PGCD, PPCM
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.
Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 375 et 2070

Exercice n°2.
Si on divise 4 373 et 826 par un même nombre positif b on obtient 8 et 7 pour restes. Déterminer b.

Exercice n°3.
Déterminer le PGCD de 3723 et 6711 12 et 8 3 et 7 12 et 6

Exercice n°4.
1) Deux nombres a et b sont premiers entre eux et leur somme est 24. Déterminer tous les couples (a, b) possibles.
2) Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels tels $x + y = 96$ et $\text{pgcd}(x ; y) = 4$.

Exercice n°5. Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ et font plusieurs tours d'un même circuit.
La voiture A fait le tour du circuit en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.
1) Y-a-t-il des moments (autres que le départ !) où les voitures se croisent sur la ligne de départ ?
2) Préciser le nombre de déplacement par laps de temps .

Exercice n°6. Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.
1) Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur 4,54 m et de largeur 3,75m. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté.
On commence la pose par un coin de la pièce comme le suggère la figure 1.
Calculer le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.
2) Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55 m et de largeur 3,85 m.
On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.
a) Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.
b) Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.
c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine?

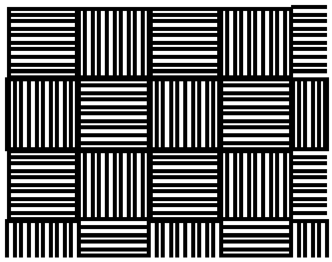
Figure 1

3. On dispose de dalles rectangulaires de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.
a) Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400.
b) Donner la liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400.
c) Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe?

Exercice n°7.
On veut recouvrir une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Quelle est la taille maximale de ces dalles ?

Exercice n°8.
On dispose d'une feuille de papier. On découpe dans cette feuille le plus grand carré possible. Dans le morceau restant, on découpe encore le plus grand carré possible, et ainsi de suite... On continue à découper le plus grand carré possible jusqu'à ce que le morceau restant soit lui-même un carré.
Quelle est la taille du dernier carré si les dimensions de la feuille initiale sont 192 cm sur 84 cm ?
Même question si les dimensions initiales sont deux entiers quelconques

Guesmi.B

PGCD, PPCM
CORRECTION

Exercice n°1
Les diviseurs de 375 sont 1,3,5,15,25,75,125 et 375
Les diviseurs de 2070 sont 1,2,3,5,6,9,15,18,23,30,45,46,69,90,115,138,230,414,690,345,1035,2070
L'ensemble des diviseurs communs à 375 et 2070 est donc 1,3,5,15,138,414,690,2070

Exercice n°2 On écrit les deux division euclidiennes $4373 = b \times q_1 + 8$ et $826 = b \times q_2 + 7$,
donc simultanément $b \times q_1 = 4373 - 8 = 4365$ et $b \times q_2 = 826 - 7 = 819$. b est donc un diviseur commun à 4365 et à 819.
Un rapide examen de la liste des diviseurs des deux nombres permet de conclure que $b = 9$

Exercice n°3 On effectue les divisions euclidiennes successives
$6711 = 3723 \times 1 + 2988$ puis $3723 = 2988 \times 1 + 735$ puis $2988 = 735 \times 4 + 48$ puis $735 = 48 \times 15 + 15$ puis $42 = 15 \times 2 + 12$
puis $15 = 12 \times 1 + \underbrace{3}_{\text{dernier reste non nul}}$ puis $12 = 3 \times 4 + 0$. Le dernier reste non nul étant 3, le PGCD de 6711 et 3723 est 3.

De la même manière, $12 = 8 \times 1 + \underbrace{4}_{\text{dernier reste non nul}}$ puis $8 = 4 \times 2 + 0$. Le dernier reste non nul étant 4, le PGCD de 12 et 8 est 4.

De la même manière, $7 = 3 \times 2 + \underbrace{1}_{\text{dernier reste non nul}}$ puis $3 = 1 \times 3 + 0$. Le dernier reste non nul étant 1, le PGCD de 7 et 3 est 1.

On dit que les nombres sont premiers entre eux.
Enfin, puisque $12 = 6 \times 2 + 0$ 6 divise 12 donc le PGCD de 12 et 6 est 6.

Exercice n°4
1) Parmi les couples d'entiers n'ayant pas de diviseur commun (autre que 1) et dont la somme vaut 24, il y a
$a = 1; b = 23$ $a = 5; b = 19$ $a = 7; b = 17$ $a = 11; b = 13$
2) Si pgcd(x ; y) = 4, alors 4 divise x et y, donc $x = 4n$ et $y = 4m$ où m et n sont des entiers **premiers entre eux** (sinon 4 ne serait pas le pgcd de x et y. Puisque $x + y = 96$, on en déduit donc $4(n+m) = 96 \Leftrightarrow n + m = 24$
Il nous faut donc déterminer les couples d'entiers $(n;m)$ premiers entre eux tels que $n + m = 24$. Ceci ayant été fait dans la question 1), on conclut que $n = 1; m = 23$ ou $n = 5; m = 19$ ou $n = 7; m = 17$ ou $n = 11; m = 13$, donc en multipliant par 4 : $x = 4; y = 92$ ou $x = 20; y = 76$ ou $x = 28; y = 68$ ou $x = 44; y = 52$

Exercice n°5
1) Les voitures se croiseront pour la première fois (depuis le départ) au bout d'un temps égal à PPCM(30,36)
Pour calculer PPCM(30,36), deux solutions sont envisageables :
- soit on calcule PGCD(30 ;36), qui vaut 6 et puisque $PGCD(30;36) \times PPCM(30;36) = 30 \times 36$, on en déduira $PPCM(30;36) = \dfrac{30 \times 36}{6} = 180$
- soit on utilise la décomposition de 30 et 36 en produits de facteurs premiers, à savoir $30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$ et $36 = 2^2 \times 3^2$, et on calcule, grâce aux maximum des puissances, $PPCM(30;36) = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180$
Les deux voitures se croiseront donc au bout de 180 minutes, soit 5 tours pour la voiture A et 6 tours pour la voiture B.
2) Toutes les 180 minutes (3 heures), la voiture A parcourt 5 tours, et la voiture B 6 tours.

Exercice n°6
1) Puisque $454 = 33 \times 13 + 25$ et $375 = 33 \times 11 + 12$, il faut un peu plus de 13 carreaux en longueur et un peu plus de11 carreaux en largeur, donc un nombre de carreaux non coupés égal à $11 \times 13 = 143$
2) a) Les diviseurs de 455 sont 1,5,7,13,35,65,91 et 455. Les diviseurs de 385 sont 1,5,7,11,55,77 et 385
b) L'ensemble des diviseurs communs à 455 et 385 est donc 1,5 et 7.
c) On peut donc utiliser des dalles de côté 7 cm pour carreler la cuisine. Il en faudra 65 en longueur et 55 en largeur.
3) a) La liste des multiples de 24 inférieurs à 400 est 24,48,72,96,120,144,168,192,216,240,264,288,312,336,360 et 384.
La liste des multiples de 15 inférieurs à 400 est :
15,30,45,60,75,90,105,120,135,150,165,180,195,210,225,240,255,270,285,300,315,330,345,360 et 375
b) La liste des multiples communs à 24 et 15, inférieurs à 400 est donc 120,240 et 360.
c) On pourrait donc carreler une pièce carrée de 360 cm (soit 3m60) de côté avec des carreaux de longueur 24 cm et de largeur 15 cm.

Exercice n°7

Il faut déterminer PGCD(361;475). On effectue les divisions euclidiennes successives : $475 = 361\times 1 + 114$ puis $361 = 114\times 3 + \underbrace{19}_{\text{dernier reste non nul}}$ puis $114 = 19\times 6 + 0$. Le dernier reste non nul étant 19, le PGCD de 475 et 361 est 19.

A l'aide de dalles carrées de 19 cm de côté, on peut donc carreler une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m (il faudra 19 dalles en longueur et 25 en largeur, soit un total de 475 dalles en tout.

Exercice n°8

La taille du dernier carré sera PGCD(84 ;192)=12

De manière générale, si on note x et y les dimensions de la feuille initiale, la taille du dernier carré sera PGCD(x ;y).

Guesmi.B