans un cas comme dans l'autre, la relation entre la tension aux bornes de celle-ci et l'intensité du courant qui la traverse est

$V = E - rI_C$  par application de la *loi des mailles* (voir section 4.2) ou, de manière équivalente, par application de la *loi des nœuds* (voir section 4.1)

$$I_C = \frac{E - V}{r}.$$

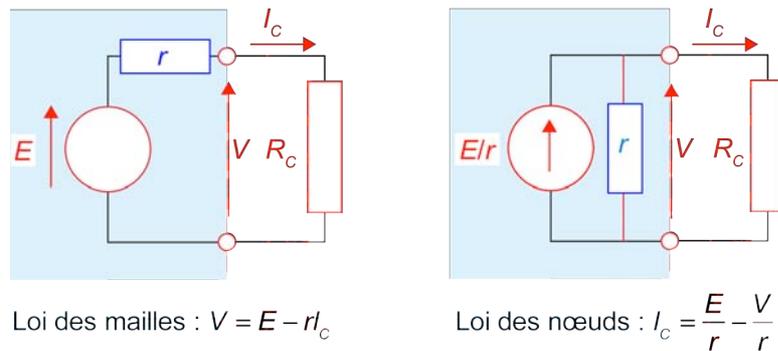


Figure 5

De même, les deux schémas représentés sur la Figure 6 sont équivalents du point de vue de la charge : dans un cas comme dans l'autre, la relation entre le courant qui traverse celle-ci et la tension à ses bornes est

$$I_C = I - \frac{V}{r}$$

ou, de manière équivalente

$$V = r(I - I_C).$$

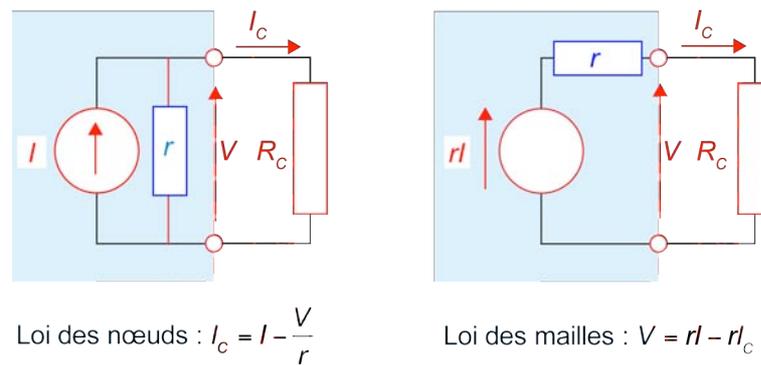


Figure 6

### 2.3. Sources indépendantes et sources dépendantes

Si  $E$  (ou  $I$ ) dépend d'un courant ou d'une tension présent(e) dans une autre branche du circuit, la source est dite *dépendante* ou *liée*. Dans le cas contraire, elle est dite *indépendante*.

*Exemple* : un amplificateur peut être modélisé comme un générateur *dépendant* (Figure 7). En effet il fournit une tension  $v_{out}$  qui est proportionnelle à la tension d'entrée  $v_{in}$ . Si la charge branchée à la sortie de l'amplificateur est infinie, la tension de sortie vaut

$$v_{out} = Gv_{in}.$$

$G$  est le *gain à vide* de l'amplificateur.

#### Terminologie

On dit qu'un amplificateur fonctionne à *vide* si sa charge est infinie.

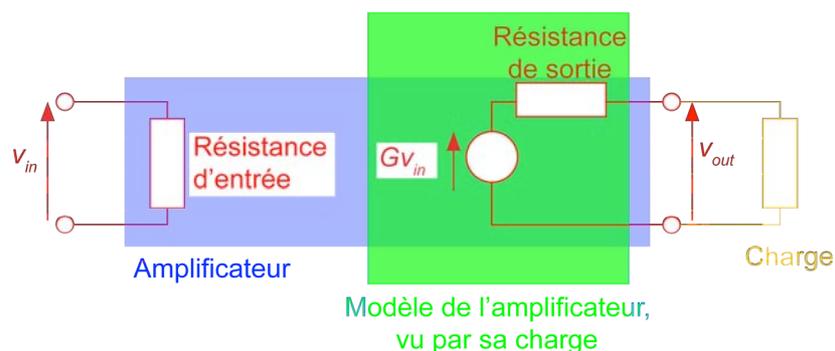


Figure 7

### 2.4. Signaux typiques

Les signaux les plus couramment utilisés sont les échelons, les créneaux, les signaux rectangulaires (Figure 8) et les signaux sinusoïdaux.

Pour les signaux rectangulaires, la quantité  $\tau/T$  est appelée « rapport cyclique ». Un « signal carré » est un signal rectangulaire dont le rapport cyclique est égal à 1/2.

On étudiera en détail, dans la section 5, le cas des signaux sinusoïdaux, qui ont une importance toute particulière.

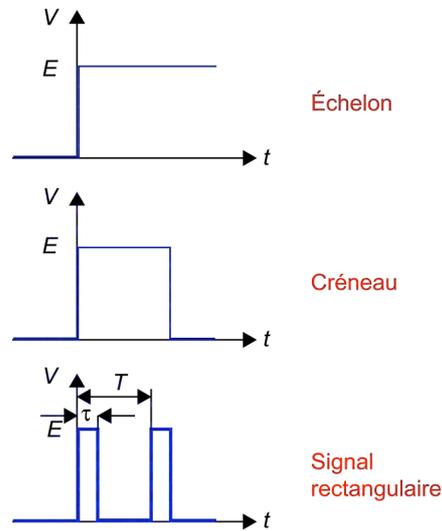


Figure 8

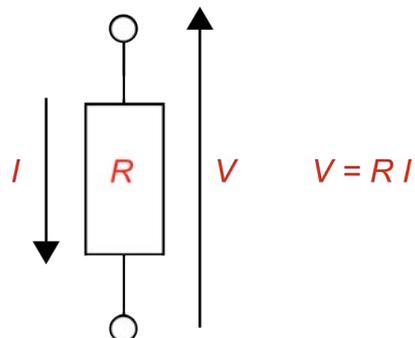
### 3. CHARGES (ou RÉCEPTEURS) PASSIFS

En électronique intégrée, on utilise essentiellement quatre types de charges passives :

- résistances,
- condensateurs,
- inductances,
- diodes.

Les diodes font l'objet d'un chapitre particulier du cours.

#### 3.1. Résistances



Il peut être utile d'avoir recours à une métaphore hydraulique : on peut se représenter mentalement la tension aux bornes de la résistance comme la différence de pression entre les extrémités d'un tuyau (proportionnelle à la hauteur dans le cas d'une chute d'eau), le courant électrique comme le débit dans le tuyau, et la résistance comme une grandeur qui est d'autant plus grande que le diamètre du tuyau est faible. Il s'agit bien d'une métaphore qui peut être commode, mais elle n'a pas de sens physique : les phénomènes de conduction dans les métaux ou les semi-conducteurs (qui sont la base de l'électronique) n'ont rien à voir avec les phénomènes de transport dans les liquides ou les gaz.

#### En pratique : résistances pour la réalisation de circuits en composants discrets

Lorsque l'on réalise un circuit en composants discrets, on utilise des résistances qui se présentent sous la forme de petits cylindres munis d'un conducteur métallique souple à chaque extrémité. Les valeurs *nominales* des résistances sont indiquées par des anneaux de couleur imprimés sur le cylindre ; un des anneaux indique la *tolérance*, c'est-à-dire la différence relative maximale entre la valeur réelle de la résistance et sa valeur nominale.

Exercice interactif sur l'identification des résistances :

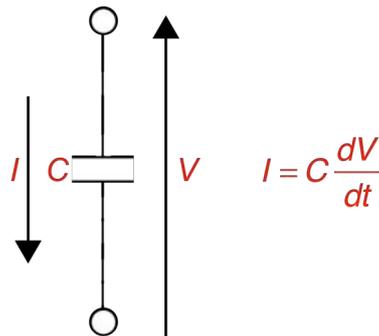
<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/coderesi.html>

Outre sa valeur nominale et la tolérance sur celle-ci, une résistance est caractérisée par la puissance maximale qu'elle peut dissiper sans être détruite. On rappelle que la puissance  $P$  dissipée dans une résistance  $R$  parcourue par un courant  $I$  est donnée par l'expression :  $P = RI^2$ .

#### En pratique : résistances en électronique intégrée

En électronique intégrée, une résistance est réalisée par un parallélépipède de silicium, dont la résistivité dépend du dopage (voir le chapitre consacré à la technologie CMOS). Souvent, pour diminuer la surface de silicium utilisée, on préfère utiliser un composant actif (transistor) dans un mode de fonctionnement où il se comporte comme une résistance.

### 3.2. Condensateurs



#### En pratique : condensateurs pour la réalisation de circuits en composants discrets

Les condensateurs, en composants discrets, se présentent sous diverses formes et tailles. La valeur nominale de la capacité, et la tolérance sur cette valeur, sont souvent inscrites en clair sur le composant ; elle est parfois représentée par un code de couleurs. Outre sa capacité et la tolérance sur celle-ci, un condensateur est caractérisé par sa tension maximale d'utilisation.

**En pratique : condensateurs pour la réalisation de composants en électronique intégrée**

Les condensateurs sont constitués de deux conducteurs ou semi-conducteurs séparés par une mince couche d'isolant, généralement de la silice (oxyde de silicium  $\text{SiO}_2$ ). Les valeurs typiques de condensateurs en circuits intégrés sont de l'ordre du pF ou de la fraction de pF. Voir le chapitre consacré à la technologie CMOS.

### 3.3. Inductances

Les inductances ne sont utilisées que pour des applications dans le domaine des radiofréquences (fréquences supérieures à 100 kHz). Ce domaine ne sera pas abordé dans le cours. Les inductances peuvent être réalisées en composants discrets ou en électronique intégrée (Figure 9).

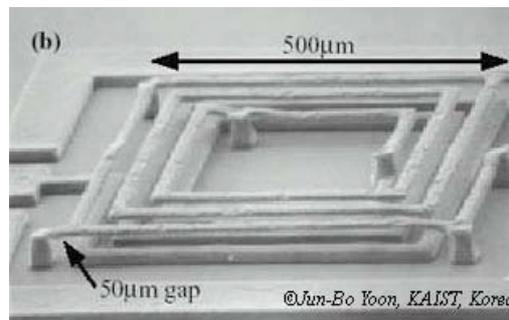


Figure 9

## 4. ASSOCIATION DE GÉNÉRATEURS ET DE RÉCEPTEURS

On rappelle que, pour des raisons historiques, le sens conventionnel du courant est opposé au sens réel de déplacement des électrons. Voir par exemple :

<http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/agora/spip.php?article18>.

### 4.1. Conservation de la charge électrique (loi des nœuds)

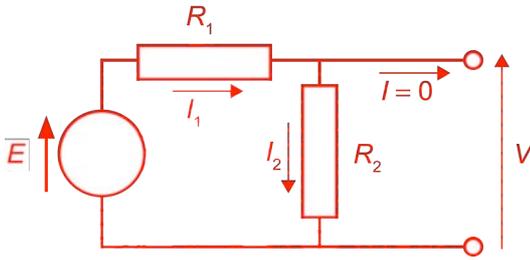
**Loi des nœuds**

La somme algébrique des courants se dirigeant vers un nœud est nulle.

### 4.2. Circulation du champ électrique (loi des mailles)

**Loi des mailles**

Lorsque l'on parcourt complètement une maille d'un circuit, la somme des tensions aux bornes des récepteurs et des générateurs est nulle.

**Exemple : diviseur de tension (résultat à connaître par cœur)**

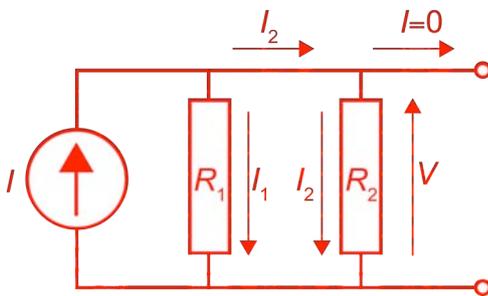
Loi des mailles et loi d'Ohm :

$$E = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

Loi des nœuds :  $I_1 = I_2$

Loi d'Ohm :  $V = R_2 I_2$

$$\Rightarrow V = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

**Exemple : diviseur de courant (résultat à connaître par cœur)**

Loi des nœuds :  $I = I_1 + I_2$

Loi d'Ohm et loi des mailles :

$$I_1 = \frac{V}{R_1} ; I_2 = \frac{V}{R_2}$$

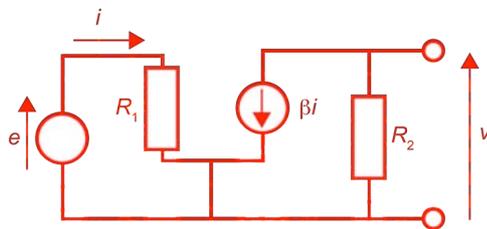
$$\Rightarrow I_2 = I \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

**Remarque 1 :**

La formule du diviseur de tension est formellement la même que celle du diviseur de courant : on obtient la seconde à partir de la première en remplaçant les tensions par les courants, et les résistances ( $R$ ) par les conductances ( $1/R$ ).

**Remarque 2 :**

Si les composants qui constituent le diviseur de tension ou le diviseur de courant sont décrits par des impédances et non des résistances, les relations sont formellement les mêmes : il suffit de remplacer les résistances par les impédances et les conductances par les admittances.

**Exemple : gain « petits signaux » d'un amplificateur « émetteur commun » (voir le chapitre sur les transistors bipolaires)**

On cherche le gain « à vide »  $v / e$  du circuit ci-contre.

Loi d'Ohm :  $e = R_1 i$

Loi d'Ohm et loi des nœuds :  $v = -R_2 \beta i$

Le gain à vide est donc :  $\frac{v}{e} = -\beta \frac{R_2}{R_1}$

### 4.3. Théorème de THÉVENIN

Le théorème de Thévenin, ainsi que le théorème de Norton énoncé dans la section 4.4, sont des outils fondamentaux pour la conception et l'analyse de circuits électroniques : ils permettent en effet de simplifier considérablement l'analyse de circuits linéaires.

Il est important pour l'ingénieur de connaître et d'avoir compris ces théorèmes, mais surtout d'être convaincu qu'il ne s'agit pas simplement d'un exercice de mathématiques : ce sont de véritables outils. Il faut donc penser à les mettre en œuvre autant qu'il est nécessaire : un outil n'est utile que si l'on acquiert le réflexe de le sortir de la boîte à outils et de l'utiliser à bon escient.

#### Théorème

Soit un circuit composé de composants passifs linéaires (caractérisés par leurs résistances ou leurs impédances), de générateurs indépendants et de générateurs *linéairement* dépendants. On peut modéliser le comportement de ce circuit, vis-à-vis d'une charge branchée entre deux de ses points, par un générateur de tension constitué

- d'un générateur de tension idéal,
- d'une impédance (appelée « impédance de Thévenin » ou « impédance de sortie ») branchée en série avec le générateur de tension idéal.

Connaissant le schéma du circuit, on peut calculer de différentes manières la tension fournie par le générateur idéal, et la valeur de l'impédance de Thévenin.

#### 4.3.1. Forme « marche à vide et court-circuit »

- La tension fournie par le générateur de tension idéal (dite « tension de Thévenin ») a pour expression

$$E_{Th} = V_{co},$$

où  $V_{co}$  est la tension qui existerait, entre les bornes considérées, si celles-ci étaient en circuit ouvert, c'est-à-dire si la charge branchée entre ces bornes était de résistance (ou d'impédance) infinie.

- L'impédance de Thévenin a pour expression

$$Z_{Th} = \frac{V_{co}}{I_{cc}},$$

où  $I_{cc}$  est le courant qui passerait, entre les deux bornes considérées, si celles-ci étaient court-circuitées, c'est-à-dire si la charge branchée entre ces bornes était de résistance (ou d'impédance) nulle (Figure 10).

#### 4.3.2. Forme « de Thévenin »

On peut également calculer les éléments du générateur de Thévenin par le procédé suivant (Figure 11) :

- « éteindre » les sources indépendantes, c'est-à-dire remplacer les sources de tension indépendantes par des courts-circuits et les sources de courant indépendantes par des circuits ouverts,
- conserver les sources liées,
- calculer le courant  $I_S$  qui passerait entre les bornes considérées si l'on branchait à celles-ci une source de tension  $V_S$ .

L'impédance du générateur équivalent vaut

$$Z_{Th} = \frac{V_S}{I_S}.$$

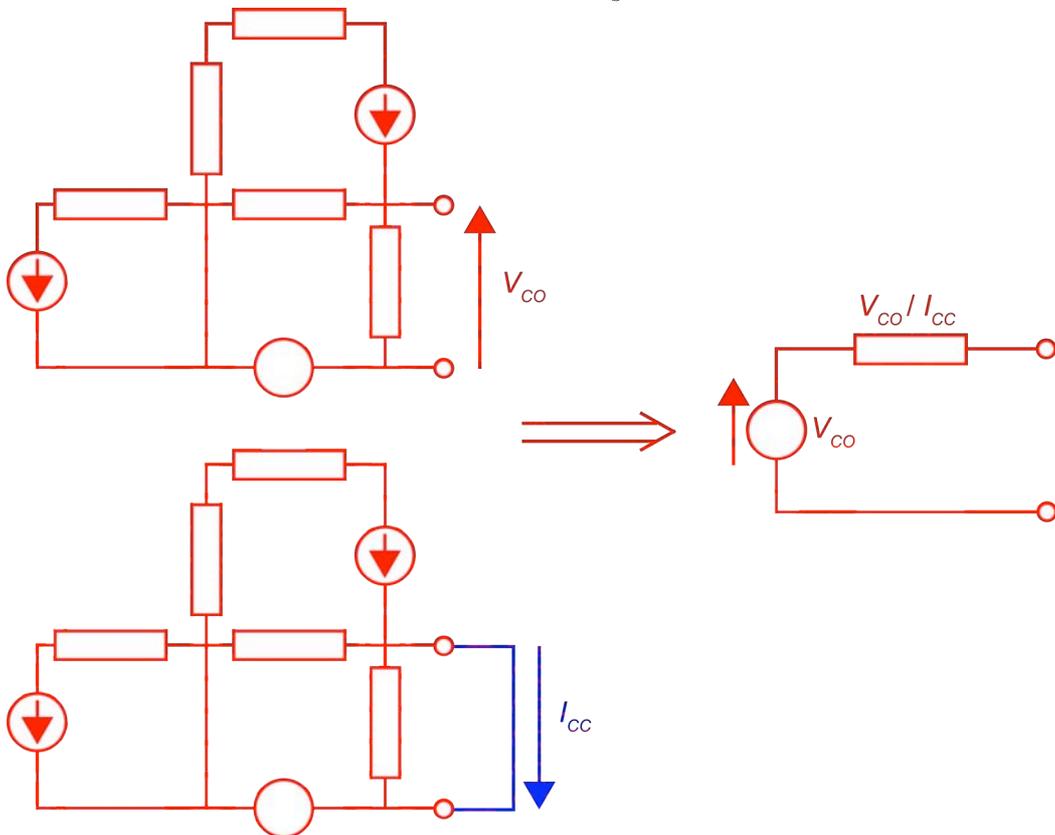


Figure 10

*Théorème de Thévenin (forme « marche à vide et court-circuit »)*

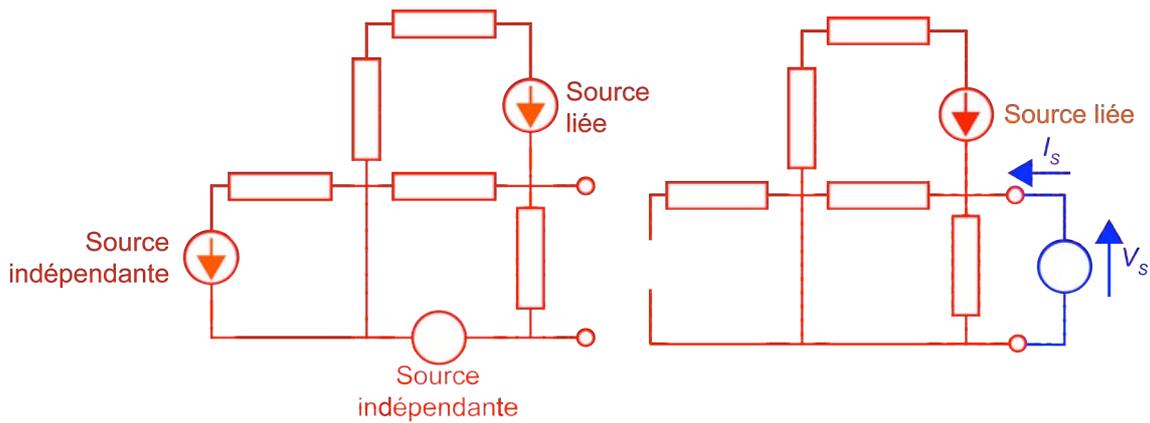


Figure 11

*Théorème de Thévenin (forme « de Thévenin »)*

**Remarque :**

Si le circuit ne comporte que des sources *indépendantes*, le circuit simplifié, obtenu en court-circuitant les sources de tension et remplaçant les sources de courant par des circuits ouverts, ne contient que des composants passifs, caractérisés par leurs impédances. L'impédance du générateur de Thévenin équivalent est donc simplement l'impédance équivalente du circuit simplifié (Figure 12).

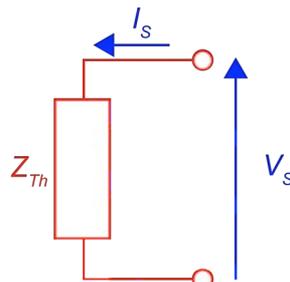


Figure 12

Des exemples de mise en œuvre sont présentés dans la section 4.5.

#### 4.4. Théorème de NORTON

**Théorème**

Soit un circuit composé de composants passifs linéaires (caractérisés par leur résistance ou leur impédance), de générateurs indépendants et de générateurs *linéairement* dépendants. On peut modéliser le comportement de ce circuit, vis-à-vis d'une charge branchée entre deux de ses points, par un générateur de courant constitué

- d'un générateur de courant idéal,
- d'une impédance branchée en parallèle avec le générateur de courant idéal.

Les valeurs de ces éléments peuvent être déterminées par le procédé suivant (Figure 13) :

- le courant fourni par le générateur de courant idéal (« courant de Norton ») a pour expression

$$I_N = I_{cc},$$

où  $I_{cc}$  est le courant qui passerait entre les bornes considérées si celles-ci étaient court-circuitées, c'est-à-dire si la charge branchée entre ces bornes était de résistance (ou d'impédance) nulle,

- l'impédance interne (ou « impédance de Norton » ou « impédance de sortie ») a pour expression

$$Z_N = \frac{V_{co}}{I_{cc}},$$

où  $V_{co}$  est la tension qui existerait, entre les deux bornes considérées, si celles-ci étaient en circuit ouvert, c'est-à-dire si la charge branchée entre ces bornes était de résistance (ou d'impédance) infinie.

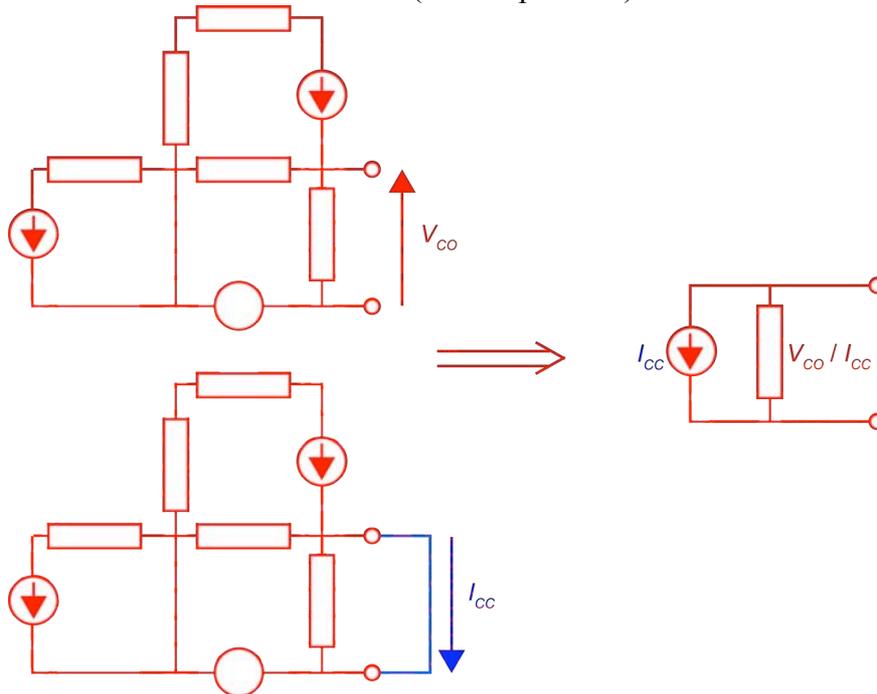


Figure 13

*Théorème de Norton*

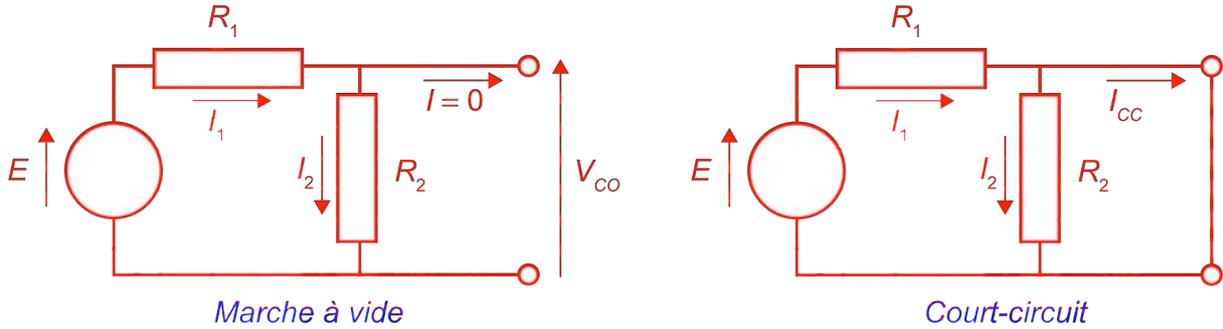
**Remarque**

Si l'on connaît les éléments  $(E_{Th}, Z_{Th})$  du générateur de Thévenin équivalent d'un circuit donné, on peut en déduire les éléments  $(I_N, Z_N)$  du générateur de Norton équivalent à ce même circuit :

$$I_N = \frac{E_{Th}}{Z_{Th}}, \quad Z_N = Z_{Th}$$

## 4.5. Exemples de mise en œuvre des théorèmes de Thévenin et Norton

### 4.5.1. Générateur de Thévenin équivalent à un diviseur de tension



*Marche à vide* : on a démontré (section 4.2) la formule du diviseur de tension. On obtient donc immédiatement l'expression de  $E_{Th}$  :

$$E_{Th} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

*Court-circuit* : la loi d'Ohm dans  $R_2$  donne  $I_2 = 0$ , donc d'après la loi des nœuds  $I_1 = I_{CC}$ . Enfin, d'après la loi des mailles :  $E = R_1 I_1$ . Donc

$$I_{CC} = \frac{E}{R_1}$$

et par conséquent  $R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2$ .

#### Remarque

L'expression de la résistance de Thévenin  $R_{Th}$  peut être obtenue de manière plus simple en utilisant la « forme de Thévenin » (section 4.3.2) : le générateur de tension étant indépendant, on peut l'éteindre, c'est-à-dire le remplacer par un court-circuit. On voit alors immédiatement que le circuit ainsi obtenu est constitué des deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  en parallèle.

### 4.5.2. Schéma équivalent « petits signaux » selon Thévenin d'un amplificateur « émetteur commun » (voir le chapitre sur la technologie bipolaire)

On cherche le générateur de Thévenin équivalent au circuit représenté sur la Figure 14, qui a déjà été étudié dans la section 4.2.

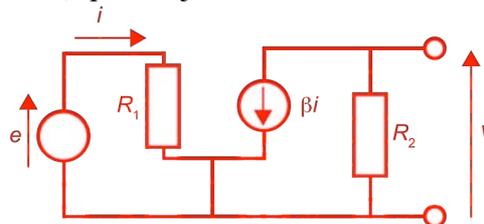


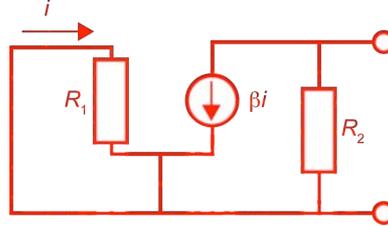
Figure 14

On a démontré que le gain à vide du circuit a pour expression

$$\frac{v}{e} = -\beta \frac{R_2}{R_1}$$

Par conséquent  $e_{Th} = v_{CO} = -\beta \frac{R_2}{R_1} e$ .

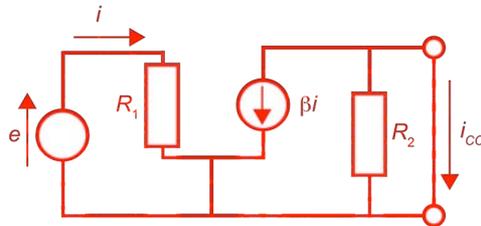
Pour calculer la résistance de Thévenin, on éteint le générateur de tension indépendant  $e$  et l'on conserve la source de courant liée ; le schéma simplifié est donc :



D'après la loi des mailles, on a  $R_1 i = 0$ , donc  $i = 0$ . La source de courant liée fournit un courant nul : c'est donc un circuit ouvert. Le schéma simplifié se réduit donc à la résistance  $R_2$  :  $R_{Th} = R_2$ .

#### Remarque

Montrons que l'on obtient évidemment le même résultat en appliquant la forme « marche à vide et court-circuit ». L'expression de  $v_{CO}$  ayant été déterminée au paragraphe précédent, il reste à trouver celle du courant  $i_{CC}$  dans le circuit suivant :



La tension aux bornes de la résistance  $R_2$  étant nulle, le courant qui la parcourt est nul ; donc, d'après la loi des nœuds :  $i_{CC} = -\beta i$ .

D'autre part, d'après la loi d'Ohm dans la résistance  $R_1$ , on a  $i = e / R_1$ .

Par conséquent  $i_{CC} = -\beta \frac{e}{R_1}$ .

La résistance de Thévenin a donc pour expression :  $R_{Th} = \frac{-\beta \frac{R_2}{R_1} e}{-\beta \frac{e}{R_1}} = R_2$ . On retrouve

$$R_{Th} = \frac{-\beta \frac{R_2}{R_1} e}{-\beta \frac{e}{R_1}} = R_2$$

évidemment le résultat précédent.

#### 4.5.3. Charge d'un condensateur

On considère le circuit représenté sur la Figure 15 ; on cherche l'expression de la tension  $V_C(t)$  aux bornes du condensateur en réponse à un échelon de tension  $E(t)$  (« réponse indiciale » du circuit).

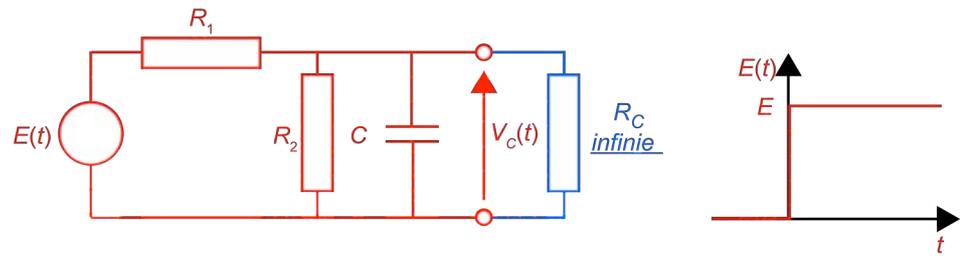


Figure 15

On sait (résultat à connaître par cœur) que la charge d'un condensateur à travers une résistance, selon le schéma de la Figure 16, à partir de conditions initiales nulles, est gouvernée par la relation

$$V_C(t) = E \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \text{ avec } \tau = RC$$

Ce résultat est établi dans la section 5.1.1.

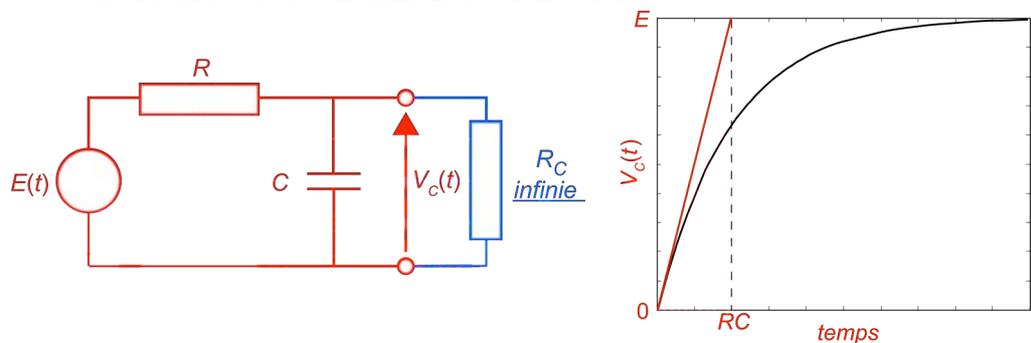


Figure 16

Puisque ce résultat est acquis, il est naturel de chercher à ramener le circuit de la Figure 15 à un circuit de la forme de celui qui est représenté sur la Figure 16. Pour cela, on utilise évidemment le théorème de Thévenin. On a vu dans la section 4.5.1 (diviseur de tension) que le générateur de Thévenin équivalent est constitué d'un générateur idéal qui a pour expression

$$E_{Th}(t) = E(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

en série avec la résistance  $R_{Th} = R_1 // R_2$ .

La réponse indicielle recherchée a donc pour expression :

$$V_C(t) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \text{ avec } \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

#### 4.5.4. Pont de Wheatstone

On cherche le générateur de Thévenin équivalent au pont de Wheatstone représenté sur la Figure 17.

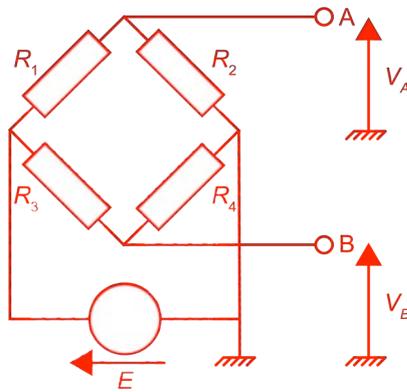


Figure 17

En circuit ouvert, d'après la formule du diviseur de tension (section 4.5.1), on a

$$V_A = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ et } V_B = E \frac{R_4}{R_3 + R_4},$$

$$\text{donc } V_{Th} = V_A - V_B = E \left[ \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right].$$

On trouve la résistance du générateur de Thévenin en remplaçant le générateur de tension indépendant par un court-circuit : on observe que la résistance équivalente est constituée de  $R_3$  et  $R_4$  en parallèle, en série avec  $R_1$  et  $R_2$  en parallèle.

Donc

$$R_{Th} = (R_1 // R_2) + (R_3 // R_4) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

#### 4.5.5. *Exercice* : estimation de l'erreur de mesure de la résistance interne d'un générateur de tension

On rappelle la « méthode de la tension moitié » mise en œuvre pour mesurer la résistance interne d'un générateur de tension : on mesure la tension  $V$  aux bornes du générateur en circuit ouvert, puis on fait débiter le générateur dans une résistance variable  $R_C$ , et l'on fait varier celle-ci jusqu'à ce que la tension  $V_1$  à ses bornes soit égale à  $V/2$ . Alors la valeur de  $R_C$  (notée  $R_{1/2}$ ) est égale à la valeur de la résistance interne du générateur.

On utilise, pour cette mesure, un voltmètre de résistance d'entrée  $R_V = 10 \text{ M}\Omega$ . On trouve  $R_{1/2} = 5 \text{ M}\Omega$ . Montrer que si l'on en déduit que la résistance interne  $r$  du générateur vaut  $5 \text{ M}\Omega$ , on commet une erreur relative

$$\frac{r - R_{1/2}}{r} = 50\%.$$

#### 4.5.6. *Autres exercices*

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/thevenin.html>

### 4.6. Adaptation d'impédances

Nous avons vu que, pour un circuit composé d'éléments linéaires, le théorème de Thévenin ou le théorème de Norton permettent toujours de ramener le problème

que l'on étudie à l'association d'un générateur réel d'impédance interne  $Z_{Th}$  et d'une charge d'impédance  $Z_C$ . Le problème de l'adaptation d'impédances est le problème du choix des valeurs relatives de  $Z_{Th}$  et  $Z_C$ . Deux cas sont à envisager, selon que l'on cherche à transmettre une tension ou une puissance.

#### 4.6.1. Cas de la transmission d'une tension

Supposons que l'on veuille mesurer, à l'aide d'un voltmètre, la tension  $V$  entre deux points d'un circuit supposé linéaire. Ce dernier peut être modélisé comme un générateur de Thévenin ( $E_{Th}$ ,  $Z_{Th}$ ). Supposons que l'impédance interne se réduise à une résistance : alors  $Z_{Th} = R_{Th}$ . Le voltmètre, pour sa part, peut être modélisé comme une charge  $Z_C$ , appelée *impédance d'entrée* du voltmètre, que nous supposons aussi purement résistive :  $Z_C = R_C$ . On se trouve donc dans la situation représentée sur la Figure 18 : on voit immédiatement que la tension mesurée  $V$  a pour expression

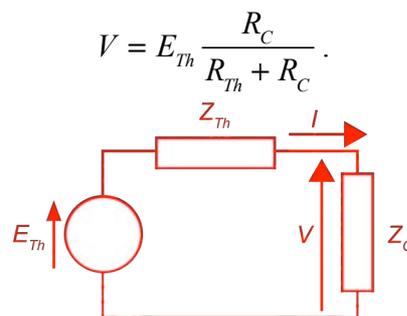


Figure 18

#### Propriété

Pour que la présence de l'appareil de mesure ait le moins d'influence possible, il faut que *la résistance d'entrée  $R_C$  de l'appareil de mesure soit très grande devant la résistance de la source  $R_{Th}$ .*

Autre situation fréquente : supposons que la source fournisse un signal très faible (cas d'un capteur par exemple : antenne d'un téléphone portable, thermocouple, ...) que l'on cherche à amplifier à l'aide d'un amplificateur d'impédance d'entrée  $Z_C$ . Le signal d'entrée de l'amplificateur a donc pour expression :  $V = E_{Th} \frac{Z_C}{Z_{Th} + Z_C}$ .

Puisque l'on cherche à amplifier le signal fourni par le capteur, il faut que la présence de l'amplificateur affaiblisse le moins que possible le signal que l'on veut amplifier, donc que la tension  $V$  soit aussi grande que

possible. On aboutit donc à la même conclusion que dans le cas précédent.

### Propriété

Pour qu'une source de tension transmette une tension à un amplificateur avec l'affaiblissement le plus faible possible, *la résistance d'entrée de l'amplificateur doit être très grande devant la résistance de la source.*

### Remarque

Si la source et la charge ne sont pas purement résistives, la condition devient :

$$\left| \frac{Z_C}{Z_{Th} + Z_C} \right| \ll 1 \text{ et } \text{phase} \left( \frac{Z_C}{Z_{Th} + Z_C} \right) \approx 0$$

#### 4.6.2. Cas de la transmission d'une puissance

Il est fréquent que le signal de sortie d'un système de traitement de l'information soit transmis à un *actionneur* (moteur, vérin, haut-parleur, etc.), c'est-à-dire à un système physique qui doit avoir une action sur le monde extérieur, donc fournir une certaine puissance. Ainsi, le signal de sortie d'un lecteur de CD doit être transmis à un haut-parleur ou écouteur qui doit fournir une puissance acoustique ; le régulateur de vitesse d'une voiture fournit un signal à un moteur électrique qui met en mouvement la pédale d'accélérateur ou le papillon d'admission d'air. On a donc intérêt à ce que *la puissance électrique fournie à la charge soit maximum*, alors que, dans le cas précédent, on avait intérêt à ce que la tension aux bornes de la charge soit maximum.

Comme dans le cas précédent, la source (le système de traitement) et la charge (l'actionneur), s'ils fonctionnent en régime linéaire, peuvent être modélisés respectivement par un générateur de Thévenin ( $E_{Th}$ ,  $Z_{Th}$ ) et par une impédance de charge  $Z_C$ . L'objectif de l'adaptation d'impédance est à présent de trouver la relation entre l'impédance de source et l'impédance de charge qui assure la meilleure transmission de puissance possible.

Supposons pour simplifier que les impédances soient réelles (des résistances). La puissance fournie à la charge est

$$P = VI = E_{Th}^2 \frac{R_C}{(R_{Th} + R_C)^2}$$

Le générateur étant fixé, comment choisir la charge pour que lui soit transmise une puissance maximale ? Cette charge est donnée par la relation :

$$\frac{dP}{dR_C} = E_{Th}^2 \frac{R_{Th} - R_C}{(R_{Th} + R_C)^3} = 0, \text{ soit } \boxed{R_{Th} = R_C}.$$

### Propriété

La transmission de puissance entre une source et une charge résistive est optimale si la résistance de source et la résistance de charge sont égales.

La transmission de signal, elle, n'est pas optimale puisque la tension aux bornes de la charge n'est que la moitié de sa valeur maximale  $E_{Th}$ .

Que se passe-t-il si l'on s'éloigne de la condition d'adaptation ?

- Si la résistance de charge est très grande devant la résistance de source, le courant tend vers zéro, donc le générateur ne fournit pas de puissance et la charge n'en reçoit pas.
- Si la résistance de charge est très petite devant la résistance de source,

la puissance  $\frac{E_{Th}^2}{R_{Th} + R_C}$  fournie par le générateur est dissipée dans sa

résistance de source au lieu d'être transmise à la charge : dans l'exemple du lecteur de CD, l'amplificateur chauffe et les hauts parleurs ne fournissent pas de puissance acoustique.

La Figure 19 illustre ces phénomènes. Les puissances sont rapportées à la puissance maximale que peut fournir le générateur,  $E_{Th}^2/R_{Th}$  ; la résistance de charge est rapportée à la résistance de source, de sorte que la condition d'adaptation apparaît pour  $R_C/R_{Th} = 1$ .

Dans le cas où les éléments des circuits sont des impédances complexes  $Z_{Th}$  et  $Z_C$ , on démontre (voir le document « Corrigé des exercices proposés ») le résultat suivant.

### Propriété

La transmission de puissance entre une source et une charge est optimale si l'impédance de source et l'impédance de charge sont complexes conjuguées :  $\boxed{Z_C = Z_{Th}^*}$ .

*Illustration :*

<http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electro/adapt.html>

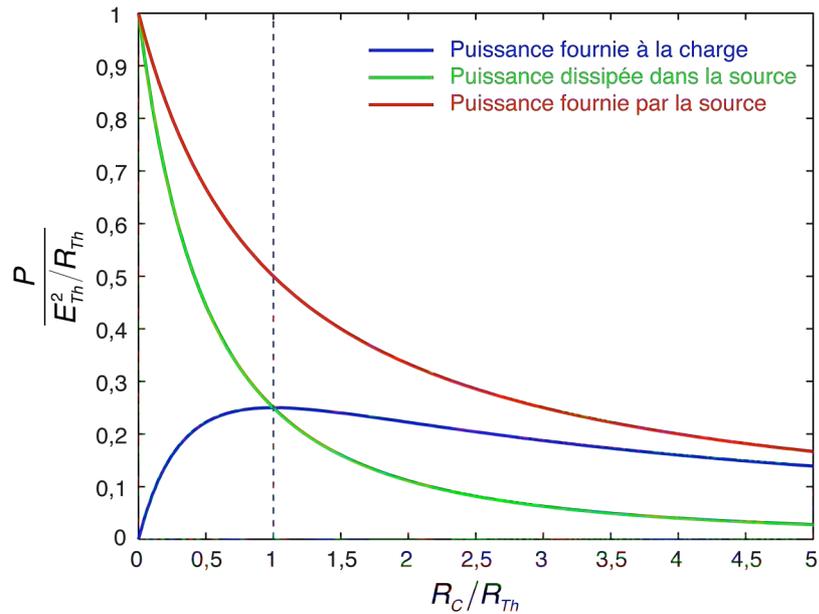


Figure 19

## 5. FILTRES : DUALITÉ TEMPS-FRÉQUENCE

Cette section est d'une grande importance, car elle présente des concepts déjà vus en prépa, mais probablement sous un angle différent. D'autre part, elle contient de nombreux résultats qui seront extrêmement utiles, non seulement dans le cours d'électronique, mais aussi dans le cours de commande de processus.

Nous considérons dans toute cette section des filtres composés exclusivement d'éléments passifs (résistances et condensateurs) ; on les désigne sous le terme de « filtres passifs », par opposition aux « filtres actifs », qui comprennent des composants actifs (transistors ou amplificateurs opérationnels).

### 5.1. Filtre RC passe-bas du premier ordre

La Figure 20 présente le filtre passif le plus simple, constitué d'une résistance et d'un condensateur.

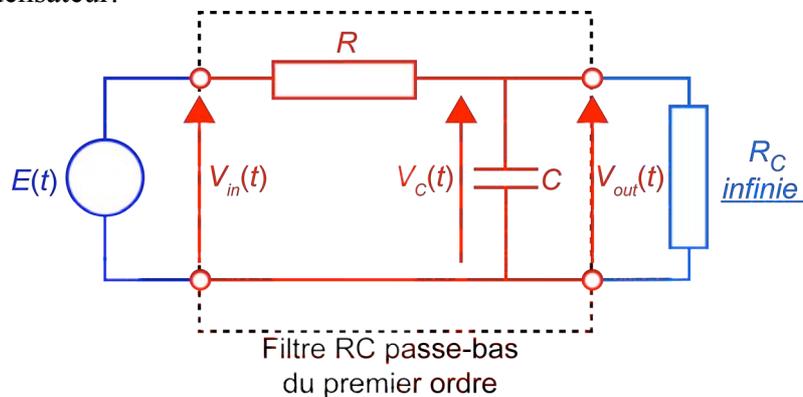


Figure 20

Le signal d'entrée  $V_{in}(t)$  de ce filtre est  $E(t)$  ; son signal de sortie  $V_{out}(t)$  est  $V_C(t)$ .

### 5.1.1. Point de vue temporel : réponse indicielle d'un filtre RC passe-bas du premier ordre

Rappelons (voir section 4.5.3) que la réponse indicielle est la réponse  $V_C(t)$  à un échelon de tension  $E(t)$  (voir Figure 15) lorsque toutes les conditions initiales sont nulles. En d'autres termes, il s'agit de la courbe de charge d'un condensateur à travers une résistance sous une tension constante appliquée à l'instant  $t = 0$ . Un échelon de tension d'amplitude unité est appelé « échelon de Heaviside », habituellement désigné par  $H(t)$  :

$$\begin{aligned} H(t) &= 0 \text{ pour tout } t \leq 0 \\ H(t) &= 1 \text{ pour tout } t > 0 \end{aligned}$$

La charge d'un condensateur à travers une résistance, lorsque  $E(t)$  passe de 0 à  $E$ , en un temps infiniment court, à l'instant  $t = 0$ , est donc la réponse temporelle  $V_C(t)$  à un échelon  $E(t) = EH(t)$ .

L'impédance de charge étant infinie, le courant dans la résistance est égal au courant dans le condensateur. On a donc

$$E(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} \quad (1)$$

où  $Q(t)$  est charge électrique portée par le condensateur et  $E(t) = EH(t)$ .

Le système est donc régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre, ce qui explique une partie de la dénomination « filtre passe-bas du premier ordre ».

La solution de l'équation (1) est la somme de la solution en régime libre (solution générale de l'équation sans second membre) et de la solution en régime forcé (solution particulière de l'équation complète).

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme

$$A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = RC.$$

La quantité  $\tau$  est appelée *constante de temps* du filtre.

La solution en régime forcé est évidemment  $CE$ . La solution recherchée est donc de la forme

$$Q(t) = CE + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La condition initiale étant  $V_C(t) = 0$ , donc  $Q(t) = 0$ , la constante  $A$  est égale à  $-CE$ , d'où la solution cherchée :

$$Q(t) = CE \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

soit encore

$$V_c(t) \equiv \frac{Q(t)}{C} = E \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

Cette relation doit être connue par cœur, ainsi que l'allure de la réponse indicielle, représentée sur la Figure 21.

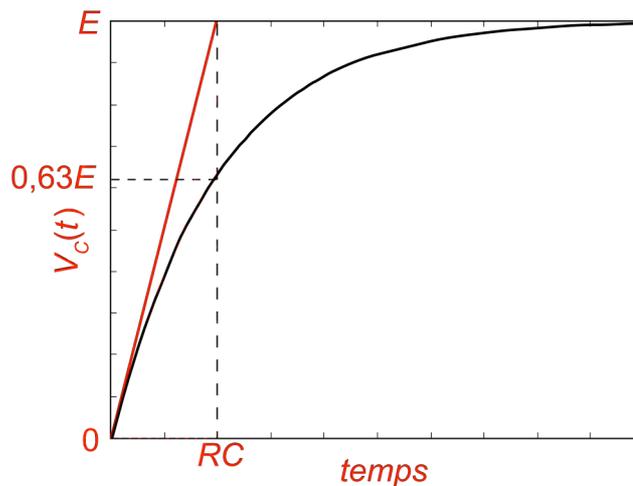


Figure 21

On vérifiera que la tangente à l'origine intercepte l'asymptote au temps  $t = \tau$  : cela constitue une méthode expérimentale de détermination de la constante de temps d'un processus linéaire du premier ordre. On vérifiera également que la tension aux bornes du condensateur atteint 63% de sa valeur finale au bout du temps  $\tau$ , *quelle que soit cette valeur finale*.

#### En résumé

Le temps nécessaire pour charger un condensateur de capacité  $C$ , à travers une résistance  $R$ , sous une tension constante, est de l'ordre de  $RC$ , *indépendamment de la tension sous laquelle on le charge*.

#### 5.1.2. Point de vue fréquentiel : réponse harmonique d'un filtre $RC$ passe-bas du premier ordre

Nous considérons le même circuit (Figure 20), soumis à présent à une tension  $E(t)$  sinusoïdale, supposée établie depuis un temps « infini », c'est-à-dire depuis un temps très grand devant la constante de temps  $\tau$  du circuit.

### 5.1.2.1. Gain complexe d'un filtre RC passe-bas du premier ordre

Comme précédemment, la solution comprend un terme transitoire en  $\exp(-t/\tau)$ , qui est négligeable puisque  $t \gg \tau$ . Le seul terme est donc celui de régime forcé ; la tension appliquée étant de la forme  $E(t) = E \exp(j\omega t)$ <sup>1</sup>, la solution est de la forme

$$Q(t) = A \exp(j\omega t)$$

où  $A$  est un nombre complexe. Reportant cette expression dans l'équation (1)

$$E(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

il vient

$$E \exp(j\omega t) = RAj\omega \exp(j\omega t) + \frac{A}{C} \exp(j\omega t)$$

soit encore

$$A = \frac{CE}{1 + j\omega\tau}$$

La tension aux bornes du condensateur a donc pour expression

$$V_c(t) = \frac{E}{1 + j\omega\tau} \exp(j\omega t) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} E(t)$$

On définit le gain complexe, noté  $G(j\omega)$  :

$$G(j\omega) \equiv \frac{V_c(t)}{E(t)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

#### Remarque

On peut aussi établir l'expression du gain complexe en utilisant les impédances des composants. En effet, le circuit représenté sur la Figure 20 est un pont d'impédances ; en posant  $Z_1 = R$  et  $Z_2 = 1 / jC\omega$ , et en appliquant la formule du pont d'impédances, on obtient :

$$V_c(t) = E(t) \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = E(t) \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = E(t) \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

On retrouve bien l'expression du gain complexe.

---

<sup>1</sup> La notation complexe des grandeurs sinusoïdales étant considérée comme acquise, on utilisera ici la même notation pour une grandeur  $X(t)$  et pour sa représentation complexe  $X \exp(j\omega t)$ . Dans tout le cours, pour éviter les confusions avec les courants, fréquemment notés  $i$ , on utilise la notation  $j$  pour désigner le nombre imaginaire pur unité ( $j^2 = -1$ ).

### 5.1.2.2. Diagramme de Bode : définition et propriétés

Le diagramme de Bode du gain complexe d'un système linéaire représente l'évolution du gain en fonction de la fréquence ; il est composé de deux parties :

- Un diagramme qui présente le module du gain (en décibels) en fonction du logarithme décimal de la pulsation.
- Un diagramme qui présente la phase du gain (généralement en degrés) en fonction du logarithme décimal de la pulsation.

#### Définition (à connaître par cœur)

Lorsqu'il est exprimé en décibels, le module du gain  $|G(j\omega)|$  vaut  $20 \log |G(j\omega)|$ , où  $\log$  désigne le logarithme *décimal*.

Cette représentation présente plusieurs intérêts :

- Très fréquemment, le gain complexe d'un système linéaire peut se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont factorisés :

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^N (1 + j\omega\tau_i)}{(j\omega)^Z \prod_{j=1}^{D-Z} (1 + j\omega\tau_j)} \quad (2)$$

où

- $K$  est le *gain statique*, ainsi nommé parce que  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K$  si  $Z = 0$
- $D$  (degré du dénominateur) est appelé l'ordre du système.
- $N < P$  si le modèle utilisé représente un processus *strictement physiquement réalisable* (voir le premier chapitre du cours de commande de processus)

Si le gain complexe est de cette forme, et s'il est exprimé en décibels, les contributions de chacun des termes du produit au numérateur s'additionnent, et les contributions de chacun des termes du produit au dénominateur se retranchent des précédentes.

Pour tracer le diagramme de Bode de n'importe quel gain complexe mis sous la forme précédente, il suffit

donc de savoir tracer les diagrammes de Bode de quatre fonctions :  $1 + j\omega\tau$ ,  $\frac{1}{1 + j\omega\tau}$ ,  $\frac{1}{j\omega\tau}$ ,  $j\omega\tau$ .

- En réalité, le tracé est encore simplifié par le fait que l'on peut se contenter, avec une bonne approximation, de tracer le *diagramme de Bode asymptotique*, c'est-à-dire d'approcher le diagramme de Bode exact par ses asymptotes.

#### Remarque

Le gain complexe du filtre RC passe-bas du premier ordre est bien de la forme (2), avec  $K = 1$ ,  $N = 0$ , et  $D = 1$ . Le modèle est d'ordre 1, comme nous l'avons vu dans l'étude temporelle (section 5.1.1), et il représente un processus strictement physiquement réalisable.

#### 5.1.2.3. Diagramme de Bode d'un filtre RC passe-bas du premier ordre (à connaître par cœur)

Deux propriétés résultent de la remarque précédente :

##### Propriété

Un filtre passe-bas du premier ordre est caractérisé par deux paramètres : son gain statique et sa constante de temps.

##### Propriété

Le gain statique d'un filtre RC passe-bas du premier ordre est égal à 1, et sa constante de temps est égale à  $RC$ .

Comme indiqué dans la section précédente, on commence toujours par tracer le *diagramme de Bode asymptotique* du gain complexe (si celui-ci est sous la forme (2)), ce qui permet d'obtenir de manière immédiate l'allure du diagramme. Le diagramme asymptotique est obtenu en cherchant les limites du module et de la phase du gain complexe aux très basses fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ) et aux très hautes fréquences ( $\omega \rightarrow +\infty$ ).

Rappelons l'expression du gain complexe d'un filtre passe-bas du premier ordre :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \text{ avec } \tau = RC.$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}} ; \text{ phase}[G(j\omega)] = -\text{Arctg}(\omega\tau)$$

- *Basses fréquences* :  $\omega\tau \ll 1$  :  $\lim_{\omega\tau \rightarrow 0} |G(j\omega)| = 1$  ; le module du gain tend donc asymptotiquement vers  $20 \log(1) = 0$  dB ; la phase tend vers  $0^\circ$ .
- *Hautes fréquences* :  $\omega\tau \gg 1$  :  $G(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega\tau}$  ; le module du gain est donc  $-20 \log(\omega\tau) = -20 \log(\omega) - 20 \log(\tau)$ . En conséquence, l'asymptote est une droite
  - de pente  $-20$  dB/décade (c'est-à-dire que le gain diminue de  $20 \log(10) = 20$  dB lorsque la pulsation est multipliée par 10) ou  $-6$  dB/octave (le gain diminue de  $20 \log(2) \approx 6$  lorsque la fréquence augmente d'une octave, c'est-à-dire lorsqu'elle est multipliée par 2)
  - coupant l'axe 0 dB à la pulsation  $\omega = 1/\tau$ .

La phase vaut  $-\pi/2 = -90^\circ$  pour  $\omega \rightarrow +\infty$ . Elle vaut  $-45^\circ$  pour  $\omega = 1/\tau$ . Une bonne approximation consiste à considérer que la phase varie linéairement de  $0^\circ$  pour  $\omega = 1/(10\tau)$  à  $-90^\circ$  pour  $\omega = 10/\tau$ .

On retiendra enfin que, pour  $\omega = 1/\tau$ , le gain complexe vaut  $\frac{1}{1+j}$  : le module du gain vaut  $20 \log(1/\sqrt{2}) \approx -3$  dB : il est à 3 dB en dessous du gain statique. La pulsation  $1/\tau$  est la *pulsation de coupure* ; la fréquence  $1/(2\pi\tau)$  est la *fréquence de coupure*.

La Figure 22 présente le diagramme asymptotique et le diagramme exact. On observera que le diagramme asymptotique constitue une très bonne approximation du diagramme exact ; elle est fréquemment suffisante. Si l'on a besoin du diagramme réel, il suffit d'avoir recours à l'un des nombreux logiciels qui permettent le calcul et le dessin automatiques du diagramme de Bode.

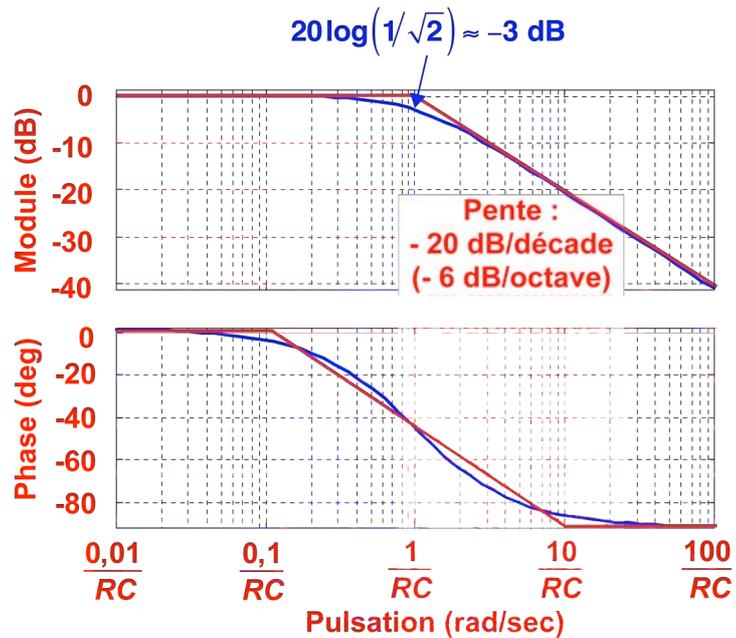


Figure 22

**Remarque très importante 1**

Le diagramme asymptotique d'un filtre passe-bas du premier ordre doit être connu par cœur, et les calculs nécessaires pour l'établir doivent pouvoir être retrouvés sans hésitation.

**Remarque très importante 2**

Le diagramme de Bode de tout système dont le gain complexe s'écrit

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \quad (3)$$

(gain statique  $K$  et constante de temps  $\tau$ ) se déduit du précédent par une translation verticale de  $20 \log(K)$  pour le diagramme de gain, le diagramme de phase restant identique.

De même, si la mise en équation d'un circuit, ou d'un système physique quelconque, conduit à un gain complexe de la forme

$$G(j\omega) = \frac{K}{a + j\omega\tau}$$

il est commode de se ramener à la forme (3)  $G(j\omega) = \frac{K/a}{1 + j\omega(\tau/a)}$ , ce qui

montre immédiatement que le gain statique vaut  $K/a$  et la constante de temps  $\tau/a$ .

Les considérations précédentes justifient le terme de « filtre » : d'un point de vue fréquentiel, le circuit RC que nous venons d'étudier laisse passer, sans les atténuer, les signaux de basse fréquence ( $\omega\tau \ll 1$ ), et il atténue l'amplitude des signaux de haute fréquence ( $\omega\tau \gg 1$ ) : il « filtre » donc les hautes fréquences.

### 5.1.3. Dualité temps-fréquence

Les points de vue temporel et fréquentiel expriment deux aspects du même phénomène physique. En électronique, en commande de processus, mais aussi en optique, en acoustique, en mécanique, en traitement du signal, et dans bien d'autres domaines, il est très important de pouvoir passer d'un point de vue à l'autre sans hésitation, car cela permet des raisonnements qualitatifs, et l'établissement d'ordres de grandeur qui sont extrêmement utiles.

Les points de vue temporel et fréquentiel sont liés entre eux par la *transformée de Fourier*. Celle-ci sera étudiée en détail dans le cours de traitement du signal. Elle établit que, sous certaines conditions peu restrictives, *tout signal peut être décomposé en une somme infinie de sinusoïdes, dont les amplitudes constituent le « spectre de Fourier » du signal.*

Supposons que le signal étudié soit un échelon. Sa transformée de Fourier contient certainement de très hautes fréquences, puisque ce signal varie très vite à l'instant initial ; il contient aussi certainement des fréquences très basses, puisque ce signal reste constant, après sa variation infiniment rapide. Pour trouver la réponse indicielle du circuit RC que nous avons étudié, on peut décomposer ce signal en sinusoïdes, et considérer l'effet de ce filtre sur ces sinusoïdes. Le système étudié étant linéaire, on peut ensuite reconstituer le signal temporel en faisant la somme des sinusoïdes qui sortent du filtre.

Appliquons ce principe au circuit RC étudié ici : c'est un filtre passe-bas, qui laisse intactes les sinusoïdes de basse fréquence, mais atténue les sinusoïdes de haute fréquence. Le spectre de Fourier du signal obtenu à la sortie du filtre est donc plus pauvre en hautes fréquences que l'échelon initial ; en revanche, il est aussi riche en basses fréquences ; en conséquence, le signal de sortie contient une partie constante, mais il ne peut plus varier infiniment vite à l'instant initial, car son contenu en hautes fréquences est devenu insuffisant. C'est bien ce que l'on observe sur la Figure 21 : *l'exponentielle de charge du condensateur n'est autre qu'un échelon de tension « ramolli » par le filtrage de ses hautes fréquences.*

La dualité temps-fréquence permet, de manière équivalente, de prévoir l'allure de la réponse indicielle d'un système, aux temps longs et aux temps courts, à partir du gain complexe : dans le filtre RC passe-bas du premier ordre, le gain complexe vaut 1 aux basses fréquences, ce qui signifie que la réponse *aux temps longs* ( $t \gg \tau$ ) est identique à la sollicita-

tion, c'est-à-dire constante. D'autre part, le gain complexe décroît à raison de 20 dB/décade en haute fréquence, ce qui est caractéristique du comportement fréquentiel d'un intégrateur (voir annexe), ce qui signifie que la réponse indicielle *aux temps courts* ( $t \ll \tau$ ) est semblable à celle d'un intégrateur. Cela se justifie facilement en considérant l'équation différentielle qui régit le filtre

$$RC \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = E(t).$$

Aux temps courts, la tension de sortie  $V_c(t)$  est très petite (nulle à  $t = 0$ ), donc le second terme de la somme est très petit devant le premier :  $V_c(t)$  est donc proportionnelle à l'intégrale de la tension d'entrée  $E(t)$ . Le système se comporte donc bien comme un intégrateur aux temps courts.

De manière générale, il est important d'avoir bien assimilé les équivalences suivantes, qui sont vraies quelle que soit la nature (électronique, mécanique, acoustique, optique, chimique, biologique, ...) du système linéaire étudié.

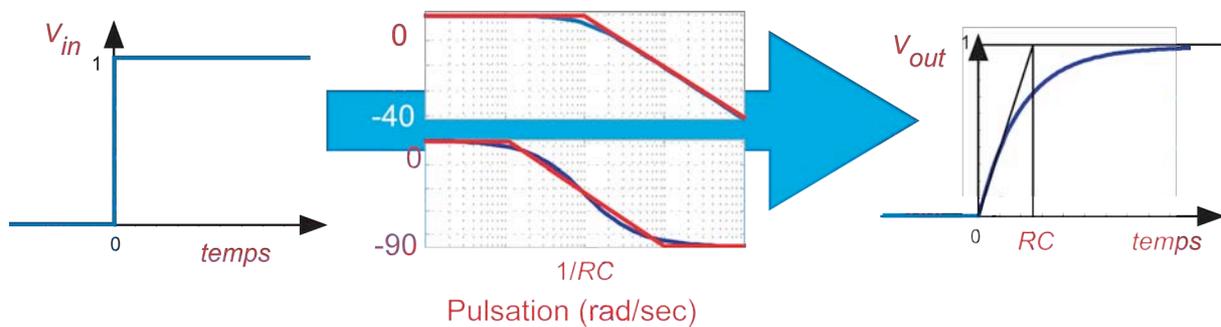
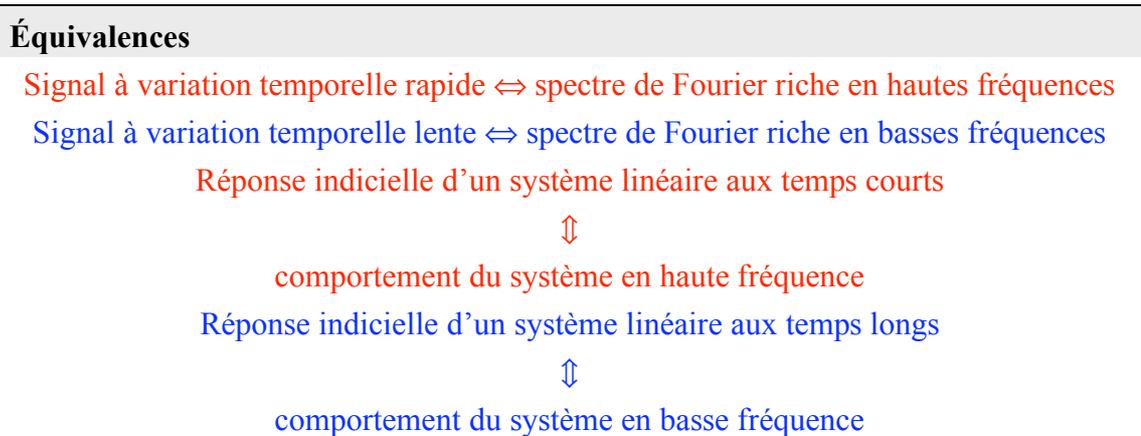


Figure 23

## 5.2. Filtre RC passe-haut du premier ordre

La Figure 24 présente le filtre RC passe-haut constitué d'une résistance et d'un condensateur. Comme dans le cas du filtre RC passe-bas, le phénomène physique est la charge d'un condensateur à travers une résistance ; mais, cette fois, le signal de sortie  $V_{out}(t)$  n'est pas la tension aux bornes du condensateur, mais la tension  $V_R(t)$  aux bornes de la résistance.

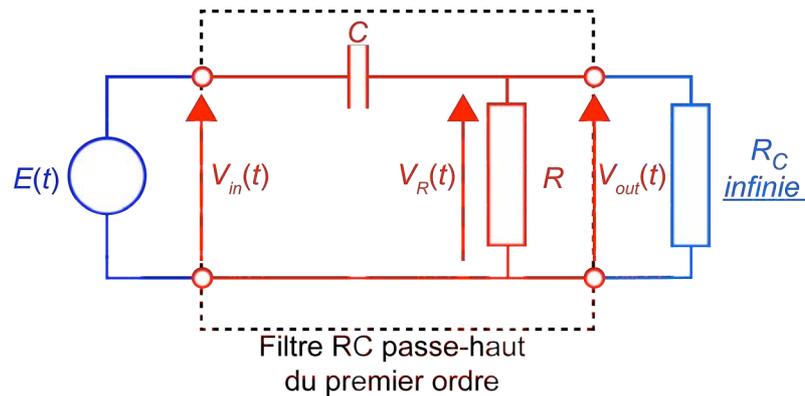


Figure 24

### 5.2.1. Point de vue temporel : réponse indicielle d'un filtre RC passe-haut du premier ordre

On cherche à présent la réponse temporelle  $V_R(t)$  à un échelon  $E(t) = EH(t)$ .

Reprenons l'équation (1) :

$$EH(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

dont on a établi la solution générale dans la section 5.1.1

$$Q(t) = CE \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

On s'intéresse cette fois à la tension aux bornes de la résistance

$$V_R(t) = R \frac{dQ(t)}{dt}$$

d'où la solution recherchée :

$$V_R(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Cette relation doit être connue par cœur, ainsi que l'allure de la réponse indicielle, représentée sur la Figure 25.

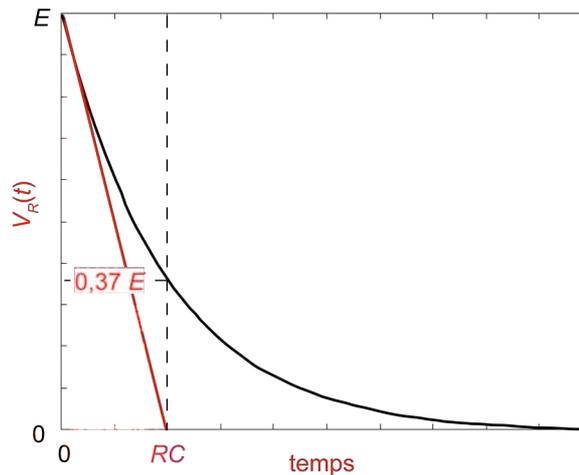


Figure 25

**En résumé**

Le temps nécessaire pour décharger un condensateur de capacité  $C$ , chargé initialement sous une tension  $E$ , à travers une résistance  $R$ , est de l'ordre de  $RC$ , *indépendamment de sa charge initiale*.

**Remarque importante**

On observe

- d'une part, que la tension  $V_R$  subit une variation discontinue à  $t = 0$ ,
- d'autre part, que cette variation est *synchrone* avec la variation de la tension d'entrée.

Le fait que la variation de  $V_R$  soit discontinue n'est pas choquant, puisque la tension d'entrée  $E(t)$  varie elle-même de manière discontinue. En revanche, le fait que la réponse soit *instantanément* identique à la sollicitation pose un problème : ce modèle ne semble pas être causal. Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante.

### 5.2.2. Point de vue fréquentiel : réponse harmonique d'un filtre $RC$ passe-haut du premier ordre

#### 5.2.2.1. Gain complexe d'un filtre $RC$ passe-haut du premier ordre

Nous avons montré, dans la section 5.1.2.1, que la charge portée par le condensateur, en régime sinusoïdal permanent ( $E(t) = E \exp(j\omega t)$ ), est de la forme

$$Q(t) = \frac{CE}{1 + j\omega\tau} \exp(j\omega t)$$

On s'intéresse à présent à la tension aux bornes de la résistance

$$V_R(t) = R \frac{dQ(t)}{dt}$$

qui a donc pour expression

$$V_R(t) = E \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \exp(j\omega t).$$

Le gain complexe du filtre est donc

$$G(j\omega) \equiv \frac{V_R(t)}{E(t)} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

### 5.2.2.2. Diagramme de Bode d'un filtre RC passe-haut du premier ordre

Comme indiqué dans la section 5.1.2.2, il est commode de construire le diagramme de Bode asymptotique lorsque le gain complexe est sous la forme de la relation (2)

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^N (1 + j\omega\tau_i)}{(j\omega)^Z \prod_{j=1}^{D-Z} (1 + j\omega\tau_j)}$$

ce qui est le cas ici :  $K = 1$ ,  $Z = 0$ ,  $N = 1$ ,  $D = 1$ .

En effet, les contributions des différents termes sont additives.

La contribution du terme  $\frac{1}{1 + j\omega\tau}$  a été étudiée dans la section

5.1.2.3. Il reste donc à étudier la contribution du terme  $j\omega\tau$  :

- son module vaut  $\omega\tau$  : il est représenté par une droite de pente +20dB / décade dans le diagramme de gain ;
- sa phase vaut +90° : elle est représentée par une horizontale.

Le diagramme de Bode est la somme des deux contributions, comme indiqué sur la Figure 26.

#### Remarque importante

On observe

- sur la relation (2), que la condition  $N < D$  pour que le modèle soit strictement physiquement réalisable n'est pas satisfaite,
- que la réponse indicielle varie de manière instantanée, et synchrone avec la sollicitation,
- sur le diagramme de Bode, que la phase est positive quelle que soit la fréquence, ce qui signifie que le signal de sortie est toujours *en avance* sur le signal d'entrée : ceci viole évidemment la causalité.

Ces trois observations sont liées entre elles. Elles résultent du fait que la description du circuit RC que nous utilisons est un modèle insuffisamment précis de la réalité physique. Nous reviendrons sur ce point dans la section 5.2.5

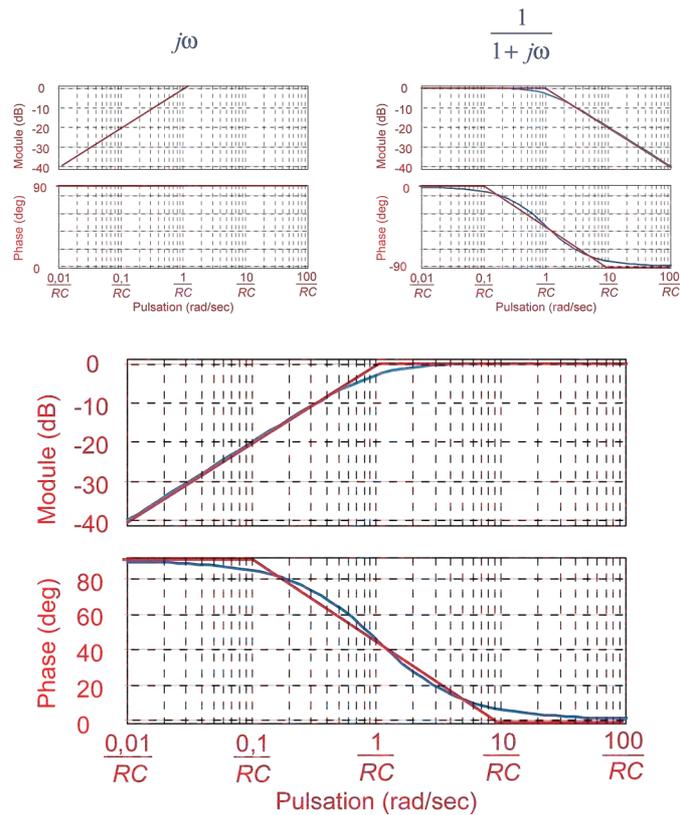


Figure 26

Ce diagramme est bien celui d'un filtre passe-haut : les hautes fréquences ( $\omega\tau \gg 1$ ) sont transmises sans atténuation par le filtre, alors que les basses fréquences ( $\omega\tau \ll 1$ ) sont atténuées.

### 5.2.3. Dualité temps-fréquence

On peut effectuer, à propos du filtre  $RC$  passe-haut, une analyse analogue à celle qui a été présentée pour le filtre passe-bas.

Les hautes fréquences n'étant pas affectées par le filtre, le signal de sortie varie très vite ; en revanche, les basses fréquences étant atténuées, le signal de sortie ne peut pas rester constant. C'est bien ce que l'on observe sur la réponse indicielle, qui « suit » très bien l'échelon aux temps courts, mais qui décroît ensuite exponentiellement et devient nulle aux temps longs. On retrouve bien les équivalences indiquées dans la section 5.1.3.

### 5.2.4. Animation et *exercices corrigés* sur les filtres :

<http://www.webphysique.fr/Filtrage-lineaire-d-un-signal.html>

### 5.2.5. Validité du modèle

Comme indiqué plus haut, le fait que le modèle ne soit pas strictement physiquement réalisable (degré du numérateur du gain complexe non strictement inférieur au degré de dénominateur), le fait que la réponse in-

dicieuse varie instantanément et de manière synchrone avec l'échelon de tension, et le fait que, en régime permanent, la sortie soit en avance de phase par rapport à l'entrée, sont trois symptômes du même problème : le modèle du circuit contient une approximation dont les conséquences violent le principe de causalité.

Dans le cas du filtre étudié ici, cette approximation est la suivante : pour relier les bornes de la résistance à une armature du condensateur d'une part, et à une borne de la source de tension d'autre part, il faut nécessairement des connexions (fils conducteurs si le montage est réalisé en composants discrets, pistes en cuivre si les composants sont implantés sur un circuit imprimé, pistes sub-micrométriques en aluminium ou en silicium s'il s'agit d'un circuit intégré). Ces connexions ont certainement une résistance, faible mais non nulle, et il existe nécessairement entre elles une capacité, également faible mais non nulle (typiquement de l'ordre d'une fraction de pF). De plus, le générateur a certainement une résistance interne.

La Figure 27 représente un modèle plus réaliste du filtre passe-haut, où  $r$  modélise la somme de la résistance interne du générateur et de la résistance des connexions, et où  $c$  modélise la capacité parasite due aux connexions ( $r \ll R$ ,  $c \ll C$ ).

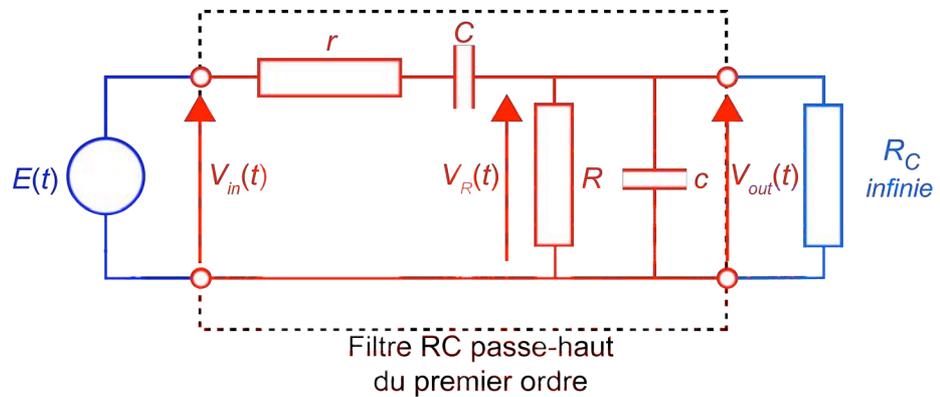


Figure 27

Soient  $Z_1$  l'impédance du circuit constitué de  $r$  et  $C$  en série, et  $Z_2$  l'impédance du circuit constitué de  $R$  et  $c$  en parallèle :

$$Z_1 = r + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jrC\omega}{jC\omega} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{R/jc\omega}{R + 1/jc\omega} = \frac{R}{1 + jRc\omega}$$

En appliquant la formule du pont d'impédances  $V_R(t) = E(t) \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$ , on obtient

l'expression suivante pour le gain complexe :

$$G(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 - rcRC\omega^2 + j[(r+R)C + Rc]\omega} \approx \frac{jRC\omega}{1 - rcRC\omega^2 + jRC\omega}$$

On observe que le degré du numérateur est à présent strictement inférieur au degré du dénominateur, ce qui signifie que le modèle considéré est strictement physiquement réalisable. Ceci se reflète sur le diagramme de Bode (Figure 28) : tracé pour  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$  (soit  $RC = 1 \text{ ms}$ ),  $r = 1 \text{ }\Omega$ ,  $c = 1 \text{ pF}$  (soit  $rc = 1 \text{ ps}$ ), on observe que la phase n'est plus positive à toutes les fréquences.

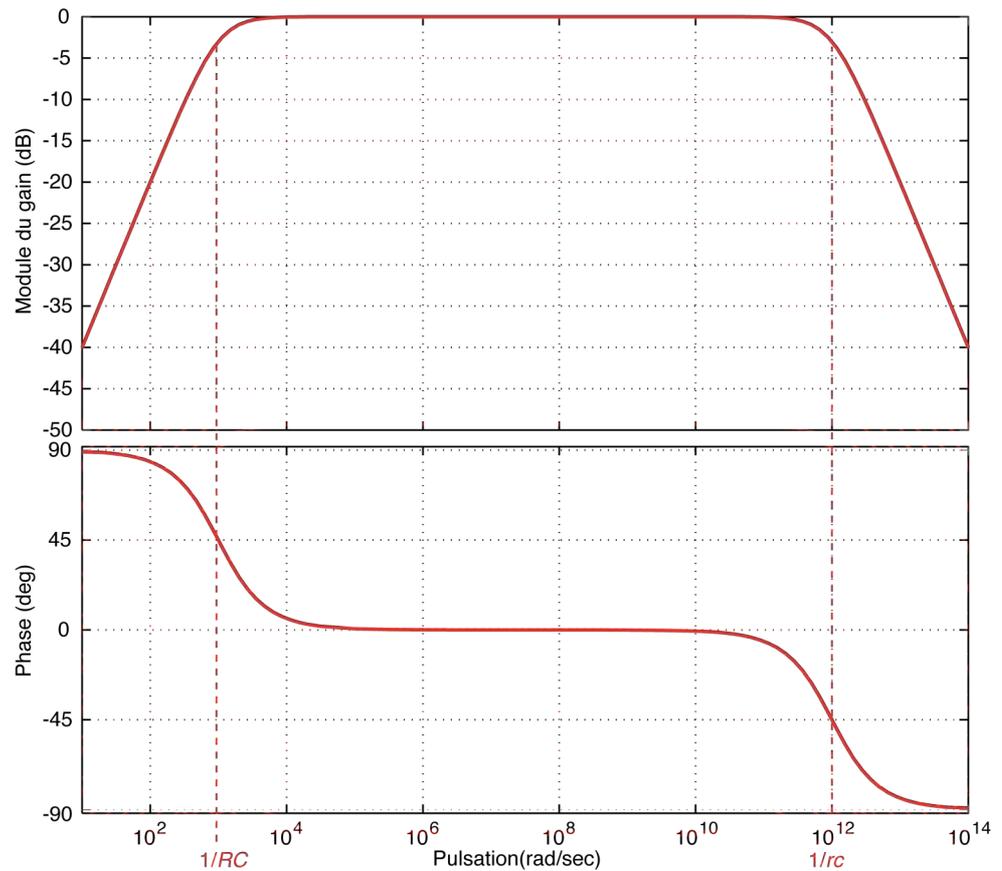


Figure 28

On observe également que le diagramme de Bode du modèle « naïf » (Figure 26) est une très bonne approximation du diagramme de Bode du modèle physiquement réalisable pour toutes les pulsation petites devant  $1/rc$ , c'est-à-dire dans une très grande gamme de fréquence. Les différences entre le comportement du modèle naïf et celui du modèle physiquement réalisable ne sont observables qu'en haute fréquence, ou, de manière équivalente, aux temps courts (petits devant  $rc$ ).

La Figure 29 montre la réponse du filtre (en bleu) à une sinusoïde de pulsation  $\omega = 100$  rad/sec et d'amplitude unité, commençant à  $t = 0$  (en rouge) ; la réponse est observée aux temps « longs », c'est-à-dire grands devant  $rc$ , et de l'ordre de grandeur de quelques  $RC$  (on rappelle que  $RC = 1$  ms). Si l'on fait abstraction de la première demi-période, qui n'est manifestement pas sinusoïdale, on observe une réponse de même fréquence que l'excitation et qui est apparemment en avance de phase par rapport à l'excitation ; on peut vérifier que le déphasage vaut  $+45^\circ$ , comme prévu par le diagramme de Bode. L'amplitude de la réponse est dix fois plus faible que celle de l'excitation, ce qui est aussi en accord avec le diagramme de Bode qui indique que le module du gain vaut  $-20$  dB.

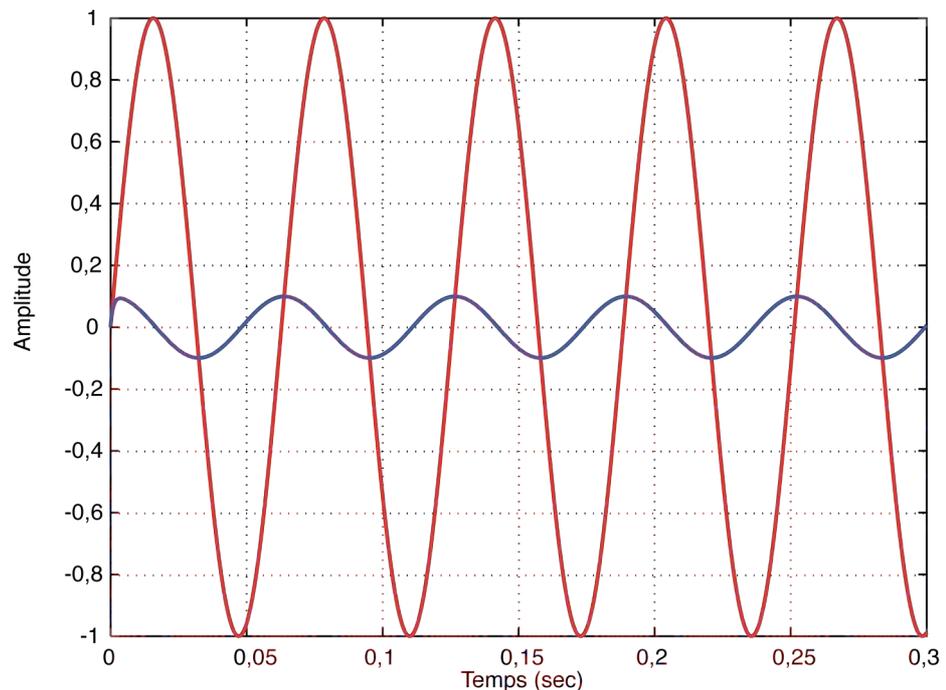
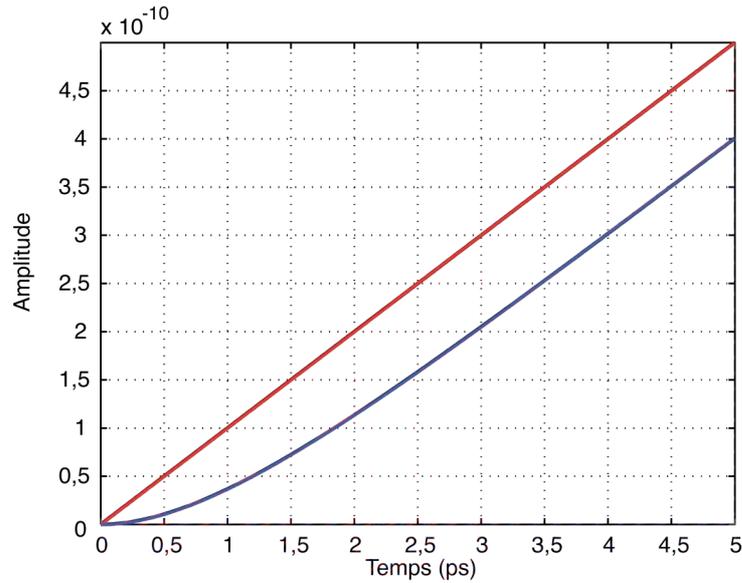


Figure 29 ( $RC = 1$  ms,  $rc = 1$  ps)

La Figure 30 montre la réponse (en bleu) à la même excitation (en rouge), observée cette fois aux temps « courts », c'est-à-dire petits devant  $RC$  et de l'ordre de quelques  $rc$ . On observe que la réponse est bien en retard sur l'excitation. La réponse ressemble à celle d'un filtre passe-bas du premier ordre de constante de temps  $rc = 1$  ps à une rampe de tension. Le modèle physiquement réalisable n'est donc réellement utile que si l'on s'intéresse à la réponse harmonique en haute fréquence, ou à la réponse indicielle aux temps courts. Si ce n'est pas le cas, la précision du modèle « naïf » est largement suffisante. L'explication physique de ce comportement est indiquée dans la remarque ci-dessous.

Figure 30 ( $RC = 1 \text{ ms}$ ,  $rc = 1 \text{ ps}$ )

**Exercice :** en remarquant que le gain complexe du modèle du dérivateur physiquement réalisable peut être mis sous la forme  $G(j\omega) \approx \frac{jRC\omega}{1 - rcRC\omega^2 + jRC\omega} \approx \frac{jRC\omega}{(1 + jRC\omega)(1 + jrc\omega)}$ , tracer le dia-

gramme de Bode asymptotique de  $G(j\omega)$  et retrouver le diagramme de la Figure 28.

#### Interprétation physique

Le fait de mettre la fonction de transfert sous la forme ci-dessus n'est pas simplement un jeu mathématique. Il est justifié physiquement.

À basse fréquence, le module de l'impédance du condensateur  $C$  est très grand devant  $r$  ( $\left| \frac{1}{jC\omega} \right| \gg r$  soit  $\omega \ll \frac{1}{rC} = 10^6 \text{ rad/sec}$ ) et, d'autre part, le module de l'impédance du

condensateur  $c$  est très grand devant  $R$  ( $\left| \frac{1}{jC\omega} \right| \gg R$  soit  $\omega \ll \frac{1}{Rc} = 10^9 \text{ rad/sec}$ ). En

conséquence, pour  $\omega \ll 10^6 \text{ rad/sec}$ , le schéma du circuit peut être mis sous la forme simplifiée représentée sur la Figure 31.

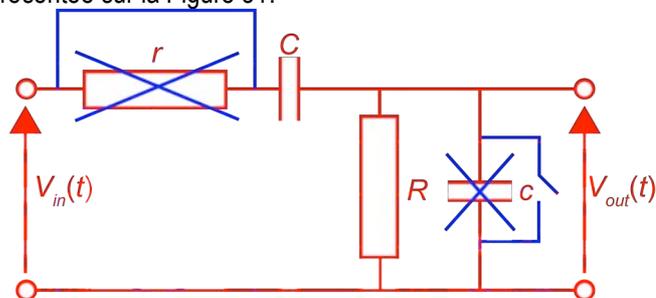


Figure 31

À basse fréquence, c'est-à-dire aux temps longs ( $t \gg 1 \mu\text{s}$ ), le circuit se comporte donc comme un filtre passe-haut du premier ordre de constante de temps  $RC$ . C'est bien ce que l'on observe sur le diagramme de Bode (Figure 28) et sur la réponse à une sinusoïde aux temps longs (Figure 29).

À haute fréquence, le module de l'impédance du condensateur  $C$  est négligeable devant la résistance  $r$  ( $\left| \frac{1}{jC\omega} \right| \ll r$  soit  $\omega \gg \frac{1}{rC} = 10^6 \text{ rad/sec}$ ), et le module de l'impédance du condensateur  $c$  est négligeable devant la résistance  $R$  ( $\left| \frac{1}{jC\omega} \right| \ll R$  soit  $\omega \gg \frac{1}{Rc} = 10^9 \text{ rad/sec}$ ). En conséquence, pour  $\omega \gg 10^9 \text{ rad/sec}$ , le schéma du circuit peut être mis sous la forme simplifiée représentée sur la Figure 32.

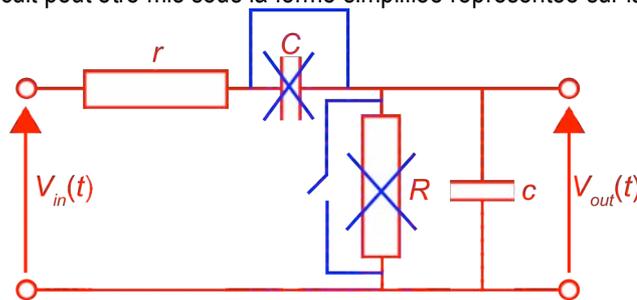


Figure 32

À haute fréquence, c'est-à-dire aux temps courts ( $t \ll 1 \text{ ns}$ ), le circuit se comporte donc comme un filtre passe-bas du premier ordre de constante de temps  $rc$ . C'est bien ce que l'on observe sur le diagramme de Bode (Figure 28) et sur la réponse à une sinusoïde aux temps courts (Figure 30). Cette dernière figure représente la réponse dans un intervalle de temps de 5 ps, intervalle dans lequel une sinusoïde de pulsation 100 rad/sec peut être assimilée à une rampe : la réponse observée est la réponse d'un filtre passe-bas du premier ordre, de constante de temps  $rc$ , à une rampe de tension.

## 6. Schémas équivalents en continu et en régime variable (« alternatif »)

Pour simplifier l'analyse d'un circuit électronique constitué de composants qui sont linéaires, ou qui fonctionnent en régime linéaire, il est généralement indispensable de traiter séparément les grandeurs (courants ou tensions) *continues* et les grandeurs *variables dans le temps* (que l'on appelle, de manière souvent inexacte, « alternatives »).

Pour cela, on établit deux schémas équivalents au schéma initial, qui s'appliquent respectivement aux grandeurs continues et aux grandeurs variables dans le temps, en supposant que le régime permanent est établi. Le « théorème de superposition » autorise ce traitement puisque le circuit est supposé fonctionner en régime linéaire.

### « Schéma équivalent en continu »

Le « schéma équivalent en continu » est obtenu à partir du schéma initial en remplaçant

- les générateurs de tensions variables par des courts-circuits,
- les générateurs de courant variables par des circuits ouverts,
- les condensateurs par des circuits ouverts.

### « Schéma équivalent en régime variable »

Le « schéma équivalent en régime variable » est obtenu à partir du schéma initial en remplaçant

- les générateurs de tensions continues par des courts-circuits,
- les générateurs de courant continus par des circuits ouverts,
- les condensateurs par des courts-circuits.

#### Remarque très importante

Le fait de remplacer les condensateurs par des courts-circuits pour obtenir le schéma équivalent en alternatif est une *approximation*, alors que le fait de remplacer les condensateurs par des circuits ouverts pour obtenir le schéma équivalent en continu est *exact*. En effet, l'impédance d'un condensateur en continu est *infinie* (un condensateur n'est parcouru par aucun courant *continu* en régime permanent), alors que l'impédance d'un condensateur en alternatif ( $1 / jC\omega$ ) n'est nulle qu'à fréquence infinie.

En conséquence, une fois que l'on a analysé le circuit à l'aide d'un schéma équivalent en alternatif obtenu en remplaçant les condensateurs par des courts-circuits, *il faut s'assurer de la validité de l'approximation* : il faut donc s'assurer que, dans le domaine de fréquence d'utilisation normale du circuit, les impédances des condensateurs sont bien négligeables devant celles des autres composants du circuit.

*Exemple* : on considère le circuit représenté sur la Figure 33, où  $v$  est une tension variable dans le temps et  $V_{CC}$  est une tension continue. On cherche les schémas équivalents en continu et en alternatif. Nous allons effectuer la mise en équation complète, et montrer que le résultat obtenu est bien celui que l'on obtiendrait directement en appliquant les règles indiquées ci-dessus.

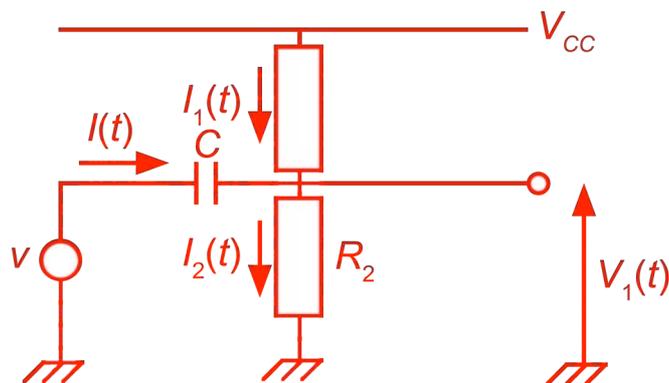


Figure 33

Le circuit étant composé d'éléments linéaires, on peut appliquer le théorème de superposition, donc décomposer chacune des grandeurs en une composante continue, désignée par une lettre majuscule, et une composante variable dans le temps, désignée par une lettre minuscule :

$$V_1(t) = V_1 + v_1$$

$$I(t) = I + i$$

$$I_1(t) = I_1 + i_1$$

$$I_2(t) = I_2 + i_2$$

S'agissant d'un régime permanent, on a  $I = 0$  ; d'autre part, on peut, sans perte de généralité, supposer que la tension  $v$  est sinusoïdale de pulsation  $\omega$  (si ce n'est pas le cas, on peut décomposer  $v$  en ses composantes sinusoïdales en effectuant une transformation de Fourier, comme nous l'avons vu dans la section 5). Le circuit étant linéaire, les tensions et courants variables dans le temps sont sinusoïdaux de pulsation  $\omega$ .

Écrivons les équations qui régissent le circuit :

$$I_1 + i_1 = \frac{V_{CC} - (V_1 + v_1)}{R_1}$$

$$I_2 + i_2 = \frac{V_1 + v_1}{R_2}$$

$$I_2 + i_2 = i + I_1 + i_1$$

$$v_1 - v = \frac{i}{jC\omega}$$

Identifiant les parties constantes et variables dans le temps, il vient

$$I_1 = \frac{V_{CC} - V_1}{R_1} ; I_2 = \frac{V_1}{R_2} ; I_1 = I_2 \text{ pour les grandeurs constantes,}$$

$$i_1 = -\frac{v_1}{R_1} ; i_2 = \frac{v_1}{R_2} ; i_2 = i + i_1 ; v_1 - v = \frac{i}{jC\omega} \text{ pour les grandeurs variables dans le temps.}$$

Si  $\omega \rightarrow \infty$ , ces dernières équations deviennent :  $i_1 = -\frac{v_1}{R_1} ; i_2 = \frac{v_1}{R_2} ; i_2 = i + i_1 ; v_1 = v$ .

*Schéma équivalent en continu* : les équations relatives aux grandeurs constantes décrivent exactement le circuit représenté sur la Figure 34. C'est bien le schéma obtenu en remplaçant le condensateur par un circuit ouvert et la source de tension alternative par un circuit ouvert.

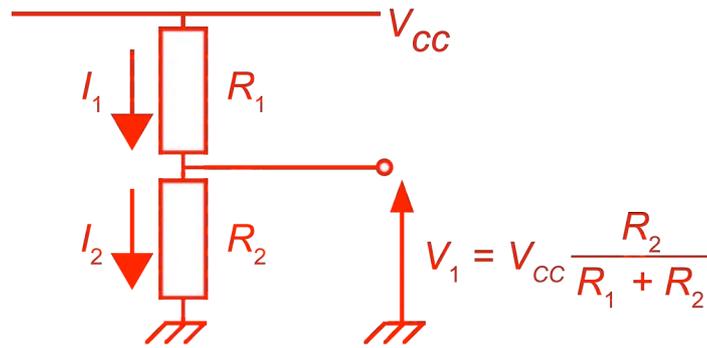


Figure 34

*Schéma équivalent en régime variable (« alternatif »)*: les équations relatives aux grandeurs variables dans le temps décrivent exactement le circuit représenté sur la Figure 35. C'est bien le schéma obtenu en remplaçant le condensateur par un court-circuit et en remplaçant la source de tension continue  $V_{CC}$  par un court-circuit.

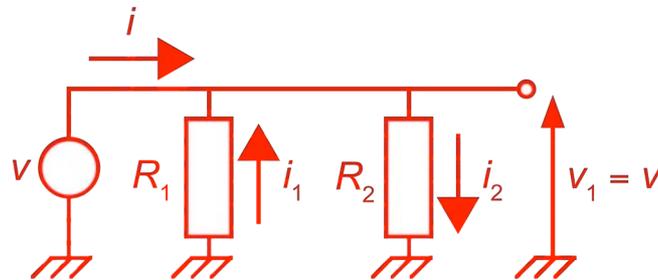


Figure 35

Comme indiqué plus haut, il faut se rappeler que ce dernier schéma est une approximation ; il faut vérifier la validité de cette dernière, c'est-à-dire s'assurer que, dans le domaine de fréquences dans lequel le circuit est utilisé, l'impédance du condensateur est négligeable. Dans l'exemple étudié ici, il faut s'assurer que, dans le domaine de fréquences utilisé, la relation

$$\left| \frac{1}{jC\omega} \right| \ll R_1 // R_2$$

est bien vérifiée. Si ce n'est pas le cas, il faut conserver explicitement le condensateur dans le schéma équivalent, comme indiqué sur la Figure 36.

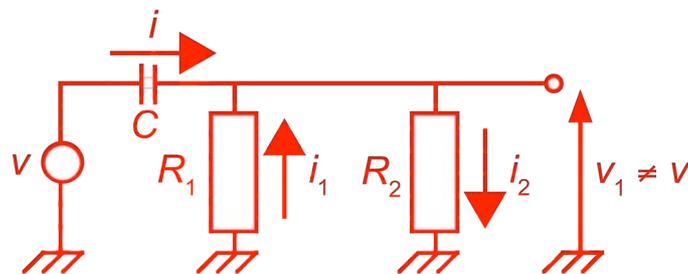


Figure 36

## 7. Annexes

### Diagramme de Bode d'un intégrateur

Un intégrateur de grandeur d'entrée  $x$  (tension, courant ou charge électrique si le système considéré est un circuit électronique) et de grandeur de sortie  $y$  est régi par l'équation

$$y(t) = K \int_{-\infty}^t x(u) du$$

Si la grandeur d'entrée est sinusoïdale, de la forme  $x(t) = x_0 \exp(j\omega t)$ , la grandeur de sortie est sinusoïdale de même fréquence

$$y(t) = \frac{K}{j\omega} x_0 \exp(j\omega t),$$

de sorte que le gain complexe de l'intégrateur est

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

Le module du gain est donc

$$20 \log \frac{|K|}{\omega} = 20 \log |K| - 20 \log \omega$$

et sa phase vaut  $-90^\circ$ , indépendamment de la fréquence.

Le diagramme de Bode de l'intégrateur de gain  $K = 1$  est représenté sur la Figure 37. Le diagramme de Bode de tout intégrateur de gain  $K \neq 1$  se déduit du précédent par une translation verticale, d'amplitude  $20 \log |K|$ , de la courbe du module du gain.

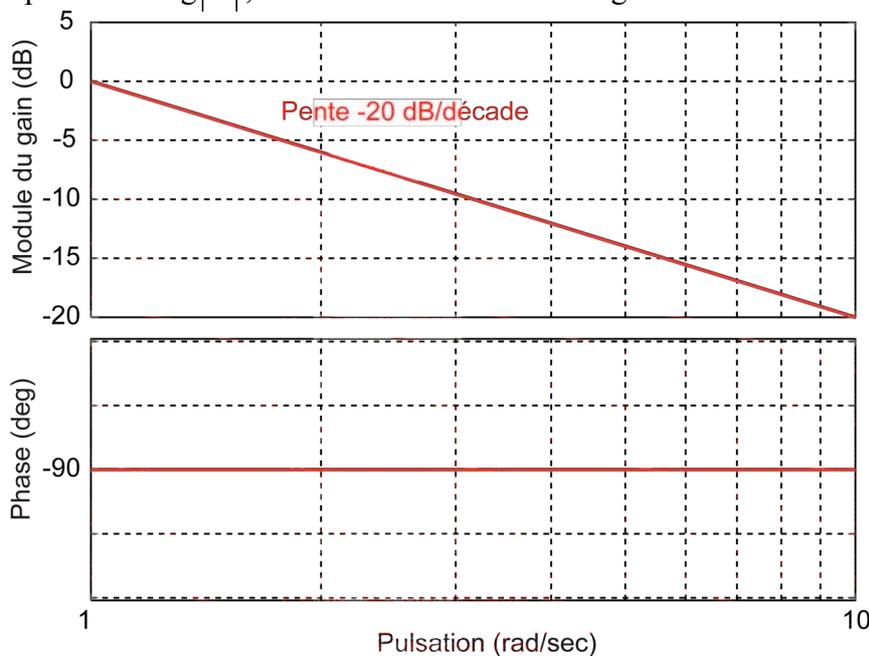


Figure 37

### Diagramme de Bode d'un dérivateur

Par un raisonnement analogue, on montre facilement que le gain complexe d'un dérivateur de gain  $K$  est

$$G(j\omega) = Kj\omega$$

Le module du gain vaut donc  $|K|\omega$ , et la phase vaut  $+90^\circ$  indépendamment de la fréquence.

Le diagramme de Bode d'un dérivateur de gain 1 est représenté sur la Figure 38. Le diagramme de Bode d'un dérivateur de gain  $K$  se déduit de celui-ci par une translation, d'amplitude  $20\log|K|$ , de la courbe du gain.

Rappelons que ce modèle du dérivateur n'est pas strictement physiquement réalisable (section 5.1.2.2).

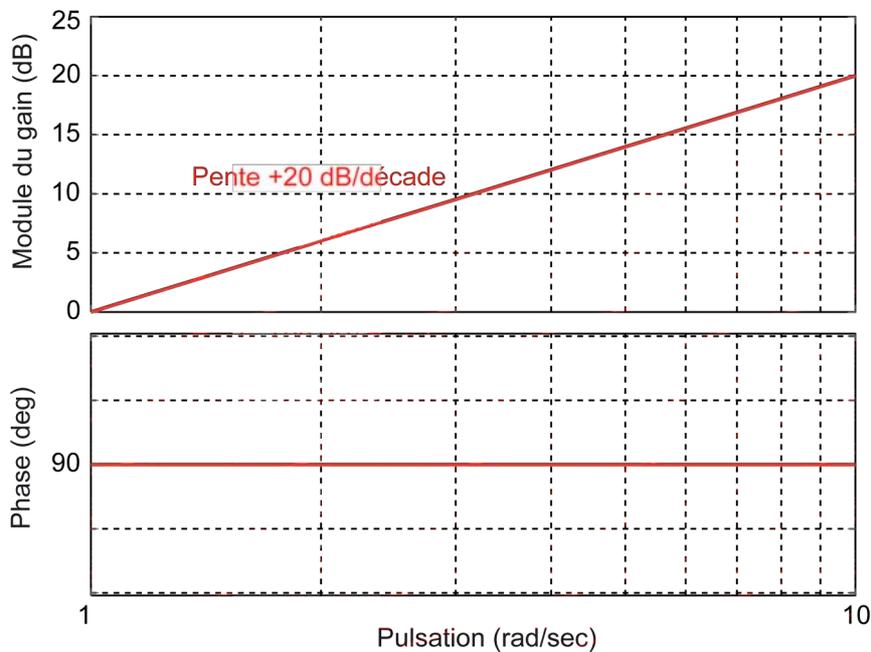


Figure 38

Les quatre diagrammes de base (passe-bas du premier ordre, passe-haut du premier ordre, intégrateur, dérivateur) doivent être connus par cœur, et doivent pouvoir être retrouvés par le calcul sans hésitation.

Tracé du diagramme de Bode asymptotique de  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau(1+j\omega\tau)}$

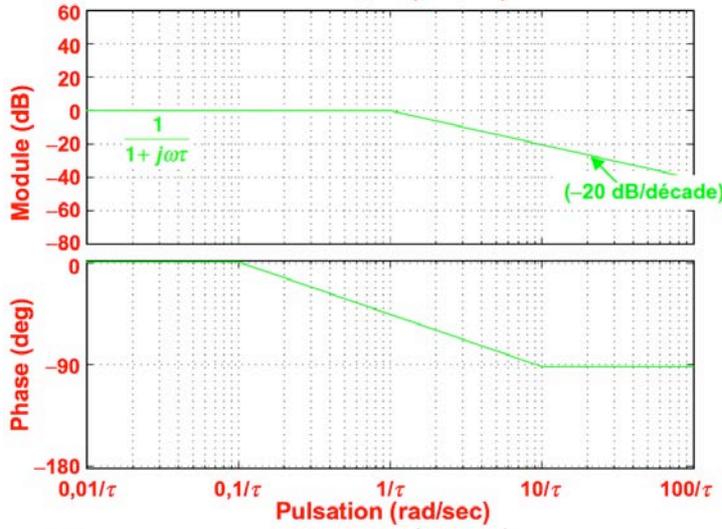


Diagramme asymptotique de  $\frac{1}{1+j\omega\tau}$ .

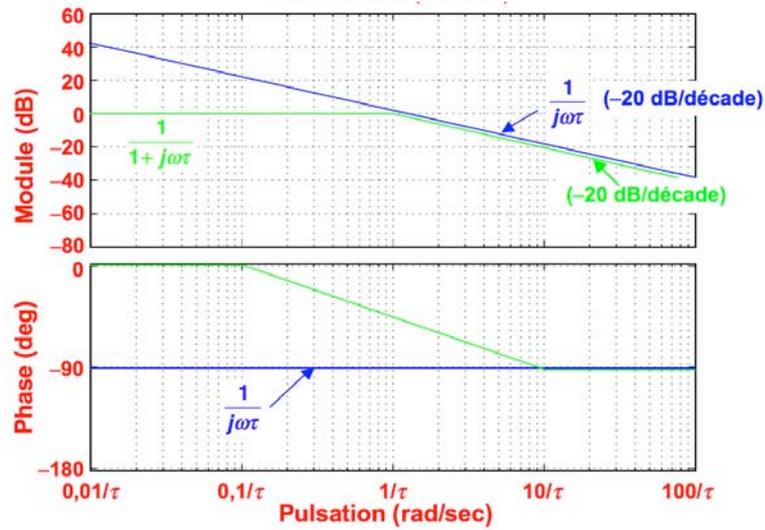


Diagramme asymptotique de  $\frac{1}{j\omega\tau}$ .

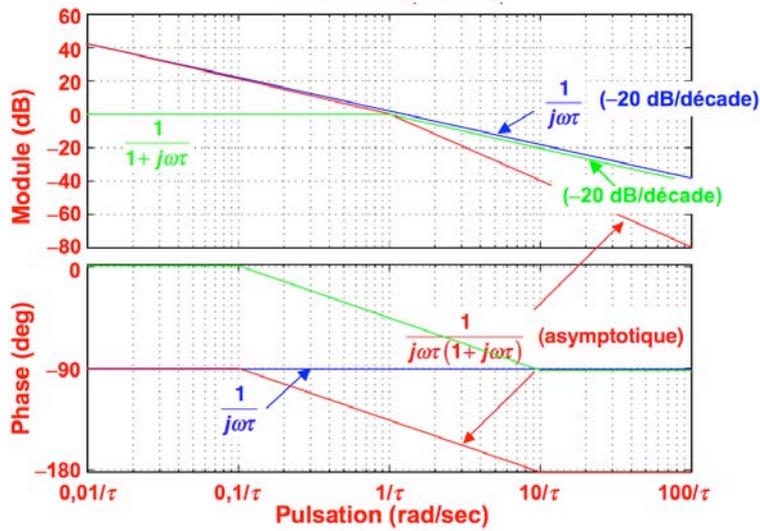


Diagramme asymptotique de  $\frac{1}{j\omega\tau(1+j\omega\tau)}$ .

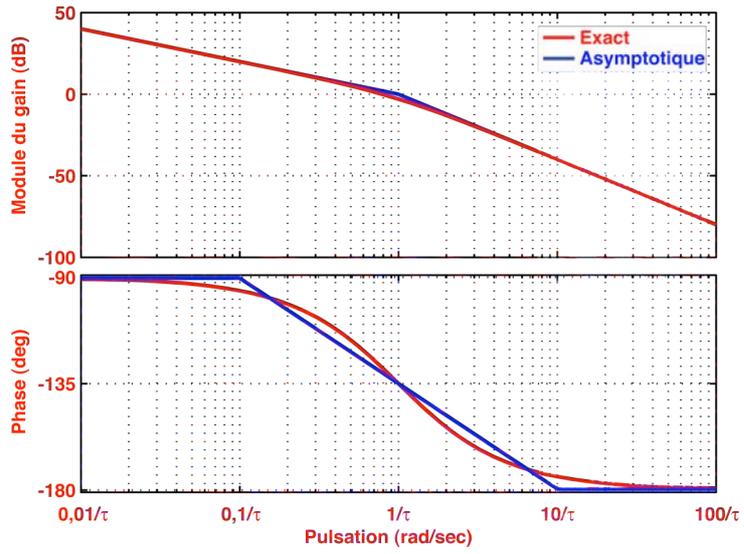


Diagramme asymptotique et diagramme exact.

