1 Décharge d'un condensateur dans une bobine

1. Principe et schéma du montage

- L'interrupteur (K) étant sur la position (1), le condensateur de capacité C se charge. La charge est terminée lorsque $u_c = U_0$. La valeur de l'énergie potentielle électrostatique stockée dans le condensateur est alors : $E = \frac{1}{2} C u_c^2 = \frac{1}{2} C U_0^2$.
- L'interrupteur (K) est alors basculé sur la position (2). Le condensateur se décharge dans le conducteur ohmique R et la bobine L.

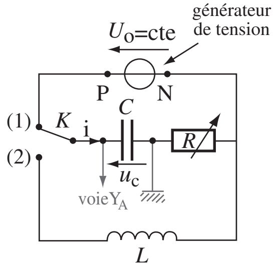

Fig. 8-1

- L'oscilloscope à mémoire, branché aux bornes du condensateur, permet d'étudier le régime transitoire qui règne lors de cette décharge.

2. Observations

Suivant la résistance R du circuit, on peut observer deux régimes de décharge.

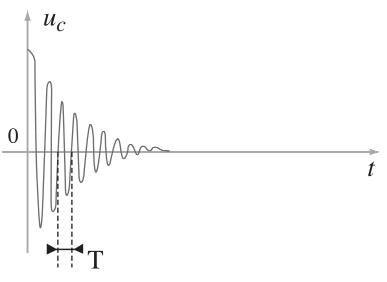

Fig. 8-2

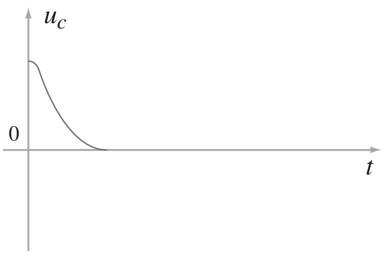

Fig. 8-3

- **Lorsque la résistance est faible** (fig. 8-2) : la décharge du condensateur n'est pas instantanée, elle donne lieu à des oscillations libres. La tension évolue d'une façon quasi périodique autour de la valeur 0 ; son amplitude diminue au cours du temps. Il s'agit d'un **régime pseudo-périodique**. T représente la pseudo-période des oscillations.
- **Lorsque la résistance est grande** (fig. 8-3) : la tension u_c s'annule sans oscillation. Il s'agit d'un **régime apériodique**.

*Remarque : le régime apériodique pour lequel l'annulation de la tension est la plus rapide est appelé **régime apériodique critique**. Il marque la limite entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique. La résistance du circuit est égale à une valeur critique R_C telle que : $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.*

3. Pseudo-période

- La pseudo-période T des oscillations libres est d'autant plus grande que l'inductance L est grande et/ou que la capacité C est grande.

Exemple d'application

On ferme un circuit constitué d'un condensateur de capacité C préalablement chargé, d'une bobine d'inductance L, de résistance nulle et d'un conducteur ohmique de faible résistance R, montés en série. La valeur de R est telle que la tension aux bornes du condensateur est pseudo-périodique.

1. Faire une analyse dimensionnelle du produit LC.

2. En déduire la relation qui doit probablement exister entre la pseudo-période du phénomène observé et le produit LC.

Corrigé commenté

Indication *: pour réaliser l'analyse dimensionnelle, rappelez les formules définissant les grandeurs considérées.*

1. La tension aux bornes d'une bobine est : $u_L = L.\frac{di}{dt}$ d'où : $[L] = \frac{[U][T]}{[I]}$ (1).

D'autre part, d'après l'expression de la tension aux bornes d'un condensateur et d'après la définition de l'intensité d'un courant, on a : $[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[I][T]}{[U]}$ (2).

De (1) et (2), on déduit : $[L.C] = \frac{[U][T]}{[I]} = \frac{[I][T]}{[U]}$ soit : $\boxed{[L.C] = [T]^2}$.

2. On a observé que la pseudo-période T des oscillations libres est d'autant plus grande que l'inductance L est grande et/ou que la capacité C est grande. Elle varie donc dans le même sens que le produit LC.

D'après l'étude dimensionnelle, on peut donc présumer que la pseudo-période est proportionnelle à $\sqrt{LC}$, soit : $\boxed{T = k.\sqrt{L.C}}$.

2 Étude d'un circuit LC

1. Principe

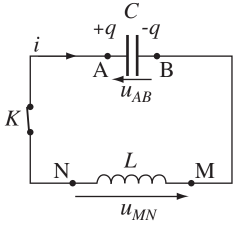

Fig. 8-4

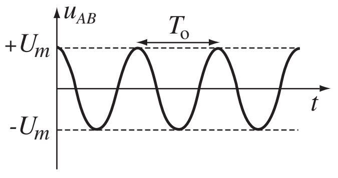

Fig. 8-5

● Soit le circuit constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance nulle, associée à un condensateur de capacité C initialement chargé (fig. 8-4). À la fermeture du circuit, on obtient un **régime périodique** (fig. 8-5). Un tel circuit LC de résistance nulle constitue un oscillateur électrique de période propre T_o.

2. Étude théorique

● À chaque instant, d'après l'additivité des tensions, on a : $u_{AB} + u_{MN} = 0$.
À la date t, la charge portée par l'armature A est $q(t)$ et la tension aux bornes du condensateur est : $u_{AB}(t) = \dfrac{q(t)}{C}$.
Aux bornes de la bobine, on a : $u_{MN}(t) = r\,i(t) + L\,\dfrac{di(t)}{dt}$ et comme $r = 0$, $u_{MN}(t) = L\,\dfrac{di(t)}{dt}$.
Or, par définition de l'intensité d'un courant : $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = \dot{q}$.
L'équation différentielle régissant la variation de la charge q du condensateur dans le temps est donc : $L\,\dfrac{d^2q(t)}{dt^2} + \dfrac{q(t)}{C} = 0$.
Cette équation peut encore s'écrire : $\boxed{\ddot{q} + \dfrac{1}{LC}\,q = 0}$.

● La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\boxed{q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)}, \text{ avec } \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T_0}.$$

ω_o est la pulsation propre du circuit (en rad.s^{-1}), Q_m est l'amplitude (en coulomb) et ϕ_o est la phase à l'origine des dates (en rad).

● Un circuit LC est un **oscillateur électrique harmonique** qui est le siège d'oscillations électriques libres, non amorties, de période propre :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}\,.$$

Exemple d'application

Un circuit série est constitué d'un condensateur de capacité C = 2 μF préalablement chargé, d'une bobine d'inductance L = 5 mH, de résistance supposée nulle et d'un interrupteur ouvert. La tension aux bornes du condensateur est U_0 = 6 V. À la fermeture du circuit, on observe la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope à mémoire.

1. Quel type d'oscillogramme doit-on obtenir ?

2. Calculer la période propre et la fréquence propre du circuit ainsi constitué.

3. En fait, la résistance de la bobine est R = 27 Ω. Que peut-on observer sur l'écran de l'oscilloscope ?

Corrigé commenté

1. ***Indication :*** *les différents régimes que l'on peut observer sont directement liés à la résistance totale du circuit.*

La résistance du circuit étant nulle, celui-ci constitue un oscillateur électrique harmonique : le régime est périodique. On peut observer un oscillogramme du type de la figure 8-5, avec U_m = 6 V.

2. ***Rappel :*** *la fréquence (en hertz) est l'inverse de la période (en secondes).*

La période propre de ce circuit est : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. On en déduit la fréquence : $f_0 = \frac{1}{T_0}$.

AN : $T_0 = 2\pi\sqrt{5.10^{-3} \times 2.10^{-6}} \approx 6{,}3.10^{-4}\ \text{s} = \mathbf{0{,}63\ ms}$.

$$f_0 \approx \frac{1}{6{,}3.10^{-4}} \approx 1{,}6.10^3\ \text{Hz} = \mathbf{1{,}59\ kHz}.$$

Dès que la résistance du circuit n'est pas nulle, le régime est soit pseudo-périodique, soit apériodique suivant la valeur de cette résistance et la valeur de la résistance critique. Pour le montage étudié, la résistance critique est :

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ soit } R_c = 2\sqrt{\frac{5.10^{-3}}{2.10^{-6}}} = \mathbf{100\ \Omega}.$$

La résistance du circuit étant inférieure à la résistance critique, le régime est pseudo-périodique.

3 Tension, intensité et énergie

1. Tension instantanée aux bornes du condensateur

- $u_{AB}(t) = \dfrac{q(t)}{C} = \dfrac{Q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ soit, en posant $U_m = \dfrac{Q_m}{C}$:

$$\boxed{u_{AB}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)}.$$

2. Intensité du courant

- Par définition, $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$.

On a donc : $i(t) = -\,\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \phi_0)$, soit $i(t) = \omega_0 Q_m \cos\left(\omega_0 t + \phi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Avec $I_m = \omega_0 Q_m$, on obtient : $\boxed{i(t) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \phi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

- L'intensité du courant est déphasée de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à la charge $q(t)$ et par rapport à la tension aux bornes du condensateur. Quand la tension est maximale, l'intensité est nulle et vice versa.

3. Échanges énergétiques dans un circuit LC

- L'énergie potentielle électrique stockée par le condensateur à la date t est : $E_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$, soit $E_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_m^2}{C}\cos^2(\omega_0 t + \phi_0)$.
- L'énergie magnétique emmagasinée par la bobine à la date t est :

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega_0^2 Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi_0).$$

Comme $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, on a : $E_L = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_m^2}{C}\sin^2(\omega_0 t + \phi_0)$.

- À chaque instant, l'expression de l'énergie totale est : $E = E_C + E_L$.

On calcule : $E = \dfrac{Q_m^2}{2C}\left[\cos^2(\omega_0 t + \phi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \phi_0)\right]$, soit : $\boxed{E = \dfrac{Q_m^2}{2C} = \text{cte}}$.

À chaque instant il y a transformation mutuelle de l'énergie potentielle électrostatique en énergie magnétique ou l'inverse.

Remarque : *on constate que l'énergie stockée par le condensateur et l'énergie emmagasinée par la bobine ont une fréquence double de celle de la charge.*

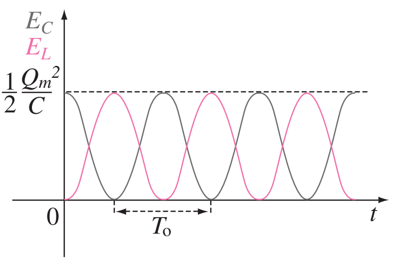

Fig. 8-6

Exemple d'application

Un circuit LC est constitué d'une bobine (L = 50 mH ; $r = 0\ \Omega$) et d'un condensateur (C = 20 µF) préalablement chargé et possédant une énergie initiale $E_C(t = 0) = 0{,}36$ mJ.

1. À partir de l'expression de l'énergie totale du système à un instant t et sachant que cette énergie est constante, retrouver l'équation différentielle qui régit le régime périodique du système.

2. Donner l'expression de la tension instantanée aux bornes du condensateur et en calculer les caractéristiques.

Corrigé commenté

Indication : *pensez que si une grandeur est constante dans le temps, alors sa dérivée par rapport au temps est nulle.*

1. L'énergie totale de l'oscillateur électrique est :

$E = E_C + E_L$, soit $\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2}$.

Cette énergie étant constante, on en déduit que : $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2C}2q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{L}{2}2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$.

Or, $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{q}$, donc $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}q\dot{q} + L\dot{q}\ddot{q} = L\dot{q}\left(\ddot{q} + \frac{1}{LC}q\right) = 0$.

Quel que soit l'instant t, on a : $\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0}$.

2. La solution de cette équation différentielle est : $q(t) = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right)$.

On en déduit l'expression de la tension aux bornes du condensateur :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q_m}{C}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right),$$

soit : $\boxed{u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi_0\right)}$ avec $U_m = \frac{Q_m}{C}$.

Or, l'énergie initiale du condensateur a pour expression : $E_C = \frac{1}{2}C.U_m^2$.

On calcule : $U_m = \sqrt{\frac{2\,E_C(t=0)}{C}}$. AN : $U_m = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}36.10^{-3}}{20.10^{-6}}} = \mathbf{6{,}0\ V}$.

La période est : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. AN : $T_0 = 2\pi\sqrt{50.10^{-3} \times 20.10^{-6}} = \mathbf{2\pi\,10^{-3}\ s}$.

À $t = 0$, $u_C(t) = U_m$ donc $\cos\phi_0 = 1$ et la phase à l'origine est $\phi_0 = \mathbf{0\ rad}$.

La tension $u_C(t)$ est alors : $u_C(t) = 6\cos\left(\frac{2\pi}{2\pi.10^{-3}}t\right) = \mathbf{6\cos(1\,000\,t)}$.

4 Amortissement et entretien des oscillations dans un circuit RLC

1. Amortissement dans un circuit LC

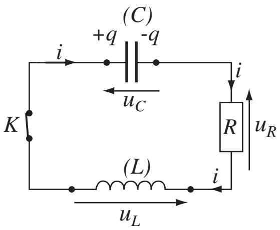

Fig. 8-7

- D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_R + u_L = 0,$$

soit : $\dfrac{q}{C} + Ri + \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ ou encore

$$\frac{q}{C} + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Ri \quad (1).$$

- Or, à la date t, l'énergie électrique totale du circuit vaut : $E = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C} + \dfrac{1}{2}Li^2$.

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q}{C} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)i\,.$$

- D'après (1), on a : $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(-Ri\right)i = -Ri^2$. On remarque que : $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} < 0$ donc l'énergie totale diminue. Le terme $(-Ri^2)$ représente la puissance évacuée par transfert thermique (effet Joule).

2. Entretien des oscillations

$u_g(t) = \mathrm{R}_0 \,.\, i(t)$

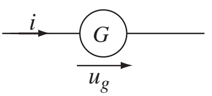

Fig. 8-8

- Pour entretenir les oscillations, il faut compenser les pertes d'énergie par effet Joule au moyen d'un montage électronique adapté faisant fonction d'un générateur capable de délivrer une tension $u_g(t)$ proportionnelle, à chaque instant, à l'intensité $i(t)$ du courant.

Remarque : *u et i sont représentées par des flèches de même sens, le générateur se comporte, à chaque instant, comme une résistance négative (– R_0).*

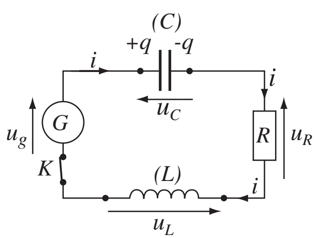

Fig. 8-9

- D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_R + u_L - u_g = 0,$$

soit : $\dfrac{q}{C} + Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(-R_0\right)i = 0\,.$

● Pour $R = R_0$, on retrouve l'équation différentielle régissant la variation de la charge q du condensateur dans le temps pour un oscillateur électrique harmonique, c'est-à-dire sans amortissement :

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0}\,.$$

● À la date t, la dérivée de l'énergie électrique totale du circuit vaut :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q}{C} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)i = 0\,.$$

L'énergie totale est alors constante. Le dispositif électronique compense bien les pertes d'énergie par effet Joule.

Exemple d'application

Un circuit comporte une bobine (L = 5,6 mH ; R), un condensateur (C = 4,7 µF) et un dipôle D. La tension u_D aux bornes de celui-ci est proportionnelle à l'intensité du courant : $u_D = -R_0\, i$ ($R_0 > 0$).

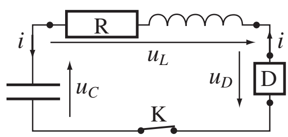

Fig. 8-10

1. Établir l'équation différentielle liant la tension u_C aux bornes du condensateur à ses dérivées première $\dot{u}_C$ et seconde $\ddot{u}_C$.

2. Que se passe-t-il si $R = R_0$? Quel est l'intérêt du dipôle D ?

3. Quelle est dans ce cas l'expression de la période ? Calculer sa valeur.

Corrigé commenté

Indication : *pensez que la tension aux bornes d'un condensateur est liée à sa charge par : $q = C.u_C$; par définition de l'intensité, $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q} = C\,\dot{u}_C$*

d'où : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{q} = C\ddot{u}_C$.

1. D'après la loi d'additivité des tensions, on a : $u_D + u_L + u_C = 0$,

soit : $-R_0 i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q}{C} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(R - R_0\right)i + \frac{q}{C} = 0$,

d'où : $LC\ddot{u}_C + \left(R - R_0\right)C\dot{u}_C + u_C = 0$. On obtient : $\boxed{\ddot{u}_C + \frac{\left(R - R_0\right)}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0}$ (1).

2. Si $R = R_0$, l'équation différentielle (1) devient : $\ddot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0$ (2).

Cette équation différentielle (2) est celle qui régit le régime périodique d'un oscillateur électrique harmonique (sans amortissement) de période propre T_0. Le dipôle D sert à compenser les pertes d'énergie par effet Joule dues à la résistance du circuit (bobine).

3. L'expression de la période T_0 a pour expression : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$, soit $T_0 = 1{,}0.10^{-3}$ s.