PGCD-PPCM

I-PGCD

1-Définition

Soient a et b deux entiers non nuls.
Un entier naturel qui divise a et qui divise b est appelé diviseur commun à a et b.
L'ensemble des diviseurs communs à a et à b possède un plus grand élément que l'on appelle le plus grand commun diviseur de a et b, on le note PGCD(a ; b).

Exemple

Dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 15 est $\{1 ; 3 ; 5 ; 15\}$
Dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 12 est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$
L'ensemble des diviseurs communs à 12 et à 15 est donc D(12 ; 15) = $\{1 ; 3\}$
On a donc PGCD(15 ; 12) = 3

Remarque

a étant un entier naturel, l'ensemble des diviseurs de a est égal à l'ensemble des diviseurs de -a.
On pourra étendre, si besoin est, la notion de PGCD à des nombres entiers relatifs.
On dira par exemple que PGCD(-15 ; 12) = PGCD(15 ; 12) = 3

2-Propriétés

Soient a et b deux entiers non nuls.

- PGCD(a ; b) $\leq$ a ; PGCD(a ; b) $\leq$ b ;
- PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a)
- Si b divise a, alors PGCD(a ; b) = b ou -b , en particulier PGCD(a ; 1) = 1 et PGCD(a ; a) = a

Exemple

6 est un diviseur de 18 donc PGCD(6 ; 18) = 6

- Soient a et b deux entiers non nuls.

Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b. (On a $a = b \times q + r$)
Alors Si r = 0, PGCD(a ; b) = b
Si $r \neq 0$, PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r)

Exemple

Pour trouver le PGCD de 2414 et 804, on peut écrire la division euclidienne de 2414 par 804
$2414 = 804 \times 3 + 2$
On en déduit alors PGCD(2414 ; 804) = PGCD(804 ; 2)
Il est immédiat que PGCD(804 ; 2) = 2 car 2 divise 804. Donc PGCD(2414 ; 804) = 2

• Propriété - Algorithme d'Euclide

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On définit la suite r_n d'entiers naturels de la façon suivante :

$r_0 = b$; r_1 est le reste de la division euclidienne de a par b
Pour $n \geq 1$: si $r_n = 0$ alors $r_{n+1} = 0$
si $r_n \neq 0$ alors r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n

Alors il existe un entier n_0 tel que $r_{n_0} \neq 0$ et pour tout $n > n_0$, $r_n = 0$

On a PGCD(a ; b) = r_{n_0}

Remarque

En effectuant ainsi des divisions euclidiennes successives: de a par b, puis du diviseur par le reste, ... le premier reste non nul est le PGCD de a et de b. C'est l'algorithme d'Euclide
Suivant les nombres a et b, le nombre d'itérations à effectuer peut être plus ou moins grand.
Sachant que PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a) on aura toujours intérêt à prendre $b \leq a$

Exemple

Pour déterminer le PGCD de 410258 et de 126 écrivons les divisions euclidiennes successives :

$410258 = 126 \times 3256 + 2$

$126 = 2 \times 63 + 0$

Donc PGCD(410258 ; 126) = 2

Pour déterminer le PGCD de 15648 et de 657 écrivons les divisions euclidiennes successives :

$15648 = 657 \times 23 + 537$

$657 = 537 \times 1 + 120$

$537 = 120 \times 4 + 57$

$120 = 57 \times 2 + 6$

$57 = 6 \times 9 + 3$

$6 = 3 \times 2 + 0$

Donc PGCD(15648 ; 657) = 3

- Si b ne divise pas a et si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors PGCD(a,b)=PGCD(b,r)

- PGCD(ka,kb)= IkIPGCD(a,b)

II-PPCM

1-Définition

Soients a et b deux entiers non nuls.
L'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b possède un plus petit élément.
Ce plus petit élément est appelé "plus petit commun multiple" de a et b.
On le note PPCM(a ; b).

Remarque

On a de façon immédiate : PPCM(a ; b) = PPCM(b ; a).=PPCM(IaI,IbI)
Si b est multiple de a, PPCM(a , b) = IbI

2-Propriétés

Soient a et b deux entiers non nuls.

- PGCD(a ; b) divise PPCM(a ; b)
- PGCD(a ; b) $\times$ PPCM(a ; b) = Ia $\times$ bI
- Si a et b sont premiers entre eux, on a PPCM(a ; b) = a $\times$ b
- Si k est un entier non nul, on a PPCM(ka ; kb) = Ik I PPCM(a ; b)
- Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

L'ensemble des multiples communs à a et à b est l'ensemble des multiples de leur PPCM.

Exercices (3ème maths)

Ex 1 :Trouver les couples (a , b) d'entiers naturels tels que $0 < a < b$ dont le PGCD d et le PPCM m vérifient
$2m + 3d = 78$ et tels que a ne soit pas un diviseur de b.

Correction

On peut commencer par remarquer que $d \leq m$ et sont tous deux psitifs

Donc, s'ils vérifie $2m + 3d = 78$ alors on doit avoir $d < 27$.

Si on pose a' et b' définis par : $a = a'.d$ et $b = b'.d$, on sait que, d étant le PGCD de a et b alors a' et b' sont premiers entre eux.

Comme PGCD(a,b).PPCM(a,b) = $a.b$, on en déduit que :

$m = a'.b'.d$

L'équation peut alors s'écrire: $d(2a'.b' + 3) = 78$.

Comme $(2a'.b' +3)$ est impair, d est pair et doit être un diviseur de 78 inférieur à 27.

Donc, $d = 2$ ou 6.

Si $d = 2$ alors $(2a'.b' + 3) = 39$ et $a'.b' = 18$.

Comme a' et b' sont premiers entre eux, on a:

($a' = 1$ et $b' = 18$) ou ($a' = 2$ et $b' = 9$).

D'où ($a = 2$ et $b = 36$) ou ($a' = 4$ et $b' = 18$) (on a $a < b$).

Comme a ne doit pas diviser b, la première solution n'est pas envisageable.

Si $d = 6$ alors $(2a'.b' + 3) = 13$ et $a'.b' = 5$.

D'où $a = 6$ et $b = 30$. Mais a ne doit pas diviser b donc cette solution n'est pas acceptable.

Seule solution {(4 , 18)}

Ex 2 : Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a,b\}$ vérifiant: $m - 18d = 791$ où m est le PPCM et d le PGCD des nombres a et b. (3ème maths)

Correction :

a' et b' sont définis par : $a = a'.d$ et $b = b'.d$

On peut toujours supposer que $a \leq b$.

On sait que a' et b' sont premiers entre eux.

On sait aussi que $m = d.a'.b'$

Alors, $d(a'.b' - 18) = 791$.

d est donc un diviseur de 791. La décomposition de 791 en facteurs premiers est : 791 = 7x133. D'où 4 cas possibles:

- $d = 1$: alors $a'b' = 809$. Comme 809 est premier, on a $a' = 1$ et $b' = 809$ d'où une solution : $\{a,b\} = \{1 , 809\}$
- $d = 7$: alors $a'b' = 131$. Ce nombre est aussi premier, on a donc: $a' = 1$ et $b' = 131$ d'où la solution {7 , 917 }
- $d = 113$: alors $a'b' = 25$.
  Comme a' et b' sont premiers entre eux, on a:
  $a' = 1$ et $b' = 25$ d'où la solution {113 , 2828 }
- $d = 791$: alors $a'b' = 19$. Nombre premier donc
  $a' = 1$ et $b' = 19$ d'où la solution {791 , 15029}

Conclusion:
Les paires $\{a,b\}$ solutions sont :

$\{1 , 809\}$, $\{7 , 917\}$, $\{113 , 2828\}$, $\{791 , 15029\}$

Ex3 : Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que
PGCD(a,b) + PPCM(a,b) = $b + 9$.

Correction : Posons d = PGCD(a,b) et m = PPCM(a,b).
On sait alors que $d.m = a.b$
Comme d est un diviseur de b et de m, la relation : $d + m = b + 9$ implique que d doit être aussi un diviseur de 9.
Les valeurs possibles de d sont donc : 1 ou 3 ou 9.

- **Si d = 1.**
  Dans ce cas, a et b sont premiers entre eux.
  La relation s'écrit : $1 + a.b = b + 9$ ou encore : $b(a - 1) = 8$.
  On obtient alors :
  $b = 1$ et $a - 1 = 8$ donc $a = 9$. Le couple (9,1) est solution
  OU
  $b = 2$ et $a - 1 = 4$ donc $a = 5$. Le couple (5,2) est solution.
  OU
  $b = 4$ et $a - 1 = 2$ donc $a = 3$. Le couple (3,4) est solution.
  OU
  $b = 8$ et $a - 1 = 1$ donc $a = 2$. Non solution car non-premiers entre eux.
- **Si d = 3.**
  Dans ce cas la relation s'écrit, comme $m = (ab / d)$:
  $9 + a.b = 3b + 27$ ou encore $b(a - 3) = 18$.
  Comme b doit être un multiple de $d = 3$, les valeurs possibles de b sont alors: 3 ou 6 ou 9 ou 18. D'où les cas:
  $b = 3$ et $a - 3 = 6$ donc $a = 9$. Le couple (9,3) est solution.
  $b = 6$ et $a - 3 = 3$ donc $a = 6$. Non solution car leur PGCD n'est pas 3.
  $b = 9$ et $a - 3 = 2$ donc $a = 5$. Non solution car leur PGCD n'est pas 3.
  $b = 18$ et $a - 3 = 1$ donc $a = 4$. Non solution car leur PGCD n'est pas 3.
- **Si d = 9.**
  Dans ce cas, comme $m = ab / d$, la relation s'écrit :
  $81 + ab = 9b + 81$ ou encore $ab = 9b$.
  Si b est non nul, alors $a = 9$.
  Les solutions obtenues sont alors de la forme $(9 , 9k)$ k est un entier naturel nul quelconque (car b est divisible par 9).
  Si $b = 0$ alors a est quelconque.
  Mais comme PGCD$(a, 0)$ = a et PPCM$(a , 0)$ = 0, la relation s'écrit dans ce cas : $a + 0 = 0 + 9$ donc $a = 9$ et le coule (9 , 0) est solution.

Conclusion:
L'ensemble des couples d'entiers naturels (a , b) vérifiant :

PGCD(a , b) + PPCM(a , b) = $b + 9$

est formé des éléments :

$(9, 1)$, $(5, 2)$, $(3, 4)$, $(9, 3)$, $(9, 9k)$ où k est un entier naturel.

EX4 : Déterminez tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que:
$m^2 - 5d^2 = 2000$
Puis déterminer tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que:
$m^2 - 7d^2 = 2000$
où $d = \mathrm{PGCD}(a,b)$ et $m = \mathrm{PPCM}(a,b)$. (3eme maths)

Correction :

Pour l'équation : $m^2 - 5d^2 = 2000$, comme d^2 devise m^2,
d^2 doit donc être aussi un diviseur de 2000.
Décomposons alors 2000 en facteurs premiers. $2000 = 2^4 \times 5^3$.
Les diviseurs carrés de 2000 sont alors :
1 , 2^2 , 2^4 , 5^2 , $2^2 \times 5^2$, $2^4 \times 5^2$.
Les valeurs possibles de d sont donc
1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 20.
De la relation $m^2 = 2000 + 5d^2$, on voit alors que la seule possibilité pour d est $d = 10$, car bien sur, m doit être entier. Dans ce cas, la valeur de m est : $m = 50$.

Comme $ab = md$, on a alors $ab = 500$. Si on écrit $a = \mathrm{A}d$ et $b = \mathrm{B}d$ avec A et B premiers entre eux, alors on obtient :

$$\mathrm{AB}d^2 = 500 \text{ d'où , comme } d = 10 , \quad \mathrm{AB} = 5.$$

A et B sont premiers entre eux donc il n'y a que deux cas possibles à voir:
(A = 1 et B = 5) ou (A = 5 et B = 1).
Dans le premier cas , on a la solution $(a , b) = (10 , 50)$
Dans le second cas , on la solution $(a , b) = (50 , 10)$.

Pour l'équation : $m^2 - 7d^2 = 2000$, on utlise la même démarche et on constate qu'il n'y a pas de solution.

Remarque importante : ce cours est sous forme de résumer ;il ne comporte pas les démonstrations des théorèmes et des propriétés .Ce pendant je vous conseille vivement de voir les démonstrations faites en classe .Chaque démonstration peut être l'objet d'une question dans un exercice

Guesmi.B