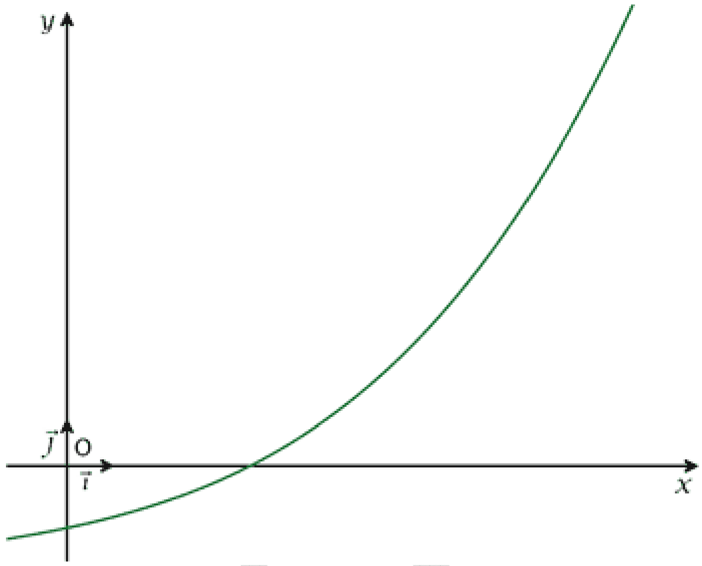
Limites d'une fonction

Définition

Limite infinie quand x tend vers l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$.

On dit que que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour x suffisamment grand, $f(x)$ est aussi grand que l'on veut. On écrit alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Remarque

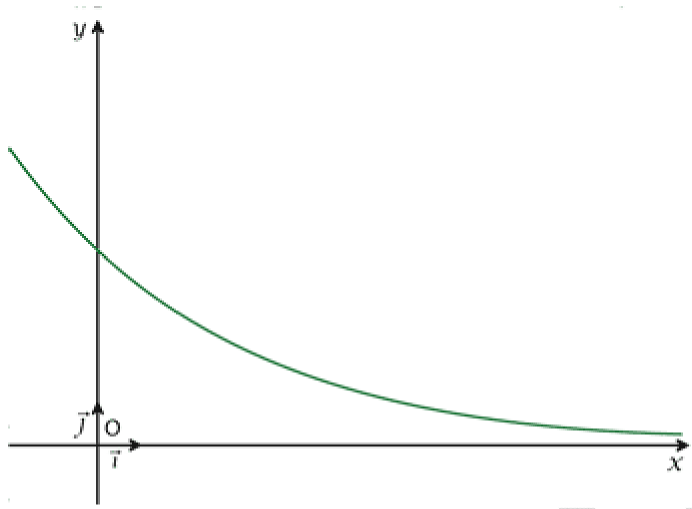
On définit de façon similaire les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Définition

Limite finie quand x tend vers l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a; $+\infty$ [.

On dit que que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ lorsque pour x suffisamment grand, $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut. On écrit alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Remarque

On définit de façon similaire la limite $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Définition

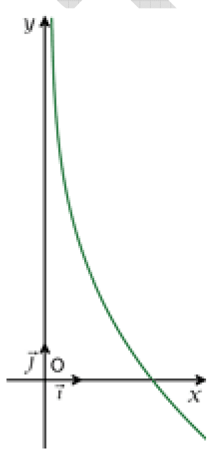
Limite infinie quand x tend vers un réel

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$ (avec $a < b$).

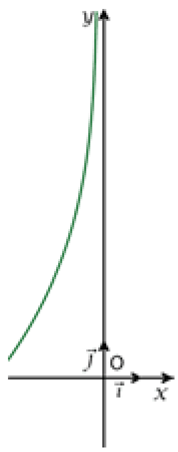
On dit que que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeur supérieures lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x se rapproche de a en restant supérieur à a. On écrit alors $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.

De même, on dit que que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b par valeur inférieures lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x se rapproche de b en restant inférieur à b. On écrit alors $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.

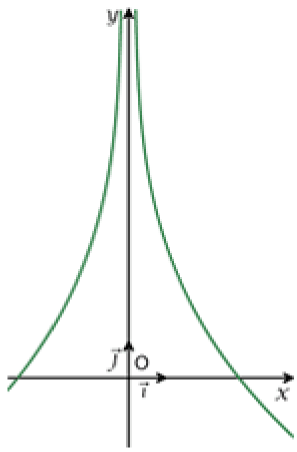
Enfin, si $c \in]a;b[$, on dit que que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers c si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers c par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. On écrit alors $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Définition

Limite finie quand x tend vers un réel

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a;b[$ (avec $a < b$).

On dit que que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a par valeur supérieures lorsque $f(x)$ se rapproche de l quand x se rapproche de a en restant supérieur à a. On écrit alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = l$.

De même, on dit que que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers b par valeur inférieures lorsque $f(x)$ se rapproche de l quand x se rapproche de b en restant inférieur à b. On écrit alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x) = l$.

Enfin, si $c \in]a;b[$, on dit que que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers c si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers c par valeurs supérieures et par valeurs inférieures. On écrit alors $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$

Propriétés

Limites usuelles

Pour tout entier $n > 1$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si n est impair} \\ +\infty \text{ si n est pair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Propriétés

Limite d'une somme

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et l un nombre réel

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x)$
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

$F.I.$ signifie forme indéterminée.

Propriétés

Limite d'un produit

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et l un nombre réel

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x)$
l	l'	$l \times l'$
$l \neq 0$	$\pm\infty$	$(signe)\ \infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$(signe)\ \infty$

0	$\pm\infty$	$F.I.$

- $F.I.$ signifie forme indéterminée.
- $\pm\infty$ signifie que la formule s'applique pour $+\infty$ et pour $-\infty$
- $(signe)\,\infty$ signifie que l'on utilise la règle des signes usuelle :

  $+\times+=+$

  $+\times-=-$

  $-\times-=+$

  pour déterminer si la limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$

Propriétés

Limite d'un quotient

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et l un nombre réel

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
l	$l'\neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$
$l\neq 0$	0	$(signe)\,\infty$
0	0	$F.I.$
l	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	l	$(signe)\,\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I.$