Exercices de Mathématiques

F.A.Q.

Qu'y a-t-il dans ce polycopié ?
Ce recueil d'exercices était destiné à accompagner le cours de mathématiques pendant une année de PCSI. Il est divisé en chapitres qui reflètent à peu près le plan de ce cours. Les différences entre les deux programmes étant minimes, il servira aussi de support cette année en MPSI, complété par le polycopié de S. Tatitscheff. Bien entendu, les exercices proposés sont de longueur et de difficulté variables. J'ai essayé d'apprécier leur difficulté (évidemment subjective) au moyen d'un certain nombre de trèfles ♣, qui peut aller de zéro (sans difficulté) à trois (très difficile). Les étoiles * signalent une indication, que vous pouvez utiliser ou non ; ces indications sont regroupées par chapitre à la fin du polycopié. Enfin, un coeur ♡ signale un exercice classique, dont le résultat est à retenir.

Comment dois-je m'en servir ?
A quelques exceptions près, ces exercices seront cherchés individuellement et corrigés en classe par des élèves (plus ou moins) volontaires. Chercher un exercice, c'est d'abord analyser son énoncé. Vous chercherez autant que possible à écrire les hypothèses, et ce qu'on vous demande d'en déduire, sous forme de proposition logique avec quantificateurs. Ensuite, suivant votre niveau de connaissance et de compréhension du cours, vous arriverez plus ou moins vite à une solution. Mais votre travail ne sera fini que quand vous aurez rédigé cette solution de façon claire et rigoureuse, ce qui vous permettra de l'exposer proprement en classe.

Mais si je ne suis pas sûr de ma solution ?
On peut tout-à-fait aller «tester» une solution incertaine ou une rédaction imparfaite au tableau. Le mieux est tout de même d'annoncer d'entrée la couleur, et de pointer soi-même les problèmes qui semblent subsister : la clef de la réussite en mathématiques est l'honnêteté intellectuelle.

Et si je ne sais pas du tout traiter un exercice ?
Avec un peu de chance, un-e camarade y sera arrivé-e et viendra exposer sa solution ! Mais il arrive aussi que tout le monde sèche... L'idéal est alors qu'un élève intéressé par l'exercice vienne au tableau proposer ses idées et animer la réflexion collective. Le professeur est bien sûr là pour débloquer la situation et donner de nouveaux points de vue sur le problème.

Qu'est-ce qu'on s'ennuie pendant les corrections d'exercices...
La classe n'est pas censée rester passive pendant qu'un élève (ou le professeur) est au tableau. Toute intervention est bienvenue : on ne comprend pas un point de l'exposé, ou on pense avoir décelé une erreur ; on ne voit pas d'où vient l'idée de la solution ; on souhaite donner une idée ou proposer une autre solution...
Un cours ou une séance d'exercice sans question, en plus d'être ennuyeux pour tout le monde, perd (au moins) la moitié de son utilité.

Il est bourré d'erreurs, ce poly !
Signalez-moi toutes les erreurs d'énoncé ou fautes d'orthographe, il y en aura d'autant moins l'année prochaine...

Bon courage !

Table des matières

Chapitre 1

Techniques de calcul

1 Propositions logiques et quantificateurs

Exercice 1.1 Donner la valeur de vérité (VRAI ou FAUX) de chacune des propositions suivantes :

a) $0=0$ *et* $2+2=5$
b) $0=0$ *ou* $2+2=5$
c) $0=0 \Rightarrow 2+2=5$
d) $0=0 \Rightarrow 2+2=4$
e) $0=1 \Rightarrow 2+2=5$
f) $0=1 \Rightarrow 2+2=4$
g) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$
h) $\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$
i) $\forall x \in \mathbb{R},\ [x \geqslant 0 \Rightarrow x+2=4]$
k) $\exists x \in \mathbb{R},\ [x \geqslant 0 \Rightarrow x+2=4]$

Exercice 1.2 Exprimer, sous forme de réunions d'intervalles, le plus simplement possible, les parties de $\mathbb{R}$ définies par les conditions suivantes (sur le réel x), ainsi que leur complémentaire dans $\mathbb{R}$:

a) $[x>-1$ et $x \leqslant 3]$ ou $x \geqslant 0$
b) $x \leqslant 5$ et $[x \geqslant 3$ ou $x<0]$
c) $x^2 \leqslant 2$ et $x^2 \neq 1$
d) $x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 > 9$

Exercice 1.3 Soit x un réel. Que peut-on conclure des propositions suivantes ?

a) $\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$
b) $\exists \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$
c) $\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon$

Exercice 1.4 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ *non singulier* (c'est-à-dire contenant au moins deux points), et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes, et leurs négations :

a) «f est l'application nulle»
b) «f s'annule»
c) «f est à valeurs strictement positives»
d) «f est constante»

Exercice 1.5 On considère maintenant une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer en langage courant, le plus simplement possible, les propositions suivantes. On remarquera que l'ordre et le choix des quantificateurs sont fondamentaux pour déterminer le sens d'une proposition logique.

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x)=y$
b) $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=y$.
c) $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x)=y$
d) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x)=y$.

Exercice 1.6 Ecrire la négation de chacune des propositions logiques énoncées dans les exercices précédents (la négation de la proposition P est la proposition Q qui est vraie si, et seulement si, la proposition Q est fausse).

2 Opérations sur les ensembles

Exercice 1.7 * Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 1.8 Déterminer, en énumérant leurs éléments, les ensembles : $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\{0,1\})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{0,1\}))$.

Exercice 1.9 En raisonnant par analyse et synthèse, déterminer l'ensemble :

$$B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x)+f(y)\}.$$

Exercice 1.10 Déterminer l' ensemble :

$$A = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R},\ x^2+2xy+y^4=0\}.$$

Exercice 1.11 (Partie paire, partie impaire) *

a) Qu'est-ce qu'une application paire ? une application impaire ?
b) Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle soit paire, soit impaire ?
c) Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à la fois paires et impaires.

d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer qu'il existe un unique couple (φ, ψ) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que φ soit paire, ψ impaire et $f = \varphi + \psi$.
e) Ce résultat est-il encore vrai pour une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$? Si oui, l'appliquer à l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{ix}$.

3 Résolution de systèmes

Résoudre les systèmes suivants, et préciser leur rang (a, b, c, d sont des réels fixés).

Exercice 1.12 $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 3z - t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - 4y - z - 4t = 3 \end{array}\right.$.

Exercice 1.13 $\left\{\begin{array}{l} x + y = a \\ x + y + z = b \\ y + z + t = c \\ z + t = d \end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l} x + y - 2z + t = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ -x - y + z + t = 3 \\ 2x + y + 2t = a \end{array}\right.$.

Exercice 1.14 * $\left\{\begin{array}{l} x + ay - az = 1 \\ y + z = 0 \\ 2ax + (1+a)y - (1-a)z = 0 \end{array}\right.$.

4 Sommation, coefficients binômiaux

Exercice 1.15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$.

Exercice 1.16 Soient n et p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que $\dbinom{n+1}{p+1} = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Exercice 1.17 ♣ * Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $q = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Déterminer une expression simple des sommes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad ; \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \quad ; \quad C_n = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} \quad ; \quad D_n = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{2k+1} \quad ;$$

$$E_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{2k} \quad ; \quad F_n = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

Exercice 1.18 ♣ * Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déterminer une expression simple des sommes :

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \quad ; \quad H_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \quad ; \quad I_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \quad ; \quad J_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 1.19 * Soient a et b des réels fixés, et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Calculer les sommes :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb) \quad ; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb).$$

Exercice 1.20 Déterminer le dernier chiffre, puis les deux derniers chiffres de l'écriture décimale du nombre :

$$S = 0! + 1! + 2! + \ldots + 2008!$$

Exercice 1.21 Soient a, b, n trois entiers naturels non nuls, et q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 1.22 Combien existe-t-il d'entiers naturel dont le quotient et le reste, dans la division euclidienne par 38, sont égaux ?

Chapitre 2

Fonctions usuelles

1 Etudes de fonctions

Les exercices suivants doivent être traités sans aucun recours à la calculatrice (qui sera interdite en DS et aux concours). L'enjeu n'est pas de tracer fidèlement la courbe de la fonction étudiée, mais d'en faire ressortir l'allure générale, quitte à exagérer certaines caractéristiques pour les rendre plus visibles. Il est important de bien choisir l'échelle du dessin et le domaine de représentation (si l'énoncé ne les impose pas) ; un dessin bien «calibré» doit occuper entre le quart et la moitié d'une feuille A4.

Exercice 2.1 On considère la fonction f définie pour x réel par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
a) Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, puis étudier ses variations et limites.
b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de f admet des asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$. Donner des équations de ses asymptotes, ainsi que de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse nulle.
c) Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$, à l'aide des éléments précédents.
d) Soit a un réel. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, sous la forme $y = t(x)$. En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - t(x)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant t(x)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 2.2 On considère la fonction g définie pour x réel par $g(x) = x^2 \sin \dfrac{2\pi}{x}$.
a) Préciser le domaine D de définition de la fonction g, et étudier sa parité.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $g(x) = 0$.
c) Montrer que, pour tout $x \in D$, $-x^2 \leqslant g(x) \leqslant x^2$, et préciser pour quelles valeurs de x l'une des inégalités devient une égalité. En déduire la limite de g à droite en 0.
d) Etudier la limite de g en $+\infty$, et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) \leqslant x$. On admet que la droite d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de g.
e) A l'aide des éléments, précédents, donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 2.3 Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$.
a) Représenter sur l'intervalle $[-3, 3]$ la fonction partie entière $E : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
b) Quels sont les points de discontinuité de la fonction f ? Préciser sa limite en 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sa valeur en $\frac{1}{n}$.
c) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 2.4 Sans calculatrice, comparer les deux réels e^π et π^e.

Exercice 2.5 ♣ On admet les valeurs approchées par défaut (à retenir) $e \approx 2,71$ et $\sqrt{2} \approx 1,414$.
a) Montrer que $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$.
b) * Affiner ce résultat en montrant que $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{7}{10}$.

Exercice 2.6 Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} - \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$.
a) Vérifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, puis préciser en quels points elle est dérivable.
b) Calculer sa dérivée, là ou elle existe (en simplifiant au maximum). En déduire, à une constante près, une expression plus simple de la restriction de la fonction f à chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
c) En utilisant la continuité de f, déterminer les constantes de la question précédente, puis représenter la fonction f.
d) Retrouver le résultat précédent en utilisant les formules de trigonométrie.

Exercice 2.7 * Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Calculer, selon le signe de x, la valeur de $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

Exercice 2.8 ♣ * Soit a et b des réels. On suppose $ab \neq 1$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, dont on précisera la valeur suivant celles de a et b, tel que :

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab} + \varepsilon\pi.$$

Exercice 2.9 En menant un raisonnement par analyse/synthèse, trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :
a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$; **b)** ♣ * $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)f(y)$.

2 Résolution d'équations

Dans toutes les équations ou systèmes d'équations suivants, on cherche les solutions réelles. Il pourra parfois être utile de procéder à une étude de fonction(s) pour déterminer, par exemple, le nombre de solutions.

Exercice 2.10 $2\ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln 2 = \ln(6x+1) + \ln(x-2) + \ln(x+2)$.

Exercice 2.11 $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \quad ; \quad 5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$.

Exercice 2.12 $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3 \quad ; \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} = 12$.

Exercice 2.13 $2\cos(2x) + 4\cos x + 3 = 0$.

Exercice 2.14 $\cosh x = \cos y$ *(Attention : il y a une seule équation mais deux inconnues !)*

Exercice 2.15 $\arctan \frac{x}{2} + \arctan x + \arctan 2x = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad \arctan x + \arctan 3x + \arctan 9x = \frac{3\pi}{2}$.

Exercice 2.16 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 218 \\ x + y = 20 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 119 \\ x - y = 7 \end{cases}$.

Exercice 2.17 $\begin{cases} 3(\log_x y - \log_y x) = 8 \\ xy = 9 \end{cases}$.

Exercice 2.18 Donner une expression plus simple de l'ensemble

$$E = \{(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \mid \log_a c - \log_b c = \log_a c \log_b c\}.$$

Exercice 2.19 ♣ Résoudre, pour a et b deux réels fixés, le système :

$$\begin{cases} \sinh x . \sinh y = a \\ \cosh x . \cosh y = b \end{cases}.$$

On veut surtout connaître, selon les valeurs de a et b, le nombre de couples (x,y) solutions du système. Il vous faudra donc distinguer très clairement les différents cas de figure apparaissant lors de sa résolution.

Exercice 2.20 (Expression logarithmique des fonctions hyperboliques réciproque) ♡
a) Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre de deux manières l'équation $e^x - e^{-x} = y(e^x + e^{-x})$. En déduire, pour y convenable, une expression de $\operatorname{artanh} y$ faisant intervenir la fonction ln.
b) De la même manière, établir pour y convenable les relations :

$$\operatorname{arcosh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \quad ; \quad \operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Chapitre 3

Nombres complexes

1 Images et antécédents

Exercice 3.1 **a)** Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ est une bijection.
b) Qu'en est-il de l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^3$?

Exercice 3.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que, si f est strictement croissante, alors elle est injective. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3.3 * L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2\lfloor x \rfloor - x$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3.4 ♣♣ Montrer que les deux applications suivantes, de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, sont bijectives :
a) $f : (p, q) \mapsto 2^p(2q + 1)$; **b)** $g : (p, q) \mapsto \frac{1}{2}(p + q)(p + q + 1) + p$.

Exercice 3.5 Tracer le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - x^2$.
Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$, $f([-3, 2[)$, $f^{-1}([0, 6])$, $f^{-1}(f([0, \frac{1}{2}]))$, $f(f^{-1}([-1, 0[))$.

Exercice 3.6 ♣ * Soit $f : E \to F$ une application.
a) Soit A une partie de E. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
c) Soit B une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
b) Montrer que f est injective si, et seulement si : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$.
d) Montrer que f est surjective si, et seulement si : $\forall B \in \mathscr{P}(F),\ B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 3.7 ♣ Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
a) * Montrer que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
b) Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
c) Montrer que : $g \circ f$ bijective $\Rightarrow f$ injective et g surjective.
Donner un exemple où f est injective mais non surjective, g surjective mais non injective, et $g \circ f$ est bijective.

Exercice 3.8 ♣ * Soit E un ensemble, A et B deux parties de E, et $\Phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ définie par $\Phi(X) = (X \cap A, X \cap B)$.
a) Déterminer $\Phi(E)$ et $\Phi(A \cup B)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit injective.
b) De même, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit surjective.
c) A quelle condition Φ est-elle une bijection ? On précisera alors la bijection réciproque.

Exercice 3.9 **(Un résultat célèbre) ♣♣ ***
Soit E un ensemble quelconque. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Exercice 3.10 **(Théorème de Cantor-Bernstein) ♣♣♣**
Soient X et Y deux ensembles. On suppose qu'il existe deux applications injectives $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$. On va alors prouver qu'il existe une bijection de X sur Y.
Notons $\varphi = f \circ g : Y \to Y$. On définit des parties $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ de Y en posant : $A_0 = Y \setminus f(X)$, $A_1 = \varphi(A_0)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \varphi(A_n)$. On pose enfin $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
a) Montrer que les parties $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ sont des parties disjointes de Y.
b) Montrer que la partie A est stable par φ.
c) On pose $B = g(A)$, et $C = X \setminus B$. Montrer que $f(B) = A \setminus A_0$, et que tout élément de C possède un unique antécédent par g dans Y. On notera cet antécédent $g^{-1}(x)$. Montrer que $g^{-1}(x) \notin A$.
d) On définit l'application $h : X \to Y$ en posant $h(x) = f(x)$ si $x \in B$, et $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in C$. Montrer que h est une bijection de X sur Y.

2 Calcul et géométrie dans $\mathbb{C}$

On rappelle que les nombres complexes sont des nombres à part entière ; dans la résolution des exercices, on ne cherchera pas systématiquement à se ramener à l'écriture «algébrique» (partie réelle/partie imaginaire), ce qui conduit souvent à des calculs plus compliqués. Si c'est nécessaire, on pourra aussi penser à la mise sous forme «trigonométrique», à l'interprétation géométrique...
On notera toujours $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 3.11 Ecrire sous forme algébrique les complexes :
$a = \dfrac{3+5i}{5-3i}$; $b = (2-i)^3$; $c = \sqrt{2}e^{i\frac{2007}{4}\pi}$; $d = (1-i\sqrt{3})^{11}$; $e = \dfrac{(1-j)^3 + (1+j)^3}{(1+j)(1+j^2)}$.

Exercice 3.12 (Une équation fonctionnelle) *
Trouver toutes les application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que : $\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) + if(\bar{z}) = 2i$ $(\star)$.

Exercice 3.13 (Détermination principale de l'argument)♣
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer que : $\arg z \ \equiv \ 2\arctan \frac{\operatorname{Im} z}{|z| + \operatorname{Re} z} \quad [2\pi]$.

Exercice 3.14 (Inégalité triangulaire généralisée)♣
Soit n un entier naturel non nul, et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes.
a) Montrer que $|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n|$ $(\star)$.
b) Montrer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, l'équivalence : $|a+b| = |a| + |b| \ \Leftrightarrow \ \bar{a}b \in \mathbb{R}^+$.
c) En déduire que, s'il existe $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$ tel que $\bar{z}_i z_j \notin \mathbb{R}^+$, alors l'inégalité $(\star)$ est stricte.
d) Montrer finalement que $|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|$ si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}^+$. Pouvez-vous donner une interprétation géométrique de ce résultat ?

Exercice 3.15 ♣ Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ tels que $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ soit :
a) réel ; **b)** imaginaire pur ; **c)** de module 1.

Exercice 3.16 Soient x, y, z des complexes de module 1. Montrer que $|x+y+z| = |xy+yz+zx|$.

3 Résolution d'équations

Dans toutes les équations ou systèmes d'équations suivants, on cherche les solutions complexes.

Exercice 3.17 $iz + 5 = 3i + z - 2iz$; $\frac{z+5}{z-1} = \frac{3+iz}{5+iz}$.

Exercice 3.18 $\left\{\begin{array}{l} 3x - (1+i)y = 5 \\ ix + 5y = 2 \end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + jy + j^2 z = 0 \end{array}\right.$.

Exercice 3.19 $a^2 = -7 + 24i$; $b^2 = 1 - 4i\sqrt{5}$;
$c^3 = 2 - 2i$; $(d+1)^3 + 7 = 0$.

Exercice 3.20 $z^2 - z + \sqrt{2} = 0$; $z^2 + 2iz - 1 = 0$; $iz^2 + (1+i)z + 1 = 0$;
$z^2 - 2(\cos\alpha)z + 1 = 0$ (α est un réel fixé).

Exercice 3.21 $z^{2n} + z^n + 1 = 0$; $(z+1)^{2n} - (z-1)^{2n} = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$ est fixé).

Exercice 3.22 $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont fixés).

Exercice 3.23 (Une équation bicarrée)
a) Résoudre en nombres complexes l'équation $2z^4 - 2z^2 + 5 = 0$ $(\star)$.
b) En déduire que l'on peut écrire $2z^4 - 2z^2 + 5$ comme le produit de deux trinômes du second degré à coefficients **réels**.

Exercice 3.24 (Calcul de $\cos\frac{2\pi}{5}$ **et** $\sin\frac{2\pi}{5}$**)♣**
a) * Résoudre, de deux manières, l'équation de degré 4 : $z^4+z^3+z^2+z+1=0$.
b) En déduire des expressions algébriques, à base de racines carrées, des réels $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 3.25 ♣ Soit α un réel fixé. Etudier, selon la valeur de α, l'ensemble des solutions de l'équation : $z+|z|=\alpha+i$ $(\star)$.
On raisonnera par analyse/synthèse en distingant clairement les cas particulier qui se présenteront dans l'analyse. On pourra aussi envisager une solution géométrique.

Exercice 3.26 ♣ Trouver tous les couples $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tels que $|a+b|=|a|=|b|$.

Exercice 3.27 ♣ * Soit p et q des entiers strictement positifs. Déterminer, en fonction des valeurs de p et q, l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} z^p &= 1 \\ (z+1)^q &= 1 \end{cases}$.

Exercice 3.28 ♣ Soit a un réel fixé. Résoudre le système d'équations à deux inconnues réelles :

$$\begin{cases} \cos a+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0 \\ \sin a+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0 \end{cases}$$

4 Relations entre coefficients et racines

Exercice 3.29 (Fonctions symétriques élémentaires)
Soient x et y deux nombres complexes, et $s=x+y$, $p=xy$. Calculer directement, en fonction de s et p, les complexes :

$$S_2=x^2+y^2 \quad ; \quad S_3=x^3+y^3 \quad ; \quad S_4=x^4+y^4.$$

Qu'en déduit-on si s et p sont réels ? Peut-on généraliser à $S_n=x^n+y^n$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$?

Exercice 3.30 Soit $x=e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $A=x+x^2+x^4$ et $B=x^3+x^5+x^6$. Calculer les complexes $A+B$ et AB, et en déduire les valeurs de A et B.

Exercice 3.31 (Résolution de l'équation générale de degré 3) ♣♣
a) Soient a,b,c,d des réels, avec $a\neq 0$. On cherche à résoudre l'équation de degré 3 :

$$ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

En faisant le changement de variable $y=x+\frac{b}{3a}$, montrer qu'on peut se ramener à la résolution d'une équation du type : $y^3-py-q=0$ $(\star)$, avec $(p,q)\in\mathbb{R}^2$.
b) Supposons que $X\in\mathbb{C}$ soit une solution de l'équation $(\star)$. Soient u et v deux complexes tels que $u+v=X$ et $uv=\frac{p}{3}$. Montrer que les complexes u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation $(\star\star)$ de degré 2, dont on exprimera les coefficients en fonction de p et q.
c) Résoudre l'équation $(\star\star)$. On sera amené-e à étudier le signe du réel $\Delta_3=4p^3-27q^2$.
d) En déduire les racines de l'équation $(\star)$. Y a-t-il toujours une racine réelle ?

Chapitre 4

Groupes, anneaux, corps

1 Groupes

Un «magma» désigne un ensemble muni d'une ou plusieurs lois, internes ou non, dont on ne connait pas a priori les propriétés.

Exercice 4.1 Rappelons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{U}_n$ désigne l'ensemble des racines n-ième de 1 dans $\mathbb{C}$, et notons $\mathscr{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathscr{U}_n$. Le magma $(\mathscr{U}, \cdot)$ est-il un groupe ?

Exercice 4.2 Soit $\star$ la LCI définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x \star y = x + y - xy$.
a) Montrer que $\star$ est associative et commutative. Le magma $(\mathbb{R}, \star)$ est-il un groupe ?
b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer le réel $x^{\star n} = x \star \ldots \star x$ (n facteurs) en fonction de n et x.

Un monoïde est une ensemble M muni d'une loi de composition interne $\star$ associative et admettant un élément neutre $e \in M$. Un élément $x \in M$ est dit simplifiable à gauche (resp. à droite) si, pour tout $(y, y') \in M^2$, $x \star y = x \star y' \;\Rightarrow\; y = y'$ (resp. $y \star x = y' \star x \;\Rightarrow\; y = y'$). L'élément x est dit simplifiable s'il est simplifiable à gauche et à droite.

Exercice 4.3 Soit $(M, \star)$ un monoïde.
a) Montrer que, si $x \in M$ est symétrisable, alors il est simplifiable. La réciproque est-elle vraie ?
b) Quels sont les éléments simplifiables de $(\mathbb{Z}, \cdot)$?
c) ♣ Soit E un ensemble. Montrer que, dans $(\mathscr{F}(E,E), \circ)$, la fonction $f : E \to E$ est simplifiable à droite si, et seulement si, f est surjective. A quelle condition f est-elle simplifiable à gauche ?

Exercice 4.4 Soit $(M, \star)$ un monoïde, et $U(M)$ l'ensemble des éléments symétrisables de M. Montrer que $(U(M), \star)$ est un groupe. Exemples d'applications ?

Exercice 4.5 ♣ Soit $(G, \bullet)$ un groupe, et H une partie de G stable par $\bullet$. On suppose que H est non vide et *finie*.
a) * Soit $a \in H$ fixé, et $\varphi_a : H \to H, \; x \mapsto x \bullet a$. Montrer que l'application φ_a est bijective.
b) Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 4.6 Soit $(G, \cdot)$ un groupe. L'application $f : G \to G, \; x \mapsto x^{-1}$ est-elle un endomorphisme de G ? Si oui, est-ce un isomorphisme ?

Exercice 4.7 Montrer que l'application $\Phi : (\mathbb{U}, \cdot) \times (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot), \; (x, y) \mapsto xy$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4.8 Soient $(G, \star)$ et $(G', \bullet)$ deux groupes isomorphes, c'est-à-dire tels qu'il existe un isomorphisme de groupes de G sur G'. Montrer que G est abélien si, et seulement si, G' est abélien.

Exercice 4.9 ♣ Montrer qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre les groupes $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ et $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Exercice 4.10 ♡ Montrer que les sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ sont exactement les parties du type $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Est-il possible d'énoncer un résultat du même genre pour le groupe $(\mathbb{Q}, +)$?

Exercice 4.11 ♡ Déterminer tous les endomorphismes de groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, de $(\mathbb{Q}, +)$.

Exercice 4.12 Combien existe-t-il d'endomorphismes du groupe $\mathscr{U}_6$? Parmi eux, combien sont des automorphismes ?

2 Anneaux et corps

Exercice 4.13 Soit E un ensemble. On munit l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des lois $\cup$, $\cap$, Δ.
a) Montrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.
b) Montrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-ce un corps ?
c) Le magma $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cup)$ est-il un anneau ?

Exercice 4.14 Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $x \oplus y = x + y - 1$ et $x \star y = x + y - xy$. Le magma $(\mathbb{R}, \oplus, \star)$ est-il un anneau ?

Exercice 4.15 Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. On dit qu'un élément $x \in A$ est nilpotent si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$.
a) On suppose que x et y sont deux éléments nilpotents de A, et que $xy = yx$. Montrer que $-x$, xy et $x + y$ sont nilpotents.
b) Si l'anneau A est commutatif, l'ensemble des éléments nilpotents de A est-il un sous-anneau de A ?
c) ♣ Soit x un élément nilpotent de A. Montrer que $1_A - x$ est inversible, et préciser son inverse.

Exercice 4.16 Montrer que le seul sous-anneau de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}$.

Soient A et B des anneaux, et $\varphi : A \to B$ une application. On dit que φ est un morphisme d'anneaux si $\varphi(1_A) = 1_B$ et, pour tout $(a, a') \in A^2$, $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$ et $\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$.

Exercice 4.17 Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un endomorphisme d'anneaux. Montrer que φ est l'identité de $\mathbb{Z}$.

Chapitre 5

Equations différentielles

1 Application du cours

Sauf mention explicite du contraire, les fonctions recherchées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.1 Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle (d'ordre 3) $x^2y''' = 1$. Et sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5.2 Intégrer sur l'intervalle $]-1,1[$ l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{1-x^2}y = 0$.

Exercice 5.3 Intégrer les équations avec second membre (on essaiera de conjecturer la forme d'une solution particulière) :
a) $y' + xy = x^2 + 1$; **b)** $y' - 3y = e^{-x}(1 - x^3)$; **c)** $y' + 3y = \sin x$.

Exercice 5.4 Résoudre l'équation différentielle $y' - (\ln x)y = x^x$.

Exercice 5.5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :
a) $y'' + y = \operatorname{sh} x$; **b)** $y'' - y = \cos 2x$; **c)** $y'' + 4y' + 4y = xe^x - 3e^{-2x}$;
d) $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} 3x$; **e)** $y'' + y' + y = x$.

Exercice 5.6 (Partie réelle, partie imaginaire)
a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b, c des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est solution de l'équation $y' + a(x)y = b(x) + ic(x)$ si, et seulement si, les fonctions $g = \Re e(f)$ et $h = \Im m(f)$ sont solutions respectivement de $y' + a(x)y = b(x)$ et $y' + a(x)y = c(x)$.
b) Application : déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation $2y' - y = xe^{-x}\sin 3x$.

Exercice 5.7 (Partie paire, partie impaire)
a) Soit a un nombre réel, et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Notons c et d les parties paires et impaires de la fonction b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, et φ et ψ ses parties paires et impaires. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + ay = b(x)$ si, et seulement si, φ est solution de $y'' + ay = c(x)$, et ψ est solution de $y'' + ay = d(x)$.
b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = \cosh x + x\sin x$.

2 Raccordement de solutions, autres types d'équations

Exercice 5.8 ♣ Résoudre l'équation différentielle $y'\operatorname{sh} x - y\operatorname{ch} x = -1$:
a) sur tout intervalle ne contenant pas 0 ; **b)** sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5.9 ♣ Même question avec $xy' + \alpha y = 0$. On discutera bien sûr selon la valeur du réel α.

Exercice 5.10 ♣
a) Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x) + e^x$.
b) * Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = \cosh x.$$

Exercice 5.11 ♣♣ On considère l'équation différentielle non linéaire $y' = 1 + y^2 \quad (1)$.
a) Trouver une solution particulière de cette équation sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
b) Soient $a < b$ deux réels, et $I =]a,b[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction solution de l'équation (1). On définit $g : I \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in I,\ g(x) = \arctan f(x)$. Montrer que g est une fonction dérivable, et déterminer g'.
c) * En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1) sur l'intervalle $]a,b[$.

d) Montrer que l'équation (1) possède une unique solution sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 5.12 (Une équation d'Euler)♣

On cherche les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation : $x^2y'' + 3xy' + y = \dfrac{1}{x^2}$ (E).

a) * Soit $f \in \mathscr{D}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(e^t)$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, g est solution d'une équation différentielle (E'), que l'on précisera.

b) Résoudre l'équation (E'), et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

c) Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) telle que $f(1) = f'(1) = 0$.

Exercice 5.13 ♣♣ * En s'inspirant de la méthode précédente, résoudre sur l'intervalle $]-1, 1[$ l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 16y = 0 \quad (E).$$

Chapitre 6

Géométrie élémentaire du plan et de l'espace

1 Calculs d'équations

Exercice 6.1 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a) Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(1,3)$ et orthogonale au vecteur $\vec{u}(-2,3)$.
b) Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point $B(5,-2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(4,4)$. Donner l'équation normale et une équation polaire de cette même droite.
c) Soit Δ la droite d'équation $x+2y=7$ Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à Δ passant par le point $C(2,0)$.

Exercice 6.2 Avec les notations de l'exercice précédent :
a) Donner des équations cartésiennes des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de diamètres $[AB]$ et $[BC]$.
b) Déterminer les coordonnées du point D, distinct de B, appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Exercice 6.3 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A(1,2)$, $B(-1,3)$ et $C(2,-1)$ trois points.
a) Donner des équations cartésiennes des droites (AB), (BC) et (AC).
b) Donner des équations cartésiennes des hauteurs du triangle ABC.

Exercice 6.4 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
a) Donner une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(1,3,0)$ et orthogonal au vecteur $\vec{u}(-2,3,1)$.
b) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par le point $B(5,1,-2)$ et contenant les vecteurs $\vec{v}(4,4,4)$ et $\vec{w}(1,-1,0)$.
c) Soit Δ la droite intersection des plans P et Q. Donner un point et un vecteur directeur de Δ.

Exercice 6.5 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $A(1,2,0)$, $B(-1,0,3)$ et $C(0,2,-1)$ trois points.
a) Donner une équation cartésienne du plan P contenant les points A, B et C.
b) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par A et orthogonal à la droite (BC) ; du plan R passant par B et orthogonal à la droite (AC).
c) Déterminer les coordonnées cartésiennes de l'orthocentre du triangle ABC.
d) Déterminer l'ensemble des points équidistants de A, B et C.

2 Produit scalaire, produit vectoriel, déterminant

Exercice 6.6 Soient A, B, C, D quatre points tels que ABC et ABD soient des triangles non aplatis. On note $\mathscr{A}(ABC)$ et $\mathscr{A}(ABD)$ leurs aires.
a) Supposons ici que les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point I. Montrer que $\frac{\mathscr{A}(ABC)}{\mathscr{A}(ABD)} = \frac{CI}{DI}$.
b) Que dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles ?

Exercice 6.7 ♣ Dans un triangle ABC non aplati, on note $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ des mesures des angles $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$, et a, b, c les longueurs BC, CA, AB.
a) * Montrer que $\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$.
b) Calculer (modulo 2π), la somme $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$.
c) Montrer que $\tan \widehat{A} + \tan \widehat{B} + \tan \widehat{C} = \tan \widehat{A} \tan \widehat{B} \tan \widehat{C}$.

Exercice 6.8 ♣♣ * Soit ABC un triangle non aplati, et A', B', C' des points situés respectivement sur les droites $(BC), (CA), (AB)$, et distincts des points A, B, C.
a) Montrer que les points A', B', C' sont alignés si, et seulement si, $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.
b) Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes si, et seulement si, $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$.

Exercice 6.9 ♣ Soit ABC un triangle ni rectangle ni aplati, H son orthocentre, et A' le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
a) Montrer que A' est le barycentre de $\{(B, \tan \widehat{ABC}); (C, \tan \widehat{BCA})\}$.
b) En déduire que H est le barycentre de $\{(A, \tan \widehat{CAB}); \{(B, \tan \widehat{ABC}); (C, \tan \widehat{BCA})\}$.

Exercice 6.10 On fixe, dans l'espace, un vecteur unitaire $\vec{n}$ et un point A. Pour tout point M de l'espace, on note N le point tel que $\vec{AN} = \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{AM})$, et P le symétrique de N par rapport au point A. Montrer que le point P est le projeté orthogonal de M sur un plan que l'on précisera.

Exercice 6.11 (La droite d'Euler) *
Soit A, B, C trois points non alignés du plan.
a) On note A', B', C' respectivement les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, et G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G est le point d'intersection des médianes de ABC.
b) Montrer que les médiatrices du triangle ABC sont concourantes.
c) Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.
d) Faire une figure, sur laquelle on notera O le ccentre du cercle circonscrit au triangle ABC, et H son orthocentre. Montrer que O est l'image de H par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

3 Lignes de niveau

Exercice 6.12 (Identités remarquables)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Montrer que :
a) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2)$;
b) $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{v}\|^2$ (identité du parallélogramme) ;
c) $\|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$.

Exercice 6.13 * Soient A et B deux points du plan. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation :
a) $AM^2 - BM^2 = \lambda$; **b)** $AM^2 + BM^2 = \lambda$.

Exercice 6.14 (Généralisation du précédent)♣ * Soient A, B, C trois points du plan, et α, β, γ des réels. Etudier les lignes de niveau de l'application $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \alpha AM^2 + \beta BM^2 + \gamma CM^2$:
a) dans le cas où $\alpha + \beta + \gamma = 0$; **b)** dans le cas où $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Exercice 6.15 Soit (ABC) un triangle non équilatéral, et G son isobarycentre. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
a) Montrer que $GA^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.
b) En déduire la valeur de $(b^2 - c^2)GA^2 + (c^2 - a^2)GB^2 + (a^2 - b^2)GC^2$.
c) Déterminer les points M du plan tels que : $(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0$.

Exercice 6.16 * Soient A et B deux points distincts du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation
$$\frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}}{AM.BM} = \lambda \quad (\star).$$

Chapitre 7

Courbes paramétrées

Dans les exercices des deux premières sections de ce chapitre, on vous demande l'étude puis la représentation graphique de la courbe proposée. Pour la démarche générale, vous pouvez vous reporter aux instructions de la page 9, en particulier concernant le recours à la calculatrice. Les indications éventuelles sont là pour vous amener, en plus, à approfondir un aspect particulier.
N'oubliez pas, dans ce chapitre, que votre étude a pour but d'établir les principales propriétés d'une courbe, et non d'une fonction. Toute propriété des fonctions étudiées doit donc trouver immédiatement une traduction graphique.

1 Courbes en cartésiennes

Exercice 7.1 **a)** $x(t) = 2\cos t$; $y(t) = \sin 2t$; **b)** $x(t) = 3\cos 2t$; $y(t) = 2\sin 3t$.
Plus généralement, si p et q sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux, on pourra étudier l'allure de la courbe paramétrée par : $x(t) = \cos pt$; $y(t) = \sin qt$. Quel est l'intérêt de supposer p et q premiers entre eux ? Que peut-on conclure du caractère pair ou impair de p ou q ?

Exercice 7.2 $x(t) = t^4 - t^2$; $y(t) = t^3 - t$.
Pour tout réel t, donner un système de coordonnées polaires du point $M(t)$. En déduire une équation polaire de la courbe.

Exercice 7.3 $x(t) = t^4 + t^3 - t^2 + 1$; $y(t) = t^4 - t^3 + t^2 - 1$.
a) Donner un paramétrage $t \mapsto (X(t), Y(t))$ dans le repère $(O, \overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}}, \overrightarrow{u_{\frac{3\pi}{4}}})$.
b) Etudier les points non biréguliers et les branches infinies de la courbe.
c) Situer l'un par rapport à l'autre les points $M(t)$ et $M(-t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.
d) Finir l'étude et donner l'allure de la courbe (dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

Exercice 7.4 **(Cycloïde)** $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$; $a > 0$ étant fixé.
Montrer que la courbe est invariante par une translation à préciser, et étudier les points non biréguliers.
Plus généralement, pour $\lambda \in]0, +\infty[$, on pourra donner l'allure de la courbe Γ_λ paramée par $x(t) = a(t - \lambda \sin t)$, $y(t) = a(1 - \lambda \cos t)$. On distinguera les cas $\lambda = 1$, $\lambda > 1$ et $\lambda < 1$.

Exercice 7.5 $x(t) = \tan t + \sin t$, $y(t) = \dfrac{1}{\cos t}$.
Etudier la nature du point de rebroussement, et celle des branches infinies.

Exercice 7.6 **(Deltoïde)** $x(t) = 2\cos t + \cos 2t$, $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$.
* Après avoir donné une première allure (grossière) de la courbe, montrer qu'elle est invariante par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Tracer alors une allure plus précise, en particulier aux points de rebroussement.

2 Courbes en polaires

Exercice 7.7 **a)** $r = \cos(n\theta)$, avec $n \in \{1, 2, 3, 4\}$; **b)** $r = \dfrac{1}{\cos(n\theta)}$, avec $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

Exercice 7.8 $r = \dfrac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{3}}$.

Exercice 7.9 ♣ $r = 1 + 2\cos\theta - 4\cos^2\theta$.
* Etudier les tangentes au point O, et préciser les autres points multiples de la courbe.

Exercice 7.10 $r = \dfrac{1}{e^\theta - 1}$.

a) Etudier les branches infinies de la courbe ; préciser sa position par rapport au cercle asymptote.

b) * Etudier le signe de $f(\theta) = 1 - e^\theta + \sin\theta$ pour θ «proche» de 0. En déduire la position de la courbe par rapport à son asymptote.

3 Problèmes de lieux

Exercice 7.11 ♣

Soit $p > 0$ un réel fixé, et $\mathscr{P}$ la parabole paramétrée par $x(t) = 2pt^2$, $y(t) = 2pt$.

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on note : M_t le point de coordonnées $(x(t), y(t))$; $\mathscr{D}_t$ la normale à $\mathscr{P}$ au point M_t ; P_t le point d'intersection de $\mathscr{D}_t$ avec l'axe des abscisses ; Q_t son point d'intersection avec l'axe des ordonnées ; I_t le milieu du segment $[P_tQ_t]$.

a) Pour $t \in \mathbb{R}^*$, déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_t$, puis en déduire les coordonnées des points P_t, Q_t et I_t.

b) Pour quelles valeurs de t le point I_t appartient-il à la parabole $\mathscr{P}$?

c) Etudier et représenter le lieu $\mathscr{L}$ du point I_t lorsque t parcourt $\mathbb{R}^*$. Sur le même dessin, on fera figurer la parabole $\mathscr{P}$.

Exercice 7.12 **(Strophoïde droite)** ♣

Soient O et A deux points distincts du plan, et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O passant par A. On notera a son rayon, $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}$, et $\vec{j}$ le vecteur tel que $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormal du plan.

a) Soit M est un point de $\mathscr{C}$ tel que le triangle OAM ne soit pas aplati, et $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure de l'angle orienté $\widehat{AOM}$. On note H l'orthocentre du triangle AOM. Faire une figure propre.

b) En remarquant que le triangle AOM est isocèle, déterminer, en fonction de θ, les coordonnées cartésiennes de son orthocentre H.

c) On note $t = \tan\frac{\theta}{2}$ (justifier cette définition). Exprimer les coordonnées cartésiennes de H en fonction de t. On les notera désormais $x(t)$ et $y(t)$.

d) On appelle strophoïde droite la courbe $\mathscr{S}$ décrite par le point H lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ (privé des points tels que AOM soit un triangle aplati). A l'aide les questions précédentes, étudier et représenter la courbe $\mathscr{S}$. On fera figurer sur le même dessin le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 7.13 ♣♣ Soit $\mathscr{C}$ un cercle, et O un point fixé de $\mathscr{C}$. Pour $M \in \mathscr{C}$, notons (D) la tangente à $\mathscr{C}$ au point M, et N le symétrique de O par rapport à (D). Représenter le lieu du point N lorsque M parcourt $\mathscr{C}$, et en donner une équation polaire (dans un repère que vous choisirez).

Exercice 7.14 Dans le plan euclidien, on fixe un triangle équilatéral direct ABC de côté 1, et un réel $r > 0$. Si B' est un point tel que $AB' = r$, on note C' l'unique point tel que $AB'C'$ soit un triangle équilatéral indirect, et M le point d'intersection des droites (BB') et (CC'), s'il existe. Représenter le lieu du point M lorsque A' prend toutes les positions possibles.

A terme, vous devriez être capable de résoudre ce genre de problème sans question intermédiaire, en construisant vous-même votre démarche.

Chapitre 8

Coniques

Exercice 8.1 Représenter la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 - 2y^2 + 4x + 12y - 16 = 0$.

Exercice 8.2 ♣ * Caractériser et représenter la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $(4x+3y)^2 - 6x + 8y + 5 = 0$.

Exercice 8.3 ♣ Soit $a > b > 0$ deux réels fixés. Pour $\lambda \in]-\infty, a[\setminus\{b\}$, on note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe d'équation $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$ (dans un repère orthonormal direct fixé).
a) Caractériser la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ (nature, foyers, etc.) selon la valeur du paramètre λ. Faire un dessin.
b) Montrer que par un point du plan, situé hors des deux axes, passent exactement deux courbes C_λ et C_μ. Montrer de plus que ces deux courbes sont perpendiculaires.

Exercice 8.4 Soit F un point et $\mathscr{D}$ une droite du plan. Déterminer l'ensemble des points O tels que le cercle de centre O passant par F soit tangent à la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 8.5 ♣
Dans un carré, représenter l'ensemble des points plus proches du centre que du bord.

Exercice 8.6 ♣ * Soient F, A, B trois points distincts du plan euclidien. Déterminer l'ensemble des points F' tels que A et B appartiennent à une même conique de foyers F et F'.

Exercice 8.7 Soit D une droite, et F, F' deux points extérieurs à la droite D et situés du même côté de D. Les questions suivantes peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.
a) * Construire, à la règle et au compas, le point M de D qui minimise la longeur $d(M) = FM + F'M$.
b) Montrer qu'il existe une unique ellipse de foyers F et F' qui soit tangente à la droite D, et construire, à la règle et au compas, le point de tangence.

Exercice 8.8 ♣♣ * Trouver le lieu des foyers des ellipses tangentes aux quatres côtés d'un rectangle $ABCD$ (à traiter uniquement après avoir traité l'exercice précédent).

Exercice 8.9 (Un peu de billard...) ♣♣
On considère un tapis de billard en forme d'ellipse $\mathscr{E}$, de foyers F et F'. Si une boule est lancée sur le tapis, on considère qu'elle roule en ligne droite à vitesse constante, le long d'une droite D (on néglige les frottements). Lorsqu'elle rencontre la paroi du billard en un point M, elle rebondit. Sa nouvelle trajectoire est portée par une droite D' qui est la symétrique de D par rapport à la normale Δ à l'ellipse $\mathscr{E}$ au point M (faire un dessin).
a) On suppose d'abord que la droite D passe par le foyer F. Que dire de D' ?
b) On suppose ici que la droite D ne rencontre pas le segment $[FF']$. Montrer que les droites D et D' sont tangentes à une même ellipse de foyers F et F'.
c) On suppose ici que la droite D rencontre le segment $[FF']$ en un point distinct de F et F'. Montrer que les droites D et D' sont tangentes à une même hyperbole de foyers F et F'.

Chapitre 9

Ensembles de nombres

Pour aller plus loin dans l'étude des nombres réels, je vous conseille la lecture d'un excellent livre, accessible sans problème à un élève de sup' (sauf quelques chapitres). Vous y apprendrez entre autre comment l'ensemble des nombres réels se construit à partir de celui des nombres rationnels, et comment l'on prouve que les nombres π et e sont irrationnels et même transcendants :

Boualem H., Brouzet R. – *La planète $\mathbb{R}$, Voyage au pays des nombres réels*, Dunod, 2002.

1 Nombres entiers naturels, relations d'ordre

Exercice 9.1 Si a et b sont deux entiers relatifs, on dit que a divise b, et on note $a|b$, si, et seulement si, $\exists n \in \mathbb{N},\ b = na$.
a) Montrer que la relation de divisibilité $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
b) * Préciser le plus petit et le plus grand élément de $\mathbb{N}$ pour cet ordre.
c) La relation de divisibilité est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 9.2 Soit X un ensemble fixé non vide, et $E = \mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux éléments de E, on note $f \leqslant g$ si, et seulement si :

$$\forall x \in X \qquad f(x) \leqslant g(x).$$

a) Montrer que la relation $\leqslant$ ainsi définie est une relation d'ordre sur l'ensemble E.
b) * A quelle condition sur le nombre d'éléments de X s'agit-il d'une relation d'ordre total ?

Exercice 9.3 Soit X un ensemble fixé, supposé non vide. Pour $A \subset X$, on note φ_A sa fonction caractéristique. Montrer que l'application $\Phi : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{F}(X, \mathbb{R}),\ A \mapsto \varphi_A$, est croissante.
L'ensemble $\mathscr{P}(X)$ est muni de l'ordre $\subset$, et l'ensemble $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ de l'ordre $\leqslant$ défini précédemment.

Exercice 9.4 Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\tfrac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\tfrac{\pi}{2}).$$

Exercice 9.5 ♣ Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction croissante surjective. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \leqslant n$.

Exercice 9.6 ♣ * Soit $C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad C(n,0) = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad C(0,p) = 0 \\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad C(n,p) = C(n-1,p) + C(n-1,p-1) \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $C(n,p) = \binom{n}{p}$.

Exercice 9.7 (Une formule de réciprocité) ♣♣
Soit u une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_i$ et $w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$.
a) Montrer que $\sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{i} = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.
b) * En déduire que $w = u$.

2 Borne inférieure, borne supérieure

Pour la plupart des exercices suivants, il est conseillé de faire un dessin.

Exercice 9.8 (Borne inférieure/supérieure pour l'ordre lexicographique)♣
On munit l'ensemble $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ de l'ordre lexicographique, défini par :

$$(x, y) \prec (x', y') \qquad \Leftrightarrow \qquad x < x' \text{ ou } [x = x' \text{ et } y \leqslant y'].$$

a) Vérifier que la relation $\prec$ est une relation d'ordre sur E.
b) On considère la partie $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Montrer que A est majorée pour l'ordre $\prec$, et qu'elle admet un plus grand élément (que l'on précisera).
c) Donner un exemple de partie non majorée de E.
d) On considère la partie $B = [0, 1[\times[0, 1[$. Montrer que c'est une partie majorée de E pour l'ordre $\prec$, et déterminer l'ensemble $\mathscr{M}(B)$ de ses majorants.
e) Montrer que la partie B admet une borne supérieure, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathscr{M}(B)$ admet un plus petit élément.

Exercice 9.9 ♣ Soit X un ensemble muni d'une relation d'ordre totale $\prec$ (par exemple $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel). Montrer que toute partie A finie et non vide de X admet un plus petit élément. On raisonnera par récurrence sur $n = \operatorname{Card} A$.

Exercice 9.10 Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $A \cup B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
b) Déterminer $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.
c) On suppose $A \cap B$ non vide. Montrer que c'est une partie majorée de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A \cap B)$?

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$*, on peut noter :*

$$A + B = \{a + b\,;\, a \in A \text{ et } b \in B\} \qquad \textit{et} \qquad A \cdot B = \{ab\,;\, a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Exercice 9.11 Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $A + B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
c) ♣ * Montrer par un exemple que $A \cdot B$ n'est pas nécessairement majorée. A quelle(s) condition(s), portant sur A et B, la partie $A \cdot B$ est-elle majorée ? A-t-on nécessairement $\sup(A \cdot B) = \sup A . \sup B$?

Exercice 9.12 Soient a et b deux réels tels que $0 < b < a$. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures et préciser s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum :

$$A = \{a + nb\,;\; n \in \mathbb{N}\} \quad ; \quad B = \{a + \frac{b}{n}\,;\; n \in \mathbb{N}^*\} \quad ; \quad C = \{(-1)^n(a - \frac{b}{n})\,;\; n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 9.13 ♣ * Soit $D = \{xy\,;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } |x| + |y| < 1\}$. Montrer que la partie D est majorée dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa borne supérieure.

3 Intervalles de $\mathbb{R}$, partie entière

Exercice 9.14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, et I un intervalle de $\mathbb{R}$.
a) On note $J = f^{-1}(I)$. Montrer que J est un intervalle de $\mathbb{R}$.
b) Peut-on dire la même chose de $K = f(I)$?

Exercice 9.15 ♣ * Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.
a) Montrer que l'ensemble $I + J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
b) Montrer dans le cas général que $I \cdot J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
c) Calculer $I + J$ et $I \cdot J$ pour : $I = [1, 2]$ et $J =]-2, 5]$; $I =]-1, 1[$ et $J =]-2, 5]$.

Exercice 9.16 * Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$; **b)** $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 9.17 **a)** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.
b) Pour tout réel x et tout entier naturel n, donner une expression simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.
c) En déduire, que, pour n assez grand, on a $S_n = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 9.18 Soient a et b deux nombres réels tels que $b - a > 3$. Démontrer que l'intervalle $]a, b[$ contient au moins trois entiers distincts.

Exercice 9.19 Soit T un réel strictement positif fixé, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. On suppose que f est bornée sur l'intervalle $[0, T[$ (c'est-à-dire que la fonction restreinte $f_{|[0,T[}$ est bornée). Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

4 Nombres rationnels, nombres irrationnels

Exercice 9.20 ♣ Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme d'anneau.
a) Montrer que φ est injectif (on pourra montrer que $\ker \varphi = \{0\}$).
b) * Montrer que l'image par φ d'un réel positif est un réel positif.
c) Montrer que φ est croissant.
d) ♣♣ Montrer que φ est l'identité de $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pourra déterminer les images par φ des ensembles $\mathbb{Q} \cap]-\infty, a]$ et $\mathbb{Q} \cap [a, +\infty[$.

Exercice 9.21 Montrer que le nombre réel $\log_{10} 2$ est irrationnel.

Chapitre 10

Suites numériques

1 Etudes de limites

Etudier la convergence et la limite éventuelle des suites définies dans les exercices ci-dessous. Rappelons, pour les exercices faisant intervenir des suites à valeurs complexes, qu'il est inutile de se ramener systématiquements aux parties réelle et imaginaire.

Exercice 10.1 $u_n = \dfrac{n+1}{n+\cos(n)}$; $v_n = \dfrac{\lfloor \ln n \rfloor}{\ln n}$; $w_n = \dfrac{n+1}{n} - \dfrac{n}{n+i}$; $x_n = \dfrac{1-n}{i^n n \ln n}$.

Exercice 10.2 * $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$; a et b étant fixés dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10.3 * **a)** $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\theta}{2^k}$; **b)** $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$; $\theta \in \mathbb{R}$ étant fixé.

Exercice 10.4 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
a) * Montrer que la suite u est convergente, et préciser sa limite.
b) Majorer la suite v à l'aide de la suite u, et en déduire qu'elle converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

Exercice 10.5 ♣ Soit u la suite réelle définie en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
a) Montrer que u est croissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 10.6 ♣ Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin n$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\cos(1)u_{n+1} - u_n$. En déduire que, si la suite u est convergente, alors sa limite est nécessairement nulle.
b) Montrer que la suite u n'admet pas 0 pour limite. Conclure.
c) Que dire, pour $\theta \in \mathbb{R}$ de la suite $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 10.7 (Moyenne arithmético-géométrique) ♣ Soient a et b deux réels strictement positifs, tels que $a < b$. On définit deux suites réelles u et v en posant :

$$u_0 = a,\ v_0 = b, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases}.$$

a) Montrer que $a < \sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b) < b$.
b) Montrer que les suites u et v admettent une limite commune ℓ, et que $a < \ell < b$.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique des réels a et b.

2 Suites définies par récurrence

Exprimer en fonction de n le terme général des suites définies ci-dessous. En déduire leurs limites éventuelles.

Exercice 10.8 $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 12 \end{cases}$; $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2v_n - 2^n \end{cases}$.

Exercice 10.9 $\begin{cases} u_0 = 0\ ;\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$; $\begin{cases} v_0 = 1\ ;\ v_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n - 4 \end{cases}$.

Exercice 10.10 $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - e^{-n}) \end{cases}$; $\begin{cases} v_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2-v_n} \end{cases}$.
($a \in \mathbb{R}$ est fixé ; on précisera *a posteriori* pour quelles valeurs de a la suite est bien définie).

Exercice 10.11 $\begin{cases} z_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \bar{z}_n) \end{cases}$ ($a \in \mathbb{C}$ est fixé).

Exercice 10.12 ♣ * $\begin{cases} w_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \frac{1}{2}(w_n + |w_n|) \end{cases}$ ($b \in \mathbb{C}$ est fixé).

3 Application du cours

Exercice 10.13 Déterminer deux suites divergentes u et v (réelles ou complexes) telles que :
a) la suite $u + v$ soit convergente ; **b)** la suite uv soit convergente.

Exercice 10.14 **(vrai/faux)** Soient u et v deux suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$. On suppose de plus que la suite v admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour chacune des assertions suivantes, dites si elle est nécessairement vrai, ou peut-être fausse (en justifiant votre réponse).
a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.
b) La suite u est majorée.
c) La suite u est convergente.

Exercice 10.15 ♣ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante, et $v = \left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite.
a) On suppose que v admet une limite finie ℓ. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
b) On suppose que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 10.16 Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ, finie ou infinie.
a) On suppose $\ell \in [0, 1[$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
b) On suppose $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
c) On suppose $\ell = 1$. Montrer que tous les cas sont possibles : u convergente de limite nulle ou non, u divergente de première ou de seconde espèce. *

Exercice 10.17 ♣ Soit u une suite, réelle ou complexe, telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes. Montrer que la suite u est convergente.

Exercice 10.18 ♣ * Soit u une suite réelle non majorée. Montrer que u admet une suite extraite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$.

Chapitre 11

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

1 Limites et continuité en un point

Exercice 11.1 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$; **b)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{3x^2-2x-5}$; **c)** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{x+5}}{x-4}$; **d)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+3-x^2}-2}$.

Exercice 11.2 Soit $E : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\lfloor x\rfloor$.

a) Démontrer que la fonction E est continue à droite en tout point.

b) Quels sont les points où la fonction E n'est pas continue ? *(On demande une réponse justifiée.)*

c) ♣ * Construire une fonction $f : [-1,1]\to\mathbb{R}$ continue en tout point sauf sur $\{\tanh(n)\,;\,n\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 11.3 ♣ On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}{x^x}$.

a) Cette fonction admet-elle une limite en $+\infty$?

b) Donner l'allure du graphe de la fonction f.

Exercice 11.4 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique et admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 11.5 ♣ Soit $f :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ et $g :]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$. On supppose f croissante et g décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 11.6 ♣ Soient $a<b$ deux réels et $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction croissante.

a) Rappeler pourquoi la fonction f admet une limite à droite en tout $x\in[a,b[$, que l'on notera $f_d(x)$, et une limite à gauche en tout $x\in]a,b]$, que l'on notera $f_g(x)$. Pour tout $x\in]a,b[$, on notera $v_f(x)=f_d(x)-f_g(x)$.

b) Soit $x\in]a,b[$. Montrer que $v_f(x)\geqslant0$, et que $v_f(x)=0$ si, et seulement si, f est continue en x.

c) Soit $(x,y)\in[a,b]^2$ tel que $x<y$. Montrer que $f_g(y)-f_d(x)\geqslant0$, et que $f_g(y)-f_d(x)=0$ si, et seulement si, f est constante sur $]x,y[$.

d) * Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $x_1<\ldots<x_p$ des éléments de $]a,b[$. Montrer que $\sum_{k=1}^{p}v_f(x_k)\leqslant f(b)-f(a)$.

d) En déduire que, pour tout $\alpha>0$, l'ensemble des $x\in]a,b[$ tels que $v_f(x)>\alpha$ est fini.

2 Suites définies par récurrence

Dans les exercices suivants, un réel a est fixé. On étudiera la bonne définition et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des outils développés en cours.

Exercice 11.7 $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

Exercice 11.8 $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\ln(1+u_n)$.

Exercice 11.9 $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\sin u_n$.

Exercice 11.10 ♣ * $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n-u_n^3$.

3 Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 11.11 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c)$.

Exercice 11.12 Entre 8 h et 9 h, un marcheur parcourt 12 km.
a) Démontrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 km.
b) Existe-t-il un intervalle de 20 min pendant lequel il parcourt exactement 4 km ?
c) Existe-t-il un intervalle de 40 min pendant lequel il parcourt exactement 8 km ?

Exercice 11.13 ♡ Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet au moins un point fixe sur le segment $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 11.14 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet au moins un point fixe sur le segment $[a, b]$.

Exercice 11.15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11.16 Soient $a < b$ deux réels, et f, g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $\forall x \in [a, b],\ 0 < f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $k < 1$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) < kg(x)$.

Exercice 11.17 ♣ * Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n} f(x_n)$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 11.18 ♣♣ Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue telle que $f \circ f = Id_{[0,1]}$ et $f(0) = 0$.
a) Démontrer que f est injective.
b) * Démontrer que f est strictement croissante.
c) Démontrer que f est l'application identité de $[0, 1]$.

4 Equations fonctionnelles

Exercice 11.19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathbb{T}_f$ l'ensemble de ses périodes (on appelle ici période de f tout réel, nul ou non, tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$).
a) Montrer que $\mathbb{T}_f$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
b) On suppose maintenant la fonction f périodique. Justifier l'existence de $a = \inf(\mathbb{T}_f \cap \mathbb{R}_+^*)$.
c) ♣ * On suppose de plus f continue et non constante. Montrer que $a > 0$.
d) Montrer alors que $\mathbb{T}_f = a\mathbb{Z}$.

Exercice 11.20 ♣ On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant l'équation fonctionnelle : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
a) Soit $f \in E$ provisoirement fixée. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.
b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.
c) Montrer alors qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.
d) Achever de déterminer l'ensemble E.

Exercice 11.21 ♣ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle précédente.
a) * On suppose f continue en 0. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) On suppose f croissante. Montrer que f appartient à l'ensemble E.

Exercice 11.22 ♣ Dans cet exercice, on s'intéresse aux applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $(\mathscr{E})$: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant l'équation fonctionnelle $(\mathscr{E})$.

(i) Déterminer la valeur de $f(0)$.

(ii) Etudier la parité de f.

(iii) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f(nx) = n^2 f(x)$.

(iv) Pour $x \in \mathbb{Q}$, déterminer la valeur de $f(x)$.

b) Déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$ continues sur $\mathbb{R}_+$.

c) Déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$ croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 11.23 ♣ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que :

$$\forall (x, y,) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \quad (\star).$$

On suppose de plus que $f(0) = f(1) = 0$.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = 0$.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{n}{2^k}\right) = 0$.

c) En déduire que f est l'application nulle.

d) Déterminer plus généralement l'ensemble des fonctions f vérifiant l'équation $(\star)$.

Chapitre 12

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 12.1 ♣ Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.

Exercice 12.2
a) Soit a un entier tel que $a \equiv -1$ [4]. Montrer que a n'est pas la somme de deux carrés parfaits.
b) Soit a un entier tel que $a \equiv -1$ [8]. Montrer que a n'est pas la somme de trois carrés parfaits.

N'espérez pas généraliser ces résultats : d'après un théorème démontré en 1770 par Joseph Louis Lagrange, tout nombre entier est la somme de quatre carrés parfaits.

Exercice 12.3 ♣ * Déterminer tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Exercice 12.4 ♣♣ * Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers naturels non nuls tels que :

$$x \mid y+z \ , \quad y \mid z+x \quad \text{et} \quad z \mid x+y.$$

Exercice 12.5 ♣♣ Soient x, y, z trois entiers naturels tels que $x^2 + y^2 = z^2$. On suppose de plus x et y premiers entre eux.
a) En raisonnant modulo 4, montrer que x et y ne peuvent pas être tous les deux impairs. Montrer qu'ils ne peuvent pas être non plus tous les deux pairs.
b) On suppose désormais x impair et y pair. On pose $a = \frac{1}{2}(z + x)$ et $b = \frac{1}{2}(z - x)$.
Montrer que a et b sont des entiers premiers entre eux, et que $4ab = y^2$.
c) En déduire qu'il existe des entiers naturels p et q, premiers entre eux et de parités opposées, tels que $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$ et $z = p^2 + q^2$.

Chapitre 13

Relations de comparaison, développements limités

1 Polynômes et fonctions polynomiales

Si $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ *est un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$*, on appelle valuation de* P *le nombre* $\mathrm{val}(P)$ *défini par :*

$$\mathrm{val}(P) = \begin{cases} \mathrm{val}(P) = +\infty & \text{si } P = 0\,; \\ \mathrm{val}(P) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} & \text{si } P \neq 0. \end{cases}$$

Exercice 13.1 Soient P et Q deux polynômes.
a) Montrer que $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min\{\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q)\}$, avec égalité si $\mathrm{val}(P) \neq \mathrm{val}(Q)$.
b) Montrer que $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.

Exercice 13.2 * Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. On suppose qu'il existe un réel λ non nul tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n+1) = P(n) + \lambda$. Montrer que P est un polynôme de degré 1.

Exercice 13.3 Démontrer que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 13.4 ♣
Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers et de degré $n \in \mathbb{N}^*$.
a) On suppose que $r = \frac{p}{q}$ est une racine rationnelle de P, écrite sous forme de fraction irréductible. Montrer que a_n est un multiple de q et que a_0 est un multiple de p.
c) * En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est un multiple de $p - kq$.
d) Déterminer les racines rationnelles des polynômes :

$$Q = 49X^3 - 42X^2 + 15X - 2 \ ; \quad R = X^5 - 2X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 5X + 6$$

e) Déduire du **a)** que, si le polynôme P est unitaire, alors toute racine de P est un entier ou un irrationnel. En particulier, la racine carrée d'un entier est un entier ou un irrationnel.

2 Relations de comparaison

Exercice 13.5 Comparer, au voisinage de $+\infty$, les fonctions :

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad ; \quad x \mapsto \ln x \quad ; \quad x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\ln x} \quad ; \quad x \mapsto \exp\sqrt{\ln x}.$$

Exercice 13.6 Donner un équivalent simple, au voisinage de 1, de la fonction $x \mapsto \arccos x$.

Exercice 13.7 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = x^x$, $g(x) = (x^x)^x$ et $h(x) = x^{(x^x)}$.
a) Etudier les limites en 0 des fonctions f, g, h.
b) Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x) - 1$, $g(x) - 1$ et $h(x) - x$.

Exercice 13.8 Etudier : **a)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - 1}{2x \operatorname{sh} x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos x} - e}{\sin^2 x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

Exercice 13.9 En utilisant les développements limités usuels, étudier les limites :
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \sin(2x) - \sin(3x)}{\tan x + \tan(2x) - \tan(3x)}$.

Exercice 13.10 Donner un équivalent simple de :
a) $e^{\frac{x+1}{x}} - e^{\frac{x}{x+1}}$, en $+\infty$; **b)** $\ln(x + \ln x)$, en 1 et $+\infty$; **c)** $\operatorname{ch} x^2 - \cos x^2$, en 0 et $+\infty$.

Exercice 13.11 Etudier les limites :

a) * $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$; **b)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} |\sin x|^{\tan x}$; **c)** $\lim_{x\to 0} |\sin x|^{\tan x}$.

Exercice 13.12 ♣ Donner un équivalent simple de :

a) $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}-1$, en $+\infty$; **b)** $\dfrac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{sh} x}-\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^{\sin x}}{\sin x-\operatorname{sh} x}$, en 0.

Exercice 13.13 Soit u une suite réelle .

a) On suppose $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. A-t-on nécessairement $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$?

b) Soit $\ell\in\mathbb{R}$. On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$. A-t-on nécessairement $(u_n)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell^n$?

Exercice 13.14 ♣ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à I, et f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe un réel $k>1$ tel que, au voisinage de a, g soit minorée par k.

a) Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x) \Rightarrow \ln f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln g(x)$.

b) Est-ce encore le cas sans hypothèse sur g ?

Exercice 13.15 **(Fonctions contractantes)** ♡ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel $k\in[0,1[$ tel que f soit k-lipschitienne.

a) Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)-x$. Montrer que la fonction g est strictement décroissante, et qu'elle prend à la fois des valeurs positives et des valeurs négatives sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction f admet un unique point fixe α dans $\mathbb{R}$.

c) Soit u une suite réelle telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. Montrer que la suite u converge vers α, et que $u_n-\alpha = \underset{n\to+\infty}{O}(k^n)$.

3 Développements limités

Exercice 13.16 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, et sans utiliser le théorème de Taylor-Young, déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction f définie par :

a) $f(x)=\exp(1-2x)$; **b)** $f(x)=\ln(3+x)$; **c)** $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}+x)$; **d)** $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$.

Exercice 13.17 Déterminer un développement limité au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

a) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3 ; **b)** $f(x)=\ln(1+x+\sqrt{1+x})$ à l'ordre 2 ;

c) $f(x)=\dfrac{1}{\cosh x}$ à l'ordre 7 ; **d)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+e^{x^2}}}{\cos^2 x}$ à l'ordre 5 ;

e) $f(x)=(\cosh x)^{\sinh x}$ à l'ordre 8.

Exercice 13.18 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ et $v_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

a) Déterminer un développement asymptotique de la suite u, sous la forme :

$$u_n=\alpha\ln n+\beta+\frac{\gamma}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) Donner une condition sur a et b pour que u soit négligeable devant $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$.

c) Montrer alors que la suite v est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice 13.19 **(DL de la fonction tangente)**

a) Déterminer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction tan.

b) Déterminer le développement limité à l'ordre 10 en 0 de la fonction $x\mapsto(\tan x)^7$.

c) On note $\cot : D\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{\cos x}{\sin x}$. Préciser le domaine de définition D de cette fonction. Déterminer le DL à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $x\mapsto x\cot x$, et en déduire un développement «généralisé» de la fonction cot au voisinage de 0.

Exercice 13.20 (DL d'une fonction réciproque)
a) Montrer que la fonction arcsin admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.
b) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t - \sin t$. Déterminer un développement limité de φ à l'ordre 3 en 0.
c) Montrer que la fonction $\varphi \circ \arcsin$ admet un DL à l'ordre 3 en 0 ; en déduire que la fonction arcsin admet un DL à l'ordre 3 en 0, que l'on déterminera.
d) En raisonnant de la même manière, montrer que la fonction arcsin admet un développement limité à l'ordre 5, que l'on déterminera.

Note : cette fiche ne contient qu'un petit nombre d'exercice. Vous devez vous entraîner à calculer des développements limités jusqu'à arriver à le faire SANS ERREUR en le minimum de temps. N'hésitez pas à traiter d'autres exercices (voire à les créer vous même, ce qui n'est pas très difficile...).

4 Applications

Exercice 13.21 * Déteminer la nature du point singulier en $t = 0$ de la courbe paramétrée par :
$$x(t) = t\cos t - \sin t \quad ; \quad y(t) = t\cosh t - \sinh t.$$

Exercice 13.22 Représenter la courbe plane décrite par le paramétrage $x(t) = 3t - t^3$, $y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$. On étudiera en particulier l'allure de ses points non réguliers.

Exercice 13.23 Représenter la courbe plane d'équation polaire $r = \dfrac{\theta + 1}{\theta - 1}$. On étudiera en particulier ses branches infinies, et sa position par rapport à ses asymptotes.

Chapitre 14

Dérivation

1 Généralités

Exercice 14.1
a) Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire, et que la dérivée d'une fonction impaire est paire. Montrer que la dérivée d'une fonction T-périodique est T-périodique.
c) Montrer que toute primitive d'une fonction impaire est paire. Que dire des primitives d'une fonction paire ? Et des primitives d'une fonction T-périodique ?

Exercice 14.2 La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos\sqrt{|x|}$ est-elle dérivable en 0 ? Donner l'allure de son graphe, en particulier au voisinage de 0.

Exercice 14.3 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et a un point intérieur à I. On appelle dérivée centrale de f au point a, s'il existe, le réel $f'_c(a) = \lim\limits_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

a) Montrer que, si f admet au point a une dérivée à gauche et une dérivée à droite, alors elle y admet une dérivée centrale. On exprimera $f'_c(a)$ en fonction de $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.
c) Montrer par des exemples que f peut admettre une dérivée centrale en a : sans être continue en a ; en étant continue mais dérivable ni à gauche, ni à droite en a.

Exercice 14.4 Déterminer en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième des fonctions :
a) $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1-x)$;
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (ax+b)e^{\lambda x}$ (où a, b, λ sont des réels fixés) ;
c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k$ (où k est un entier naturel fixé) ;
d) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x \cos x$.

Exercice 14.5 * Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe deux réels $K \geqslant 0$ et $\alpha > 1$ tels que : $\forall (x, y) \in I^2\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha$. Montrer que la fonction f est constante sur I.

Exercice 14.6 ♣♣ Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$.
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$. Montrer que la suite u admet une limite $\ell \in R$.
b) * Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$. Montrer que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell f'(0)$.

Exercice 14.7 ♣ Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, et $P = X^n(X-1)^n$.
a) A l'aide des formule de Leibniz et du binôme de Newton, déterminer deux expressions du polynôme dérivé n-ième $Q = P^{(n)}$.
b) En calculant le coefficient dominant de Q, obtenir une expression simple de : $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 14.8 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et x_0 un point intérieur à I. On suppose que f admet des dérivées à gauche et à droite en x_0, et qu'elle atteint un maximum en x_0. Montrer que $f'_d(x_0) \leqslant 0$ et $f'_g(x_0) \geqslant 0$.

2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 14.9 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois. On suppose $f(a) = f(b) = 0$, et que f'' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que f ne s'annule pas sur $]a, b[$.

Exercice 14.10 Soit $T > 0$ un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et T-périodique.
a) Soit $k \geqslant 1$ un entier et a un réel fixé. On suppose que la fonction f s'annule, sur l'intervalle

$[a, a+T[$, en au moins k points distincts $a \leqslant x_1 < \ldots < x_k < a+T$. Montrer que la dérivée f' s'annule au moins k fois sur $[a, a+T[$.
b) Cette propriété reste-t-elle vraie si on remplace l'intervalle $[a, a+T[$ par $[a, a+T]$? par $]a, a+T[$?

Exercice 14.11 **(Un peu mieux)** ♣ * Soit $a \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et T-périodique. Montrer qu'il existe deux réels c, d distincts dans $[a, a+T[$ tels que $f'(c) = f'(d) = 0$.

Exercice 14.12 Montrer que toute fonction polynomiale périodique sur $\mathbb{R}$ est constante.

Exercice 14.13 ♣ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
a) Soit $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. On suppose $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
b) Montrer que la fonction dérivée f' vérifie la «propriété des valeurs intermédiaires» : pour tout intervalle $J \subset I$, l'image directe de J par f' est un intervalle.

Exercice 14.14 **(Egalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1)** ♣ *
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Soient $a < b$ deux éléments de I. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

Exercice 14.15 **(Egalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n)** ♣♣
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Montrer que, pour tout $(a, b) \in I^2$, il existe un réel c compris strictement entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Exercice 14.16 ♣ * Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Soient $a < b$ deux éléments de I, et $c \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = f(a) + (c-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a} + \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d).$$

Exercice 14.17 ♣ * Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Etudier $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(\sin x)}{x - \sin x}$.

Exercice 14.18 ♣ * Soient a et ℓ deux réels, et f, g deux fonctions de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

(i) f et g sont continues sur $[a, +\infty[$ et dérivables sur $]a, +\infty[$;

(ii) g' garde un signe strict constant sur $]a, +\infty[$; *(iii)* $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Montrer que $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

3 Développements limités

Exercice 14.19 Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \arcsin x$, et $p \in \mathbb{N}$.
a) Justifier que f admet en 0 un DL_{2p+1}, du type $f(x) = a_0 x + a_1 x^3 + \ldots + a_p x^{2p+1} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2p+1})$.
b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $(1-x^2)y'' - xy' = 0$.
c) En déduire une relation de récurrence entre les a_k, et calculer ces coefficients.

Exercice 14.20 **a)** Rappeler le DL_3 en 0 de la fonction tangente. En déduire le DL_4 en 0 de $1 + \tan^2$. Par intégration, retrouver le DL_5 en 0 de la fonction tangente.
b) Calculer par cette méthode le DL_9 en 0 de la fonction tangente.

Exercice 14.21 ♣ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
a) Montrer que la fonction $\varphi : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se prolonge continûment en a.
b) Montrer que la fonction $\tilde{\varphi}$ ainsi prolongée est de classe $\mathscr{C}^1$; préciser sa dérivée en tout point de I.

Chapitre 15
Espaces vectoriels

1 Généralités

Exercice 15.1 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

a) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x$
b) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x + 1$
c) $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(x + 1)$
d) $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x - 5y + 3$
e) $e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x^2 - 5y$
f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x - 5y$
g) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y)$
h) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto 2(x + y, x - y)$
i) $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto z(x + y, x - y)$
j) $j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y + 3, x - y)$
k) $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - y)$

Exercice 15.2 Déterminer le noyau et l'image de chacune des applications linéaires de l'exercice précédent.

Exercice 15.3 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels (on précisera de quel espace vectoriel) ? Lesquels sont des sous-espaces affines (on précisera la direction, et au moins un point) ?
a) L'ensemble A des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
b) L'ensemble B des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
c) L'ensemble C des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) = 0$.
d) L'ensemble D des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $|f(0)| = 2$.
e) $E = \{(3x, x - y, x + y)\ ;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
f) $F = \{(3x + 1, x - y, x + y)\ ;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
g) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists (A, \theta) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R}\ f(t) = A\cos(t + \theta)\}$.

Exercice 15.4 ♡ Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$, $v : E \to F$ des applications linéaires. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$ fixé.
a) Montrer que $\operatorname{im}(\alpha u) = \operatorname{im}\ u$ et $\ker(\alpha u) = \ker u$.
b) Montrer que $\operatorname{im}(u + v) \subset \operatorname{im}\ u + \operatorname{im}\ v$ et $\ker u \cap \ker v \subset \ker(u + v)$. Montrer par des exemples que ces inclusions peut être strictes.

Exercice 15.5 ♡ Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$, $v : F \to G$ des applications linéaires. Montrer que $\operatorname{im}(v \circ u) \subset \operatorname{im}\ v$, et $\ker u \subset \ker(v \circ u)$. Montrer par des exemples que ces inclusions peut être strictes.

Exercice 15.6 ♡ Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u : E \to F$, $v : F \to G$ des applications linéaires. Montrer que $v \circ u = 0 \iff \operatorname{im}\ u \subset \ker v$.

Exercice 15.7 ♡ Soient u et v des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que u et v commutent, c'est-à-dire $v \circ u = u \circ v$. Montrer que $\operatorname{im}\ u$ et $\ker u$ sont stables par v.

Exercice 15.8 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
a) Montrer que $\ker u^2 = \ker u \iff \ker u \cap \operatorname{im}\ u = \{0_E\}$.
b) Montrer que $\operatorname{im}\ u^2 = \operatorname{im}\ u \iff \ker u + \operatorname{im}\ u = E$.
c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{im}\ u$ et $\ker u$ soient supplémentaires.

Exercice 15.9 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé, et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + \alpha\bar{z}$.
a) L'application f est elle $\mathbb{C}$-linéaire ? Est elle $\mathbb{R}$-linéaire ?
b) * Déterminer le noyau de f.
c) Déterminer l'image de f.

Soit E est un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On appelle alors indice de nilpotence de u l'entier $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}\,;\ u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}\right\}$.

Exercice 15.10 Soit $\mathbb{K}$ un corps, et $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P \mapsto P'$.
a) Montrer que D est linéaire.
b) Déterminer le noyau et l'image de D. S'agit-il d'une application injective ? surjective ?
c) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $D_n : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X],\ P \mapsto P'$. Montrer que D_n est une application nilpotente, et préciser son indice de nilpotence. L'application D est-elle nilpotente ?

Exercice 15.11 ♣ Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \ker u^n$ et $I_n = \operatorname{im}\ u^n$.
a) Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion, et que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
b) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_p = K_{p+1}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant p$, $K_n = K_p$.
c) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $I_p = I_{p+1}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant p$, $I_n = I_p$.
d) Soit $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$. Déterminer les suites $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées.
e) ♣♣ * Existe-t-il un endomorphisme T de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $D = T \circ T$?

Exercice 15.12 Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
a) On suppose $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subset H$. Montrer que $G = H$.
b) ♡ En déduire que, si G et H sont deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel F tels que $G \subset H$, alors $G = H$.
c) Montrer par des exemples que le résultat peut être faux si on supprime l'une des trois hypothèses.

Exercice 15.13 ♡ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soient $u_1 : E_1 \to F$ et $u_2 : E_2 \to F$ deux applications linéaires.
Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

2 Endomorphismes remarquables

Exercice 15.14 On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, et on pose :
$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\} \qquad ; \qquad G = \{g : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b\,;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$
a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
b) Déterminer les projections sur F et G.

Exercice 15.15 Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \frac{1}{3}(x+2y+2z, 2x+y-2z, 2x-2y+z)$. L'application u est-elle linéaire ? Est-ce un projecteur, une symétrie ? Si oui, préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 15.16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et p un projecteur de E. Donner une condition nécessaire et suffisantes, à l'aide des noyaux et images de u et p, pour que :
a) $u \circ p = u$; **b)** $p \circ u = u$; **c)** $p \circ u = u \circ p$.

Exercice 15.17 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et p un projecteur de E. Montrer que $Id_E + p$ est un automorphisme linéaire de E, et préciser, à l'aide de p, son application inverse.

Exercice 15.18 Soient F un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et G et H deux supplémentaires de F dans E. Soit $p : E \to E$ la projection sur H parallèlement à F, et $f : G \to H,\ x \mapsto p(x)$. Montrer que f est un isomorphisme linéaire. Pouvez-vous préciser l'application réciproque ?

Exercice 15.19 ♣ Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $p \circ q = 0$. On pose $f = p + q - q \circ p$. Montrer que f est un projecteur de E ; déterminer son noyau et son image.

Chapitre 16

Ensembles finis, groupes finis, dénombrement

1 Ensembles finis, dénombrement

Exercice 16.1 Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. Calculer les cardinaux de $A \setminus B$ et $A \Delta B$ en fonction de ceux de A, B, $A \cap B$.

Exercice 16.2 Soient A, B, C trois parties finies d'un ensemble E. Exprimer le cardinal de $A \cup B \cup C$ en fonction de ceux de A, B, C et de leurs intersections.

Exercice 16.3 ♣ * Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Déterminer le nombre de fonctions strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$.

Exercice 16.4 ♣ Soit E un ensemble fini non vide.
a) Montrer qu'il existe autant de parties de E dont le cardinal est pair que de parties de E dont le cardinal est impair.
b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

Exercice 16.5 ♣ * Soit E un ensemble fini non vide. On pose $S = \displaystyle\sum_{A \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{Card} A$.
a) Montrer que $S = \displaystyle\sum_{B \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{Card}(E \setminus B)$, et en déduire que $2S = \operatorname{Card} E . \operatorname{Card} \mathscr{P}(E)$.
b) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Exercice 16.6 Démontrer, par le dénombrement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 16.7 Démontrer, par le dénombrement, que $\binom{2n}{n}$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16.8 Anastasie joue avec un jeu de 52 cartes ; avant de commencer, elle tire un nombre indéterminé (nul ou non) de cartes, qui forment sa main. Les cartes restantes forment le talon.
a) Combien y a-t-il de mains possibles qui ne contiennent aucun cœur ?
b) Combien y a-t-il de mains possibles qui contiennent tous les cœurs ?
c) Anastasie est rejointe par Barnabé. Chacun tire maintenant un nombre indéterminé de cartes, et les cartes restantes forment le talon. Combien existe-t-il de tirages tels que le talon ne contienne aucun cœur ?

Exercice 16.9 ♣ * Soient E un ensemble fini non vide, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et C une partie de E de cardinal p. Déterminer, en fonction de n et p, le cardinal de chacun des ensembles suivants :
a) $\mathscr{X} = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid C \cap A = \varnothing\}$.
b) $\mathscr{Y} = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid C \subset A\}$.
c) $\mathscr{Z} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E) \mid C \subset A \cap B\}$.
d) $\mathscr{T} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E) \mid C \subset A \cup B\}$.

Exercice 16.10 ♣ Si n et p sont deux entiers naturels non nuls, on note $S(n, p)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S(n, n) = n!$ et $S(n, 1) = 1$. Que dire si $p \geqslant n + 1$?
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer $S(n, n-1)$ et $S(n, 2)$.
c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier $p \geqslant 1$, $S(n, p) = p[S(n-1, p) + S(n-1, p-1)]$.

Exercice 16.11 Soient p et q deux entiers naturels non nuls. On note $E = \{0,1\}^{p+q+1}$, et A la partie de E constituée des $p+q+1$-uplets comportant au moins $p+1$ fois le nombre 1.
a) Déterminer le cardinal de A en dénombrant cet ensemble suivant la place du $p+1$-ième 1 dans le $p+q+1$-uplet considéré.
b) En déduire la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{\binom{p+k}{k}}{2^{p+k}} + \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{q+k}{k}}{2^{q+k}} = 2.$

2 Groupes et anneaux

Exercice 16.12 ♣ Soit $(G, \bullet)$ un groupe, et H une partie de G stable par $\bullet$. On suppose que H est non vide et *finie*.
a) * Soit $a \in H$ fixé, et $\varphi_a : H \to H,\ x \mapsto x \bullet a$. Montrer que l'application φ_a est bijective.
b) Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 16.13 ♣ Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 16.14 Combien existe-t-il d'endomorphismes du groupe $\mathscr{U}_6$? Parmi eux, combien sont des automorphismes ?

Exercice 16.15 Etant donné un entier $n \geqslant 2$, on note $\varphi(n) = \text{Card}\{k \in [\![1, n_1]\!] \mid k \wedge n = 1\}$.
a) Soit p un nombre premier, et $\ell \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\varphi(p^\ell)$.
b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$ premier avec n, on a $k^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.

3 Groupe symétrique

Exercice 16.16 Soit $\sigma \in \S_n$. On suppose que σ est le produit de k cycles à supports disjoints, et d'ordres respectifs $p_1, \ldots, p_k$. Déterminer l'ordre de la permutation σ. Pour $n = 16$, déterminer par exemple l'ordre de la permutation $\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8,9)(10,11,12,13,14,15)$.

Exercice 16.17 Pour $n \geqslant 2$ et $r \in [\![1, n-1]\!]$, on note $H_r = \{\sigma \in \S_n \mid \sigma$ laisse stable $[\![1, r]\!]$. Montrer que H_r est un sous-groupe de $\S_n$, et déterminer son ordre.

Exercice 16.18 **a)** On considère une permutation σ et une transposition (i,j) de $[\![1, n]\!]$. Montrer que $\sigma \circ (i,j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$. A quelle condition σ et (i,j) commutent-elles ?
b) En déduire que, pour $n \geqslant 3$, le centre de $\S_n$ est réduit à $\{\text{Id}\}$.

Exercice 16.19 Soit $n \geqslant 2$. On rappelle que $\S_n$ est engendré par les transpositions.
a) Montrer que $\S_n$ est engendré par les transpositions $(1,2)$, $(1,3)$, ..., $(1,n)$. *[On pourra utiliser la question* **a)** *de l'exercice précédent.]*
b) Montrer que $\S_n$ est engendré par les transpositions $(1,2)$, $(2,3)$, ..., $(n-1,n)$.
c) Montrer que $\S_n$ est engendré par la transposition $\tau = (1,2)$ et le n-cycle $\sigma = (1,2,\ldots,n)$.

Exercice 16.20 Soit $\varphi : \S_n \to \mathbb{C}^\star$ un morphisme du groupe $(\S_n, \circ)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$.
a) Montrer que, si τ_1 et τ_2 sont deux transpositions, alors $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$.
b) En déduire que φ est l'application signature ou l'application constante de valeur 1.

Exercice 16.21 Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\S_n$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{A}_{n+2}$.

Exercice 16.22 Soit $\mathscr{T}_n = \{\sigma \in \S_n \mid \forall k \in [\![1, n]\!],\ s(k) + s(n+1-k) = n+1\}$.
a) Démontrer que $\mathscr{T}_n$ est un sous-groupe de $\S_n$.
b) Déterminer l'ordre de $\mathscr{T}_n$ (on distinguera suivant la parité de n).
c) Expliciter le groupe $\mathscr{T}_4$.

Exercice 16.23 Soit G un groupe (dont la loi sera notée multiplicativement) et X un ensemble. On appelle action du groupe G sur l'ensemble X toute application $a : G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g.x$ telle que, pour tout $(g, h) \in G^2$, $g.(h.x) = (gh).x$. On suppose donnée une telle action a.

a) Pour $g \in G$, on note $\varphi_g : X \to X,\ x \mapsto g.x$. Montrer que φ_g est une bijection.

b) Montrer que l'application $\Phi : G \to \S(E),\ g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme de groupes ($\S(E)$ étant un groupe pour la composition).

c) Pour $(x, y) \in X^2$, on note $x \sim y$ si, et seulement si, il existe $g \in G$ tel que $y = g.x$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur X. Les classes d'équivalences sont appelées les orbites de G dans X.

d) Soit $x \in X$, et O_x son orbite. On note $\mathrm{stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$. Montrer que $\mathrm{stab}(x)$ est un sous-groupe de G.

e) Avec les mêmes notations, montrer que, pour $(g, h) \in G^2$, $g.x = h.x$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathrm{stab}(x)$ tel que $h = gk$. En déduire que $|G| = |\mathrm{stab(x)}|.\operatorname{Card} O_x$, et en particulier que le cardinal de l'orbite O_x divise l'ordre du groupe G.

Chapitre 17

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps (en pratique, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Familles de vecteurs

Exercice 17.1 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère la famille (a, b, c, d) définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ a(t) = \cos t,\ b(t) = \sin t,\ c(t) = t\cos t,\ d(t) = t\sin t$. Montrer que la famille (a, b, c, d) est libre.

Exercice 17.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans les deux cas suivants, montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
a) $\forall k \in [\![0, n]\!]\ \forall t \in \mathbb{R}\ f_k(t) = e^{kt}$;
b) $\forall k \in [\![0, n]\!]\ \forall t \in \mathbb{R}\ f_k(t) = |t - k|$;

Exercice 17.3 On pose $E = \mathbb{C}^4$ et $F = \{(x, y, 2x, x - y)\ ;\ (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$.
Déterminer, dans l'ordre que vous voulez, un sous-espace vectoriel G supplémentaire de F dans E, et une base $\mathscr{B}$ de E adaptée aux sous-espaces F et G.

Exercice 17.4 * Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in E \mid x_1+\dots+x_n = 0\}$. Déterminer la dimension, une base et un supplémentaire de F dans E.

Exercice 17.5 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme défini par : $u(e_1) = e_2 - e_3$, $u(e_2) = e_3 - e_1$, $u(e_3) = e_1 - e_2$.
a) Déterminer $\operatorname{rang} u$, $\operatorname{im}\ u$ et $\ker u$.
b) Montrer que $\operatorname{im}\ u$ et $\ker u$ sont supplémentaires dans E. u est-il un projecteur ?
c) Ecrire la matrice de u dans la base $\mathscr{E}$ (au départ et à l'arrivée).

Exercice 17.6 Soit $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\ ;\ (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$.
a) Montrer que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
b) Déterminer la dimension de E sur $\mathbb{Q}$.
c) ♣♣ *(bonus)* $\mathbb{R}$ est-il un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie ?

Exercice 17.7 ♣ * Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que :
$$\forall x \in E \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad u(x) = \lambda x.$$
Montrer que u est une homothétie de E.

2 Théorème du rang

Exercice 17.8 ♡ Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Soient E' et F' des sous-espaces vectoriels, respectivement, de E et F.
a) Montrer que $\dim u(E') = \dim E' - \dim(E' \cap \ker u)$.
b) Montrer que $\dim u^{-1}(F') = \dim(F' \cap \operatorname{im}\ u) + \dim \ker u$.
c) Que dire si u est un isomorphisme ?

Exercice 17.9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in GL(E)$ un automorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
a) On suppose que F est de dimension finie. Montrer que $u^{-1}(F) = F$.
b) Est-ce encore le cas si F est de dimension infinie ?

Exercice 17.10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, mais non nul.
a) On suppose $u \neq 0$ et $u^2 = 0$. Déterminer le rang de u.
b) ♣ Montrer alors qu'il existe une base $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que $u(e_1) = e_2$ et $u(e_2) = u(e_3) = 0$. Ecrire la matrice de u dans cette base.
c) On suppose maintenant $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Déterminer le rang de u.
d) ♣ Montrer alors qu'il existe une base $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de E telle que $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, $u(e_3) = 0$. Ecrire la matrice de u dans cette base.

Exercice 17.11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.
a) Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ et une forme linéaire $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ tels que
$$\forall x \in E \quad u(x) = f(x).a$$
b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$. Déterminer alors u^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) Montrer que, selon la valeur de $f(a)$, on a : $\operatorname{im} u \subset \ker u$ ou $E = \operatorname{im} u \oplus \ker u$.

Exercice 17.12 ♣ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $n = \dim E$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, et $p \in \mathbb{N}$ son indice de nilpotence : $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u^k = 0\}$.
a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $r_k = \operatorname{rang} u^k$ et $d_k = \dim(\ker u^k)$.
Montrer que $r_k - r_{k+1} = \dim(\ker u \cap \operatorname{im} u^k)$. En déduire que $p \leqslant n$.
On suppose désormais $p = n$, c'est-à-dire $u^{n-1} \neq 0$.
b) Préciser, pour $k \in [\![0, n]\!]$, la valeur de d_k et r_k. Montrer que $\operatorname{im} u^k = \ker u^{n-k}$.
c) * Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
d) ♣♣ Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont les $\ker u^k$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 17.13 ♡ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et A, B, C trois sous-espaces vectoriels de E.
a) Montrer que $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$.
b) En déduire que $\dim(A + B + C) \leqslant \dim A + \dim B + \dim C - \dim(A \cap B) - \dim(B \cap C) - \dim(C \cap A) + \dim(A \cap B \cap C)$.
c) Montrer par un exemple que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 17.14 * Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et A, B des sous-espaces vectoriels, respectivement, de E et F. On suppose $\dim A + \dim B = \dim E$. Montrer qu'il existe une application linéaire $u : E \to F$ telle que $\ker u = A$ et $\operatorname{im} u = B$.

Exercice 17.15 ♣ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u : E \to F$ une application linéaire.
a) On suppose que l'application u est surjective. Montrer qu'il existe $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.
b) On suppose que l'application u est injective. Montrer qu'il existe $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

Chapitre 18
Calcul matriciel

1 De la théorie...

Dans toute la fiche, les lettres m, n, p, q désigneront des entiers naturels non nuls, et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ (en pratique, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 18.1 (trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme)
Soit $A = [a_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A le scalaire $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
a) Montrer que $\operatorname{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
b) Montrer que, pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (on précisera les tailles des matrices AB et BA).
c) ♣ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathscr{L}(E)$. Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E. Montrer que les matrices $\operatorname{mat}_{\mathscr{E}}(u)$ et $\operatorname{mat}_{\mathscr{E}'}(u)$ ont la même trace.
Ce scalaire qui dépend uniquement de u, et non de la base choisie, est appelé la trace de u.

Exercice 18.2 Soit $\mathscr{H} = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$. Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, préciser sa dimension, et en donner une base.

Exercice 18.3 * Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible ;
(ii) pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$;
(iii) pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$.

Exercice 18.4 Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - p \leqslant \operatorname{rang}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$.
Qu'en déduire si A ou B est inversible ?

Exercice 18.5
a) Soient $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne et $L \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ une matrice ligne, toutes deux non nulles. Préciser la taille, et déterminer le rang, de la matrice CL.
b) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe deux matrices $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = CL$.
c) ♣ * Plus généralement, soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe deux matrices $U \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $V \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = UV$.

Exercice 18.6 (Calcul matriciel par blocs) Soient $n, n', n'', p, p', p'', q, q', q''$ des entiers naturels non nuls tels que $n = n' + n''$, $p = p' + p''$ et $q = q' + q''$. Soient $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \in \mathscr{M}_{n',p'}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n',p''}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n'',p'}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_{n'',p''}(\mathbb{K})$, soient $N \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $E \in \mathscr{M}_{p',q'}(\mathbb{K})$, $F \in \mathscr{M}_{p',q''}(\mathbb{K})$, $G \in \mathscr{M}_{p'',q'}(\mathbb{K})$, $H \in \mathscr{M}_{p'',q''}(\mathbb{K})$, tels que M et N s'écrivent, «par blocs» :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad ; \qquad N = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}.$$

a) Calculer, par blocs, le produit MN.
b) M étant la matrice d'une application linéaire $u : E \to F$ dans des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, pouvez-vous donner une interprétation des matrices A, B, C, D à l'aide de l'application u ?

Exercice 18.7 Soit $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.
a) Montrer que G est un sous-groupe de $(GL_3(\mathbb{C}), \cdot)$.

b) On appelle centre de G l'ensemble des matrices $A \in G$ telles que : $\forall B \in G,\ AB = BA$. Déterminer le centre de G.

Exercice 18.8 Soit $C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \ ;\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Montrer que C est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Donner une base de l'espace vectoriel C, et préciser sa dimension.
c) Montrer que l'anneau $(C, +, \cdot)$ est un corps, isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des complexes.
d) *(bonus)* Combien y a-t-il d'isomorphismes possibles de C sur $\mathbb{C}$?

2 ... à la pratique

Exercice 18.9 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$. Déterminer une matrice $B \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_2$. Existe-t-il une matrice $C \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telle que $CA = I_3$?

Exercice 18.10 Soit $M = \begin{bmatrix} 2 & j & j^2 \\ j & -j & 1 \\ j^2 & 1 & -j^2 \end{bmatrix}$.

a) Montrer que la matrice $N = M - I_3$ est nilpotente.
b) * En déduire les coefficients de la matrice M^n en fonction de n.

Exercice 18.11 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Déterminer le rang, l'image et le noyau de A.
b) Calculer A^2 en fonction de A puis, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k.

Exercice 18.12 On considère la matrice réelle $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

On notera $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme associé, et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
a) Déterminer le rang de la matrice A.
b) Déterminer une base du noyau de u, et de son image. En déduire une nouvelle base $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3$ de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice de passage P de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{E}$.
c) Déterminer la matrice B de u dans la base $\mathscr{E}$. A l'aide des formules de changement de base, écrire une relation entre les matrices A, B et P.
d) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n. Ecrire une relation entre les matrices A^n, B^n et P, et en déduire A^n.

Exercice 18.13 (Polynômes de Hilbert)
On pose $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et, pour $k \geqslant 2$, $H_k = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que la famille $\mathscr{H} = (H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Soit $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Déterminer la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base $\mathscr{H}$, puis dans la base canonique.
c) Même question avec l'application $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ P \mapsto P'$ (on se contentera de $n = 4$).

Exercice 18.14
a) Déterminer le rang r de la matrice réelle $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
b) ♣ *(bonus)* Déterminer des matrices inversibles P et Q telles que : $P^{-1}AQ = J_{3,5,r}$.

Chapitre 19

Polynômes

1 Division euclidienne, factorisation

Exercice 19.1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(2X) = P(X)$. Montrer que P est constant.

Exercice 19.2 Soit B un polynôme non nul, et $r : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ l'application qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par B. Montrer que r est linéaire, déterminer son noyau et son image, et prouver que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 19.3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que les restes des divisions euclidienne de P par, respectivement, X, $X-1$ et $X+1$ sont 3, 7 et 13. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)(X+1)$.

Exercice 19.4 Soit n et p deux entiers tels que $n \geqslant p \geqslant 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^p$.

Exercice 19.5 Soient p et n deux entiers naturels non nuls. *
a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et n pour que $X^p - 1$ divise $X^n - 1$.
b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^p - 1$.
c) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Ecrire aussi précisément que possible, à l'aide des coefficients a_k, le reste de la division euclidienne de P par $X^p - 1$.

Exercice 19.6 Soient P, A, B des polynômes à coefficients complexes, avec $AB \neq 0$. Soit R le reste de la division euclidienne (RDE) de P par AB. Montrer que le RDE de P par B est égal au RDE de R par B.

Exercice 19.7 * Soient A et B des polynômes à coefficients réels. Montrer que B divise A dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, B divise A dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 19.8 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 19.9 Factoriser les polynômes suivants, sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$:
a) $A = X^4 + 1$; **b)** $B = X^3 - 2$;
c) $C = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$; **d)** $D = X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X - 1$.

Exercice 19.10 ♣ * Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors le polynôme dérivé P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.11 ♣♣ * Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe deux poynômes A et B, à coefficients réels, tels que $P = A^2 + B^2$.

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 19.12 Déterminer le PGCD de $X^{5400} - 1$ et $X^{1920} - 1$.

Exercice 19.13 Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, et P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer l'équivalence des propositions :
(i) $P \wedge Q = 1$ *(ii)* $(P+Q) \wedge (P-Q) = 1$ *(iii)* $(P+Q) \wedge (PQ) = 1$.

Exercice 19.14 Avec les mêmes notations, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $P \wedge Q$ et $P^n \wedge Q^n$.

Exercice 19.15 Soit $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 + 1$. Montrer que A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$, et déterminer tous les couples $(U, V) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $AU + BV = 1$.

Exercice 19.16 On note $A = X^4+X^3+X^2+2X+1$, $B = X^3+2X^2+2X+1$, $C = X^3+X^2+2X+2$. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $AU + BV = C$ (d'inconnues U et V).

Exercice 19.17 Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P.
a) Montrer que, si $Q \in \mathbb{Q}[X]$ est un autre polynôme admettant α pour racine, alors $P \mid Q$ (dans $\mathbb{Q}[X]$).
b) En déduire que α est une racine simple de P.

Exercice 19.18 **(Critère d'Eisenstein)**
Soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients entiers.
a) Soit p un nombre premier. On suppose que $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont multiples de p, mais que a_n n'est pas multiple de p et que a_0 n'est pas multiple de p^2. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, et donc dans $\mathbb{Q}[X]$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P = X^n - 2009$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. En déduire que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.

3 Relations entre coefficients et racines

Exercice 19.19 Soit $P = X^3 - aX^2 + bX - c$ un polynôme à coefficients réels ou complexes, et (x, y, z) un système de racines de P dans $\mathbb{C}$.
Calculer, en fonction de a, b et c : $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$, $x^4 + y^4 + z^4$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Exercice 19.20 Avec les notations de l'exercice précédent :
a) Trouver un polynôme unitaire Q, de degré 3, admettant x^2, y^2 et z^2 pour racines.
b) Trouver un polynôme unitaire Q, de degré 3, admettant $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$ pour racines.

Exercice 19.21 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{array}\right.$.

Exercice 19.22 Soient x, y et z trois nombres complexes non nuls tels que $x + y + z = 0$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

Exercice 19.23 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $P_n = i(X - i)^{2n+1} - i(X + i)^{2n+1}$, et les réels : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tan \frac{k\pi}{2n+1}$, $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)$, et $w_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{2n+1}$.
a) Déterminer les coefficients de P_n, en particulier ceux de plus haut et de plus bas degré. Préciser la parité de P_n.
b) Rechercher les racines réelles de P_n, en précisant leur signe. En déduire la factorisation de P_n en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
c) Exprimer u_n à l'aide du nombre $P_n(0)$, puis v_n à l'aide de $P_n(i)$.
d) En déduire la valeur de v_n en fonction de n.

Exercice 19.24 **(Résolution des équation de degré 3)♣♣**
Soit $P = X^3 - aX^2 + bX - c$ un polynôme à coefficients réels ou complexes, et (x, y, z) un système de racines de P dans $\mathbb{C}$. On pose $u = x + jy + j^2z$, et $v = x + j^2y + jz$.
a) Calculer uv et $u^3 + v^3$ en fonction de a, b et c.
b) En déduire que u^3 et v^3 sont racines d'un polynôme de degré 2 dont on précisera les coefficients en fonction de a, b et c.

c) En remarquant que, par exemple, $x = \frac{1}{3}(a+u+v)$, expliquer comment on peut déduire de ce qui précède une méthode de résolution des équations de degré 3.

Si vous voulez savoir comment on peut résoudre les équations de degré 4, et pourquoi on ne peut généralement pas résoudre les équations de degré 5 ou plus, je vous conseille un petit livre passionnant (en anglais !) :

Edwards H. – *Galois Theory*, Springer, 1984.

4 Application des polynômes à l'algèbre linéaire

Exercice 19.25 (Polynômes d'endomorphismes) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E et $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, on notera $P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + \ldots + a_n u^n \in \mathscr{L}(E)$. On dira que P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
a) Montrer que $[P+Q](u) = P(u) + Q(u)$ et que $[PQ](u) = P(u) \circ Q(u)$.
b) Montrer que $\ker P(u)$ et $\mathrm{im}\ P(u)$ sont stable par u.

Exercice 19.26 (Polynôme minimal d'un endomorphisme)
On suppose ici E de dimension finie, notée n, et on fixe $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $Ann(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$.
a) Montrer que $Ann(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
b) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n^2})$ est liée. En déduire que $Ann(u) \neq \{0\}$.
c) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire M_u tel que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on ait l'équivalence : $P(u) = 0 \iff M_u \mid P$. Le polynôme M_u est appelé le polynôme minimal de u.
a) A quelle condition peut-on avoir $M_u = 1$?

Exercice 19.27 (Exemples de polynômes minimaux)
On garde les notations de l'exercice précédent, et on étudie divers cas particuliers.
a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h \in \mathscr{L}(E)$ l'homothétie de rapport λ. Déterminer un polynôme annulateur de h de degré 1, et en déduire le polynôme minimal M_h de h.
b) Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $M_p \mid X^2 - X$. A quelle condition a-t-on $M_p = X^2 - X$?
c) Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie autre que $\pm\mathrm{Id}_E$. Déterminer son polynôme minimal M_s.
d) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Montrer que $M_u = X^p$, pour un entier $p \in [\![0, n]\!]$ que l'on précisera.

Exercice 19.28 (Degré du polynôme minimal) Soit toujours E de dimension n finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et M_u son polynôme minimal.
a) On fixe pour cette question un sous-espace vectoriel F de E, non nul et stable par u, et $x \in F \setminus \{0\}$. On suppose qu'il existe un polynôme irréductible $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A(u) = 0$. On note $d = \deg A$.

(i) Montrer que, si la famille $(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ est liée, alors il existe un polynôme $B \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ tel que $[B(u)](x) = 0_E$.

(ii) En notant $C = A \wedge B$, montrer que $[C(u)](x) = 0$.

(iii) En déduire que $\dim F \geqslant d$.

b) On choisit maintenant un facteur irréductible unitaire A de M_u, et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M_u = AQ$. On note $F = \ker A(u)$ et $G = \mathrm{im}\ A(u)$.

(i) Montrer que $F \neq \{0_E\}$.

(ii) Montrer que Q est le polynôme minimal de l'endomorphisme induit par u sur G

[Dans les deux cas, on pourra raisonner par l'absurde, en invoquant le caractère minimal de M_u.]
c) A l'aide des questions précédentes, montrer par récurrence que $\dim E \geqslant \deg M_u$.

5 Fractions rationnelles

Exercice 19.29 **a)** Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{C}(X)$, les fractions rationnelles :

$$A = \frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)} \quad ; \quad B = \frac{1}{(X^3-1)^2} \quad ; \quad C = \frac{1}{X^n - 1} \quad ; \quad D = \frac{1}{X^7 + X^6 + \ldots + X + 1}.$$

b) Faire de même dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19.30 Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, les fractions rationnelles :

$$E = \frac{X^3}{(X^4+X^2+1)^2} \quad ; \quad F = \frac{2}{(X-1)^4(X^2+1)} \quad ; \quad G = \frac{1+X^4}{1+X^6} \quad ; \quad H = \frac{1+X^6}{1+X^4} \quad ; \quad I = \frac{2X^5+3X^2-1}{(X^2+X+1)^{2009}}.$$

Exercice 19.31 Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{Q}(X)$, la fraction rationnelle $J = \dfrac{X^3+X+1}{X^6-1}$.

Exercice 19.32 **a)** Montrer que, pour tout $n\mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(nx) = T_n(\cos x)$.
b) Déterminer son degré, son coefficient dominant, et ses racines.
c) Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{R}[X]$, la fraction rationelle $1/T_n$.

Exercice 19.33 On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et A, B deux polynômes tels que $B(\alpha) \neq 0$. Exprimer la partie polaire de la fraction rationnelle $F = \frac{A}{(X-\alpha)^n B}$ en fonction des évaluations en α des dérivées successives de la fraction rationnelle $G = \frac{A}{B}$.

Chapitre 20

Intégration, primitives

1 Généralités

Exercice 20.1 Étant donnés deux réels a et b, exprimer $\displaystyle\int_a^b \lfloor x \rfloor dx$ en fonction de a, b, $\lfloor a \rfloor$ et $\lfloor b \rfloor$.

Exercice 20.2 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, et $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Démontrer que $\displaystyle\int_{-a}^a g(t)dt = \int_0^a [g(t) + g(-t)]dt$. Que peut-on en déduire si f est paire ? si f est impaire ?

Exercice 20.3 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$.

Exercice 20.4 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
a) On suppose $\int_{[0,1]} f = 0$. Montrer que f s'annule sur $]0, 1[$.
b) On suppose que $\int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe dans $]0, 1[$.

2 Etudes de limites et «découpages» d'intégrales

Exercice 20.5 (à la Cesaro) ♣
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
a) Montrer que F peut être prolongée en une fonction continue en 0.
b) On suppose que f admet en $+\infty$ une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'alors $F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Exercice 20.6 * Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$. Montrer que f admet en 0 une limite finie que l'on précisera.

Exercice 20.7 * Etudier la limite pour x tendant vers 1 de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$.

Exercice 20.8 ♣ * Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, continue, telle que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_a^b [f(t)]^n dt$.
a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
b) Montrer que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
c) ♣♣ Montrer que $(I_n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 20.9 ♣♣ Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$.
a) Démontrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0)$.
b) On suppose f dérivable en 0. Etudier la limite pour $n \to +\infty$ de $v_n = n[u_n - f(0)]$.

3 Intégration et dérivation

Exercice 20.10 Donner un exemple de fonction continue par morceaux mais n'admettant pas de primitive ; de fonction admettant une primitive mais non continue par morceaux.

Exercice 20.11 Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Montrer que la valeur de $\int_{[a,a+T]} f$ ne dépend pas du réel a.

Exercice 20.12 Calculer $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\pi+\sqrt{2}} \frac{(\cos 2t)^3}{2+\sin^2 t\cos^2 t}dt$.

Exercice 20.13 Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs positives. Montrer à l'aide des primitives que $f = \tilde{0} \iff \int_{[a,b]} f = 0$.

Exercice 20.14 Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\sin^2 x}^{\cos^2 x} \arcsin(\sqrt{t})dt$.

a) Préciser l'ensemble de définition de la fonction f, et étudier sa dérivabilité sur cet ensemble.
b) Calculer la dérivée de f là où elle existe, et en déduire une expression simple de la fonction f.

Exercice 20.15 **(Intégration par partie généralisée)**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et u, v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Pour $(a,b) \in I^2$, calculer $\int_a^b u^{(n)}(t)v(t)dt$ en fonction de $\int_a^b u(t)v^{(n)}(t)dt$.

Exercice 20.16 ♣ Soient a et b deux réels strictement positifs, et $f : [0,a] \to [0,b]$ une bijection croissante et de classe $\mathscr{C}^1$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^b f^{-1}(y)dy + \int_0^a f(x)dx = ab$.
b) Soit $(x,y) \in [0,a] \times [0,b]$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(u)du \geqslant xy$, avec égalité si, et seulement si, $y = f(x)$.
c) Pouvez-vous donner une interprétation graphique de ces résultats ?

Exercice 20.17 * Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$.

Exercice 20.18 Soit $x \in]0,+\infty[$. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$x - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^{2p}}{2p} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^{2p}}{2p} + \frac{x^{2p+1}}{2p+1}.$$

Exercice 20.19 **(Intégrales de Wallis) ♣ ♡ ***
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\, dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\, dt$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
c) Calculer I_0 et I_1 et en déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, des expressions de I_{2p} et I_{2p+1}.
d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et en déduire que, au voisinage de $+\infty$, $I_{2p} \sim I_{2p+1}$.
e) En déduire que $\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdots\frac{(2p-2)}{(2p-1)}\frac{2p}{(2p-1)}\frac{2p}{(2p+1)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

4 Calculs de primitives et d'intégrales

Pour chacun des exercices suivants, on précisera le domaine de continuité de la fonction proposée, et on en déterminera une primitive sur ce domaine.

Exercice 20.20 $f_n(x) = x^n e^x$ (n étant un entier naturel fixé).

Exercice 20.21 **a)** $f(x) = \arctan x$; **b)** $g(x) = \arcsin x$; $h(x) = \sinh x \cos x$.

Exercice 20.22 **a)** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3+2x^2+2x+1}$; **b)** $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x-1)^4}$.

Exercice 20.23 **a)** $f(x) = \cos^5 x$; **b)** $g(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$.

Exercice 20.24 * **a)** $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; **b)** $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$; **c)** $h(x) = \dfrac{1}{\sinh x}$; **d)** $k(x) = \dfrac{1}{\cosh x}$

Exercice 20.25 **a)** $f(t) = \dfrac{1}{\cos\theta + 2}$; **b)** $g(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{2 \operatorname{ch} t + 1}$; **c)** $h(t) = \dfrac{1}{2 \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t + 1}$.

Exercice 20.26 **a)** $f(t) = \sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$; **b)** $g(t) = (t^2 - t + 3)\sqrt{1+t^2}$.

Exercice 20.27 **a)** $g(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$; **b)** $g(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$; **c)** $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Exercice 20.28 * Calculer : **a)** $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1 - x^6} dx$; **b)** $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin\theta}{(1 + \cos\theta)(3 + \cos 2\theta)} d\theta$.

Exercice 20.29 Représenter la courbe plane paramétrée par :

$$x(t) = \int_0^t \cos 2u.\sin u \, du \quad ; \quad y(t) = \int_0^t \cos u.\sin 2u \, du$$

.

Chapitre 21

Outils supplémentaires pour l'analyse

1 Fonctions convexes

Exercice 21.1 ♣ Soit $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet en $+\infty$ une limite $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
b) On suppose $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto f(x) - ax$ admet en $+\infty$ une limite $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
c) En déduire que la courbe de f admet une branche parabolique ou une asymptote en $+\infty$.

Exercice 21.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 21.3 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que $f(I) \subset J$.
a) On suppose f convexe et g convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
b) Ce résultat reste-t-il vraie sans l'hypothèse de croissance de g ? Que dire si g est décroissante ?

Exercice 21.4 Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Exercice 21.5 ♣ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et $a \in \mathbb{R}$ fixé. On note
$$X_a = \{x \in \mathbb{R}\,;\ f(x) = a\}.$$
a) * Montrer que X_a est soit vide, soit une paire (ensemble à deux éléments), soit un intervalle.
b) *(bonus)* Montrer que, dans le dernier cas, X_a est un intervalle fermé.

Exercice 21.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$.
a) Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
b) * Montrer que l'ensemble des points où ce minimum est atteint est un segment (éventuellement un singleton).

2 Approximation des intégrales

Exercice 21.7 Etudier la convergence de la suite u définie ci-dessous ($a \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé).

a) $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$;

b) $u_n = \dfrac{1}{n}(a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \ldots + a^{\frac{n}{n}})$;

c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

Exercice 21.8 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^4$.
a) Montrer qu'il existe une unique fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, polynomiale de degré $d \leqslant 3$, telle que $g(a) = f(a)$, $f(b) = g(b)$, $g'(a) = f'(a)$ et $g'(b) = f'(b)$. La fonction g est appelée la fonction spline de f sur le segment $[a, b]$.
b) Exprimer le réel $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ en fonction de $f(a)$, $f(b)$, $f'(a)$ et $f'(b)$.
c) Montrer que, pour tout $c \in]a, b[$, il existe $d \in]a, b[$ tel que $f(c) = g(c) + \dfrac{f^{(4)}(d)}{24}(c-a)^2(c-b)^2$.
d) En déduire une majoration de la différence $\displaystyle\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt$ à l'aide du réel $M = \sup\limits_{[a,b]} \left|f^{(4)}\right|$.
e) Proposer une méthode d'approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ en n pas qui converge en $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ tout en n'utilisant que les valeurs de f et de sa dérivée.

Outils supplémentaires pour l'analyse

Quelques exercices en plus

Exercice 21.9 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $n \geqslant 1$ un entier, $a_1, \dots, a_n$ des points de $[a, b]$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.
On note P le polynôme interpolateur de f aux points $a_1, \dots, a_n$.
a) Montrer que la dérivée n-ième $f^{(n)}$ est bornée. On note $\|f^{(n)}\|_\infty = \sup\limits_{[a,b]} |f^{(n)}|$.
b) Soit $c \in [a, b] \backslash \{a_1, \dots, a_n\}$. Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$f(c) = P(c) + \frac{(c - a_1) \dots (c - a_n)}{n!} f^{(n)}(d).$$

c) En déduire que $\left| \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b P(t)\, dt \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\| f^{(n)} \right\|_\infty$.
d) Peut-on améliorer cette majoration ?

3 Séries à termes positifs, formule de Stirling

Exercice 21.10 (Séries de Bertrand)
Soient α et β deux réels. On étudie la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$, où $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.
a) Montrer que $\sum u_n$ diverge si $\alpha < 0$.
b) En comparant avec des séries de Riemann, montrer que $\sum u_n$ diverge si $\alpha < 1$, et converge si $\alpha > 1$. Il reste à étudier le cas où $\alpha = 1$.
c) Pour $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$. Comparer v_n, u_n, u_{n+1}.
d) A l'aide d'un changement de variable, calculer explicitement l'intégrale v_n.
e) Etudier, en fonction de β, la convergence de la série $\sum v_n$, et en déduire celle de $\sum u_n$.

Exercice 21.11 (Critère spécial des séries alternées)
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. L'objectif de l'exercice est de montrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente, c'est-à-dire que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ est convergente.
a) Montrer que les suites extraites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
b) En déduire que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
En notant S sa limite, montrer de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{2n+1} \leqslant S \leqslant s_{2n}$.

Exercice 21.12 A l'aide de la formule de Stirling, déterminer un équivalent simple de $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

4 Approximation

Exercice 21.13 **a)** Expliquer comment la méthode de Newton peut être utilisée pour obtenir des approximations du réel $\sqrt{2}$.
b) Appliquez cette méthode pour obtenir un encadrement de $\sqrt{2}$ entre deux rationnels distants de moins de 10^{-3}.

Exercice 21.14 **(Calcul de $\zeta(2)$)**
Vous étudierez en deuxième année les séries de Fourier. Pour calculer la somme de certaines séries de Riemann, nous admettrons le résultat suivant. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(1)$. On note :

$$a_0(f) = \int_0^1 f(t)\,dt \text{ et, pour } n \geqslant 1, \left\{ \begin{array}{l} a_n(f) = 2\int_0^1 f(t)\cos(2\pi nt)\,dt \\ b_n(f) = 2\int_0^1 f(t)\sin(2\pi nt)\,dt \end{array} \right. .$$

Alors, pour tout $x \in [0,1]$, $\quad f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(2\pi nx) \quad (\star)$
(les deux séries apparaissant dans l'égalité étant bien sûr convergentes).
a) On choisit ici $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x(x-1)$. Montrer que $f(0) = f(1)$, et que les $b_n(f)$ sont tous nuls. Calculer les coefficients $a_n(f)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
b) En appliquant l'égalité $(\star)$ en $x = 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
c) En appliquant cette méthode aux polynômes de Bernoulli (*cf.* poly de problèmes), calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le réel $\displaystyle\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$.

Exercice 21.15 On admet la formule $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

a) A l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$.
b) * Donner le signe, et une majoration de la valeur absolue, de la différence $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$.
c) En déduire une valeur rationnelle approchée de π^2 à un dixième près par excès.

Exercice 21.16 On cherche ici une approximation rationnelle du nombre π. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $f = \arctan$. Rappelons que $\pi = 4f(1)$.

a) Déterminer le polynôme de Taylor de la fonction f à l'ordre $2n+1$ en 0.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f^{(2n+2)}(x)| \leqslant (2n+1)!$.

c) Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f entre 0 et 1. Montrer que le reste tend vers 0. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right).$$

d) Montrer que $\dfrac{\pi}{4} = 1 - S$, où $S = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{16p^2-1}$ (série convergente).

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{2}{16p^2-1}$ et $r_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{2}{16p^2-1}$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{2}{16p^2-4}$ est convergente. En réduisant son terme général en éléments simples, montrer qu'il s'agit d'une série télescopique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{2}{16p^2-4}$.

f) Calculer t_n.

g) Montrer que $0 \leqslant t_n - r_n \leqslant \dfrac{1}{16} \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{6}{(4p^2-1)(4p^2-9)}$.

Calculer cette dernière somme (on montrera encore que c'est une somme télescopique).

En déduire que $\pi = 4(1 - s_n - t_n) + \varepsilon_n$, avec $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{4(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.

h) En prenant $n = 1$, montrer que $3 + \frac{2}{15}$ est une approximation de π à $\frac{1}{60}$ près par défaut.

i) Quelle approximation de π obtient-on pour $n = 2$, et avec quelle précision ?

Chapitre 22

Manipulation des matrices, systèmes linéaires, déterminant

1 Systèmes linéaires et matrices

Exercice 22.1 (Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)
a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Calculer les produits AE_{ij} et $E_{ij}A$.
b) Déterminer le centre de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA$.

Exercice 22.2 Déterminer, en fonction du réel a, le rang de la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & a & 3 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 22.3 On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
En résolvant le système associé, montrer que la matrice A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 22.4 On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Par des manipulations élémentaires, montrer que les matrices A et B sont inversibles ; calculer leurs inverses et leurs déterminants.

Exercice 22.5 ♣ * Soient n et k deux entiers tels que $n \geqslant k \geqslant 0$. On considère la matrice $A = [a_{i,j}]_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ (de taille $n+1$) définie par $a_{i,j} = (i+j)^k$.
a) A l'aide de manipulations élémentaires sur les colonnes de A, déterminer son rang.
b) A l'aide de manipulations sur les lignes, calculer le déterminant de A lorsque $n = k+1$.

Exercice 22.6 Résoudre, lorsqu'il n'est pas de Cramer, le système :

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = m+2 \\ 2x + my + 2z = m^2 + 3 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = 2m^3 - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} + 5 \end{cases}.$$

Exercice 22.7 ♣♣ * Soient $n \geqslant 3$ un entier, et $A_1, \dots, A_n$ des points du plan complexe. Existe-t-il un polygône à n sommets dont les milieux des côtés soient les points A_i ?

Exercice 22.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $\mathscr{P}(n)$ la proposition :

$$\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad \forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k P(X+k).$$

a) Montrer que la proposition $\mathscr{P}(n)$ équivaut à l'existence d'entiers relatifs a_1, ..., a_n tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 \qquad \text{et, pour tout } p \in [\![1, n-1]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} k^p a_k = 0.$$

b) Résoudre ce système et en déduire que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
c) Proposer une solution directe utilisant l'application $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

2 Déterminants

Exercice 22.9 * Déterminer une expression factorisée des déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b & a & c \\ b & a & c & a \\ a & c & a & b \\ c & a & b & a \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 22.10 On note α, β et γ les racines complexes du polynôme $X^3 - X + 1$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 2 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 2 \end{cases}$.

Exercice 22.11 **(Déterminant de Vandermonde d'ordre $n+1$) ♣**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $x_0, \dots, x_n$ des réels, et $v_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

a) Au moyen de manipulations élémentaires sur les rangées, montrer que :

$$v_n = (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}) v_{n-1}.$$

b) En déduire une expression factorisée de D_n en fonction de $x_0, \dots x_n$.

c) *(bonus)* Chercher un lien avec le problème de l'interpolation polynomiale en $n+1$ points $x_0, \dots, x_n$.

Exercice 22.12 Soit $a \in \mathbb{C}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le déterminant d'ordre $n+1$:

$$d_n = \begin{vmatrix} 2a & a+1 & & (0) \\ a-1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a+1 \\ (0) & & a-1 & 2a \end{vmatrix}.$$

a) Calculer d_0 et d_1.

b) * Déterminer une relation entre d_n, d_{n-1} et d_{n-2}, pour tout $n \geqslant 2$.

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de d_n en fonction de n.

Exercice 22.13 * On considère, pour $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, le déterminant d'ordre n :

$$d_n(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix}.$$

Calculer, sous forme factorisée, le déterminant $d_n(\alpha)$, et préciser pour quelles valeurs de α il s'annule.

Chapitre 23

Espaces vectoriels euclidiens

1 Produits scalaires, orthogonalité

Exercice 23.1 Montrer que l'on définit un produit scalaire sur l'espace $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ en posant :

$$\forall (f,g) \in E^2, \qquad \langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 [f(t)+f'(t)].[g(t)+g'(t)]dt.$$

Exercice 23.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k = 1$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^n (x_k)^2 \geqslant \frac{1}{n}$. Préciser le cas où il y a égalité.

On appelle valeur moyenne d'une fonction f continue sur $[a,b]$ le réel $\mu(f) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Exercice 23.3 ♣ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et à valeurs strictement positives.

a) Démontrer que $\mu(f)\mu(\frac{1}{f}) \geqslant 1$.

b) A quelle condition nécessaire et suffisante sur f a-t-on égalité ?

Exercice 23.4 Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_0,\dots x_n$ des réels distincts. Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^n P(x_i)Q(x_i).$$

a) φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$?

b) Montrer que la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]^2$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Montrer que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ des polynômes interpolateurs de Lagrange en les points $x_0,\dots,x_n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) On prend ici $n=3$ et $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Déterminer l'orthogonalisée de Schmidt de la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 23.5 (Du nouveau sur les polynômes de Legendre) ♣

Soit n un entier naturel non nul. Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on pose $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Pour $n=4$, calculer l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique $(1,\dots,X^4)$ de $\mathbb{R}_4[X]$.

Rappelons que, pour $k \in \mathbb{N}$, le k-ième polynôme de Legendre est $L_k = \Phi_k^{(k)}$, où $\Phi_k = (X^2-1)^k$.

c) Calculer L_0, L_1, L_2, L_3, L_4. Que remarque-t-on ?

d) * Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, montrer que la famille $(L_0,\dots,L_n)$ est orthogonale, et calculer les normes des L_i.

e) *(bonus)* Montrer que la famille des $\frac{1}{\|L_i\|}L_i$ est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique.

Exercice 23.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(P) = \displaystyle\sum_{j=0}^n \left(X^j \int_{-1}^1 t^j P(t)dt\right)$.

a) Montrer que, si $u(P)=0$, alors $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt = 0$ pour tout polynome $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) En déduire que l'application u est un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Former la matrice M de u dans la base $(1,X,\cdots,X^n)$. Est-elle inversible ?

d) ♣♣ * En vous reportant à l'exercice **23.5**, calculer le déterminant de la matrice M.

Exercice 23.7 Soit E un espace vectoriel euclidien, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $F \subset G$ implique $G^\perp \subset F^\perp$.

b) Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
c) Ces propriétés restent-elles vraies en dimension infinie ?

Exercice 23.8 Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et A une partie de E.
Montrer que $A^{\perp} = (\operatorname{vect} A)^{\perp}$.

Exercice 23.9 ♣ Soit s une symétrie de l'espace vectoriel euclidien E.
Montrer l'équivalence des trois propositions :
(i) $\forall x \in E,\ \|s(x)\| \leqslant \|x\|$; *(ii)* $\forall x \in E,\ \|s(x)\| \geqslant \|x\|$; *(iii)* s est une symétrie orthogonale.

Exercice 23.10 ♣ Soit p un projecteur de l'espace vectoriel euclidien E.
Montrer l'équivalence des propositions :
(i) $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$; *(ii)* p est un projecteur orthogonal.

Exercice 23.11 (Application des projecteurs aux problèmes d'optimisation)
Soit E un espace euclidien, et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur orthogonal de E. On note $F = \operatorname{im}\ p$.
a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| = \|x\| \iff x \in F$.
b) Pour $x \in E$, on appelle distance de x à F le réel $d(x,F) = \inf\limits_{y \in F} \|x-y\|$.
Montrer que $d(x,F) = \|x - p(x)\|$ et que, pour tout $y \in F$, $\|x-y\| = d(x,F) \iff y = p(x)$.

Exercice 23.12 ♣ * Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{I}$) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) et continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Exprimer, en fonction des parties paires et impaires de f, le réel $I = \inf\limits_{g \in \mathscr{P}} \displaystyle\int_{-1}^{1} [f(t) - g(t)]^2 dt$.

Exercice 23.13 * Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $P_{a,b} = X^2 - aX - b$. Déterminer le réel :

$$I = \inf \left\{ P_{a,b}(0)^2 + P_{a,b}(1)^2 + P_{a,b}(2)^2 \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 23.14 Soit E un espace vectoriel euclidien, $n = \dim E$ et p un projecteur orthogonal de E. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ et une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(p) = J_{n,n,r}$.

2 Automorphismes orthogonaux

Dans les exercices suivants, E est un espace vectoriel euclidien.

Exercice 23.15 ♣ Soit $u : E \to E$ une application, *a priori* quelconque. Montrer que, si u conserve le produit scalaire, alors u est linéaire.

Exercice 23.16 ♣ Soit E un espace vectoriel euclidien, et f, g deux endomorphismes de E tels que :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|g(x)\|.$$

a) Montrer que, si f est inversible, alors il existe un unique $u \in O(E)$ tel que $g = u \circ f$.
L'objectif des questions suivantes est de montrer l'existence d'un tel u dans le cas général. On notera désormais $n = \dim E$, $r = \operatorname{rang} f$, et $K = \ker f$.
b) Montrer que $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle g(x), g(y) \rangle$.
c) Montrer que $\ker f = \ker g$.
d) Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une base orthonormale de $\operatorname{im}\ f$. Montrer qu'il existe des éléments $e_1, \ldots, e_r$ de E tels que, pour $i \in [\![1,r]\!]$, $f_i = f(e_i)$, et que $S = \operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_r)$ est un supplémentaire de K.
e) Montrer que la famille $(g_1, \ldots, g_r)$ définie par $g_i = g(e_i)$ est une base orthonormale de $\operatorname{im}\ g$.
f) Rappeler pourquoi les familles $(f_1, \ldots, f_r)$ et $(g_1, \ldots, g_r)$ peuvent être complétées en des bases orthonormales $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ et $\mathscr{G} = (g_1, \ldots, g_n)$ de E. On note alors u l'endomorphisme de E tel que $Mat_{\mathscr{F},\mathscr{G}}(u) = I_n$. Montrer que : *(i)* $u \in O(E)$; *(ii)* $g = u \circ f$.
g) *(bonus)* L'automorphisme orthogonal u est-il unique ?

Exercice 23.17 ♣ * Soient a, b deux vecteurs de E distincts et de même norme. Montrer qu'il existe une unique réflexion orthogonale s de E telle que $s(a) = b$.

Exercice 23.18 ♣♣ * Soit $u \in O(E)$, $n = \dim E$, et $k = n - \dim(\operatorname{inv} u)$. Montrer qu'il existe exactement k réflexions orthogonales $s_1, \ldots, s_k$ de E telles que $u = s_1 \circ \ldots \circ s_k$.

Chapitre 24

Géométrie euclidienne de l'espace et du plan

1 Géométrie vectorielle euclidienne

Exercice 24.1 Démontrer que trois vecteurs x, y et z de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $x \wedge y$ et $y \wedge z$ sont colinéaires.

Exercice 24.2 Soit n un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto n \wedge (n \wedge x)$.
a) Montrer que u est linéaire. Déterminer son image et son noyau (exprimer en fonction de n).
b) Interpréter géométriquement l'application u.

Exercice 24.3
a) Déterminer tous les automorphismes orthogonaux u de $\mathbb{R}^2$ tels que $u^2 = -Id_{\mathbb{R}^2}$.
b) En existe-t-il dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 24.4 On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. On note P le sous-espace engendré par les vecteurs $a = (1, 1, 1)$ et $b = (1, -1, 1)$.
a) Donner une base orthonormale de P, et une base orthonormale de $D = P^{\perp}$.
b) Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur P.
b) Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la symétrie orthogonale par rapport à P.

Exercice 24.5 Soit $U \in \mathscr{M}_{31}(\mathbb{R})$ une matrice colonne non nulle, et $A = I_3 - \frac{2}{{}^tUU} U\,{}^tU$.
a) Montrer que A est une matrice symétrique et othogonale. Calculer A^2, et en déduire A^{-1}.
b) Déterminer $\mathrm{inv}(A)$ et $\mathrm{opp}(A)$.

Exercice 24.6 Soit r une rotation d'angle θ de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$.
a) Montrer que $\mathrm{tr}(r) = 1 + 2\cos\theta$.
b) On suppose ici $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$. Soit a un vecteur directeur orientant l'axe Δ de la rotation r. Montrer que, pour tout vecteur x n'appartenant pas à Δ, le réel $\mathrm{Det}(a, x, r(x))$ est non nul et du signe de $\sin\theta$.

Exercice 24.7 Soit $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Pour chacune de ces matrices, montrer qu'elle est orthogonale, et caractériser géométriquement l'automorphisme associé dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 24.8 E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit $u \in O^-(E)$. On suppose de plus que u n'est pas une réflexion.
a) On pose $v = -u$. Montrer que v est une rotation.
b) Démontrer que u est la composée d'une rotation r d'angle non nul et de la réflexion s par rapport au plan orthogonal à l'axe de cette rotation (on pourra s'aider un dessin).
c) Montrer de plus que r et s commutent. Le couple (r, s) est-il unique * ?
d) Démontrer que u est la composée de trois réflexions.

Exercice 24.9 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme associé à la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
a) Montrer que $u \in O^-(E)$.
b) Déterminer le couple (r, s) défini à l'exercice précédent, et donner leurs matrices R et S dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2 Transformations affines

Pour ce chapitre, P (resp. E) désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 (resp. 3).

Exercice 24.10 On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien orienté. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{5}(3x - 4y + 6, 4x + 3y - 2)$. Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^2$; déterminer sa nature et ses caractéristiques.

Exercice 24.11 On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien orienté. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{3}(2x - y - z + 3, 2x + 2y + z, x - 2y + 2z)$. Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$; déterminer sa nature et ses caractéristiques.

Exercice 24.12 ♣ Montrer que tout antidéplacement de l'espace E est une réflexion glissée ou la composée d'une réflexion (par rapport à un plan H) et d'une rotation (d'axe D orthogonal à H), qui commutent.

Exercice 24.13 Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace E. Déterminer la nature et les caractéristiques de la composée $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_A$ de la symétrie de centre A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Exercice 24.14 Soient A et B deux sous-espaces affines d'un espace vectoriel euclidien E. On note $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ leurs directions. On suppose que $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = E$. Montrer que $A \cup B \neq \varnothing$.

Exercice 24.15 ♣
a) Comment définir, modulo π, l'angle orienté de deux droites vectorielles $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D}'$ du plan P ?
b) Comment définir, dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, l'angle non-orienté de deux droites $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D}'$ de l'espace E ?

Exercice 24.16 *
Soient D et D' deux droites affines de l'espace E. Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'angle de leurs directions $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D}'$. On note s et s' les réflexions affines orthogonales par rapport à D et D', et $f = s' \circ s$.
a) On suppose les droites D et D' parallèles. Déterminer la nature de f.
b) ♣ On suppose les droites D et D' sécantes. Montrer que f est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle.
c) ♣♣ On suppose les droites D et D' non coplanaires. Déterminer la nature de l'isométrie f, et donner ses caractéristiques.
Pour toutes ces questions, on est fortement encouragé(e) à faire un dessin !

Exercice 24.17 ♣ * Soit f une isométrie quelconque de l'espace E, et P un plan affine de E. On note s la réflexion par rapport au plan P, et $s' = f \circ s_P \circ f^{-1}$.
Montrer que s' est une réflexion par rapport à un plan P' que l'on précisera.

Exercice 24.18 On note G l'ensemble des translations et des symétries centrale du plan P (ou de l'espace E). Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe. Ce groupe est-il abélien ?

Exercice 24.19 ♣ Déterminer l'ensemble G des isométries du plan P laissant globalement invariant :
a) un carré ; **b)** un rectangle non carré ; **c)** un cercle ;
d) la réunion de deux droites parallèles distinctes.
Dans chaque cas, vérifier que $(G, \circ)$ est un groupe. Pouvez-vous le démontrer de façon générale ?

Exercice 24.20 **a)** Soit Γ une conique du plan P, et $f : P \to P$ une similitude de P. Montrer que $\Gamma' = f(\Gamma)$ est une conique dont on précisera l'excentricité, une directrice et un foyer en fonction de ceux de Γ.
b) A quelle conditions deux coniques Γ et Γ' sont-elles directement semblables (c'est-à-dire qu'il existe une similitude directe transformant Γ en Γ') ?

Chapitre 25

Fonctions de plusieurs variables

1 Continuité, calcul différentiel

Exercice 25.1 ♣ Etudier la continuité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ si $x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}$ et $f(x, y) = 0$ sinon.

Exercice 25.2 ♣♣ * Soient f et g deux applications bornées de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $S(x, y) = \sup\{xf(t) + yg(t),\ t \in [0, 1]\}$. Montrer que S est une application continue.

Exercice 25.3 Dans chaque cas, étudier la limite éventuelle pour $(x, y) \to (0, 0)$ de $f(x, y)$:
a) $f(x, y) = \dfrac{xy^6}{x^6 + y^8}$; **b)** $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^4) + \sin(y^4)}{\sqrt{x^4 + y^4}}$.

Exercice 25.4 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{y^2} \varphi(t)dt$.
Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 25.5 Rechercher les extrema locaux et globaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2.$$

Exercice 25.6 ♣♣ * Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$.
On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant $f(x, x) = \varphi'(x)$ et, pour $x \neq y$, $f(x, y) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}$.
Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

2 Equations fonctionnelles

Exercice 25.7 Dans les deux cas suivants, trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle proposée :
a) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0$;
b) $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad f(x, y) + f(z, t) = f(x, z) + f(y, t)$.

Résoudre les équations aux dérivées partielles :

Exercice 25.8 ♣ * $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xe^{2y}$.

Exercice 25.9 ♣ * $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{3x+2y}$.

Exercice 25.10 ♣♣ * $2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 25.11 Calculer $\displaystyle\iint_D x(y - e^y)\, dxdy$, où $D = \big\{(x, y) \in (\mathbb{R}+)^2 \mid x + y \leqslant 1\big\}$.

Exercice 25.12 * Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\, dxdy$, où $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x,\ x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\big\}$.

Chapitre 26

Compléments de géométrie différentielle

1 Champs de vecteurs

2 Propriétés métriques des courbes paramétrées

Exercice 26.1 ♣
Soit Γ un arc régulier de $\mathbb{R}^2$, dont le point courant sera noté $M(t)$, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que f est constante sur l'arc Γ.
Montrer que, pour tout $M \in \Gamma$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M)$ est normal à la tangente D à Γ au point M.

C'est ainsi qu'on prouve la caractérisation des tangentes aux coniques comme des bissectrices. Ce résultat admet une (immense) généralisation : le théorème des fonctions implicites.

Exercice 26.2 Déterminer l'aire de la cardioïde d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$.

Exercice 26.3 **(Deltoïde)** (voir l'exercice **7.6**)
Représenter, et calculer la longueur de l'arc défini par le paramétrage : $x(t) = 2\cos t + \cos 2t$, $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$.

Exercice 26.4 L'arc Γ est défini par le paramétrage : $x(t) = (1-t)^2 e^t$, $y(t) = 2(1-t)e^t$.
* Représenter Γ (sans doute fait en cours), puis calculer le périmètre et l'aire de la boucle de Γ.

Exercice 26.5 L'arc Γ est donné par l'équation polaire $r = \dfrac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{3}}$ (voir l'exercice **7.8**).
Après l'avoir représenté, en donner une abscisse curviligne, et calculer la longueur de sa boucle.

Exercice 26.6 **(Astroïde)**
Calculer le rayon de courbure de l'astroïde, aux points où elle coupe les bissectrices du repère.

Exercice 26.7 **(Hyperbole)**
Calculer le rayon de courbure de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ aux points d'ordonnée nulle.

Exercice 26.8 **(Cycloïde)**
Soit $a > 0$ fixé, et Γ l'arc défini par le paramétrage $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$.
a) Représenter l'arc Γ (on étudiera sa birégularité).
b) Calculer une abscisse curviligne de l'arc Γ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. On précisera en particulier la longueur d'une «arche» de la cycloïde Γ.
c) Calculer le rayon de courbure de Γ au point $t = \pi$.

Exercice 26.9 **(Pendule à joues cycloïdales) ♣♣**
On considère ici l'arc Γ défini par le paramétrage $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(\cos t - 1)$, pour $t \in [-\pi, \pi]$ (c'est à dire «presque» un morceau de la cycloïde de l'exercice précédent).

Un pendule de longueur $4a$ est suspendu à l'origine O du repère. Ce pendule se balance en étant entravé par l'arc Γ : lors de son mouvement, une partie du fil de suspension épouse l'arc Γ jusqu'à un point A, tandis que la partie restante est rectiligne, portée par la tangente à Γ au point A. Le fil est bien sûr inextensible.

Déterminer la trajectoire de l'extrémité B du pendule.

Indications

Chapitre 1

1.7 : On pourra s'aider d'un dessin (qui ne remplace pas pour autant la démonstration). On démontrera séparément les deux implications.
1.11 : d) Calculer $f(x)$ et $f(-x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, et en déduire $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.
1.14 : On discutera bien sûr selon la valeur du réel a.
1.17 : On pourra penser à calculer : $C_n + D_n$, $C_n - D_n$, $E_n + iF_n$. On n'hésitera pas à distinguer les cas n pair / n impair, et à écrire les sommes avec des pointillés, par exemple, pour n impair, $C_n = \binom{2q+1}{0} + \ldots + \binom{2q+1}{2q}$.
1.18 : Deux techniques possibles : l'une utilise la fonction $x \mapsto (1+x)^n$ et ses dérivées ou primitives, l'autre la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
1.19 : On pourra considérer la somme $E_n = C_n + iS_n$, et y reconnaître une suite géométrique.

Chapitre 2

2.5 : On pourra comparer les réel e et $2\sqrt{2}$, et utiliser (là où il est valable) l'encadrement $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.
2.7 : On pourra utiliser la formule $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$, sans oublier de se demander à quels intervalles appartiennent θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$. On pourra aussi étudier la fonction $x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.
2.8 : Là encore, on peut utiliser des formules de trigonométrie, ou raisonner par étude de fonction(s). On trouvera $\varepsilon = 0$ si $ab < 1$, et $\varepsilon = \pm 1$ (suivant le signe de a) si $ab > 1$.
2.9 : On montrera que, si f n'est pas l'application nulle, alors d'une part f ne s'annule pas, et d'autre part f est à valeurs positives. On appliquera alors le résultat précédent à l'application $g = \ln \circ f$.

Chapitre 3

3.3 : Vous n'arriverez à rien sans tracer le graphe de la fonction f...
3.6 : Pour les questions **a)** et **b)**, et pour les implications de gauche à droite dans les questions **c)** et **d)**, il faut (et il suffit de) revenir aux définitions de l'image directe et de l'image réciproque.
3.7 : On pourra envisager deux raisonnement : l'un direct, et l'autre démontrant la contraposée.
3.8 : a) La condition est $A \cup B = E$. **b)** La condition est $A \cap B = \varnothing$. Etant données des parties Y et Z de A et B, on pourra rechercher un antécédent du couple (Y, Z).
3.9 : Pour une application $\varphi : E \to \mathscr{P}(E)$, on pourra montrer que la partie $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$ n'a pas d'antécédent par φ.
3.12 : On pourra appliquer l'équation $(\star)$ à $\bar{z}$.
3.24 : On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $Z = z + \frac{1}{z}$.
3.27 : On pourra remarquer que, si z est solution, alors $|z| = |z+1| = 1$.

Chapitre 4

4.5 : On pourra commencer par montrer que φ_a est injective.

Chapitre 5

5.10 : On pourra considérer les parties paire et impaire de f.
5.11 : Après avoir déterminer g à une constante près, on pourra encadrer la constante d'intégration grâce au fait que, pour tout x, $g(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
5.12 : Après avoir justifié que g est deux fois dérivable, on exprimera les fonctions f, f' et f'' en fonction de g, g' et g''.
5.13 : On pourra faire le «changement de variable» $x = \sin t$.

Chapitre 6

6.7 : On pourra montrer d'abord que $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \det(\vec{BC}, \vec{BA})$.
6.8 : a) Ecrire à l'aide du déterminant ce que signifie l'alignement des points A, B, C, puis tranformer l'équation obtenue. **b)** Dans le cas où les droites sont concourantes en un point I, écrire I comme barycentre des points A, B et C.

6.11 : c) On pourra montrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=0$. **d)** On pourra montrer que les médiatrices du triangle ABC sont les hauteurs de $A'B'C'$.
6.13 : Dans chaque cas, on pourra transformer l'équation en faisant intervenir le milieu I du segment $[AB]$.
6.14 : Là encore, on pourra transformer l'équation en faisant intervenir un point bien choisi.
6.16 : On pourra remarquer que l'équation $(\star)$ se ramène à une condition sur l'angle $\widehat{AMB}$.

Chapitre 7

7.6 : Si $M'(x',y')$ est l'image de $M(x,y)$ par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, on pourra exprimer x', y' en fonction de x, y.
7.9 : Attention : vous devez étudier précisément le signe de r, et grossièrement ses variations ; mais il est inutile de déterminer précisément tous les points d'annulation de la dérivée.
7.10 : On pourra étudier d'abord le signe de la dérivée seconde de la fonction f.

Chapitre 8

8.2 : On pourra utiliser (en l'interprétant correctement) le changement de variable $X=\frac{1}{5}(4x+3y)$, $Y=\frac{1}{5}(-3x+4y)$.
8.6 : En notant $\mathscr{C}$ la conique passant par A et B, on pourra distinguer le cas où $\mathscr{C}$ est une ellipse de celui où $\mathscr{C}$ est une hyperbole, et utiliser la caractérisation bifocale de ces coniques.
8.7 : On pourra faire intervenir le symétrique de M' par rapport à D.
8.8 : On se placera dans un ROND dont l'origine est le centre O du rectangle, et les axes sont parallèles à ses côtés. Etant donnés deux points F et F', on caractérisera l'ellipse de foyers F et F' tangente à (AB) (respectivement (BC), (CD), (DA)), et on se demandera à quelle condition ces quatres ellipses sont confondues.

Chapitre 9

9.1 : On commencera par écrire, en quantificateurs, la proposition «a est le plus petit (resp. plus grand) élément de $\mathbb{N}$ pour la relation $|$ ».
9.2 : On montrera que la relation n'est pas totale si X possède au moins deux éléments distincts.
9.6 : On démontrer par récurrence sur n la proposition : $\forall p \in \mathbb{N},\ C(n,p)=\binom{n}{p}$.
9.7 : On pourra écrire w_n en fonction des u_i puis intervertir les sommations.
9.11 : La condition recherchée est que A ou B soit contenue dans $\mathbb{R}^+$, ou qu'elle soient toutes deux minorées en plus d'être majorées. Reste à prouver qu'elle est suffisante et surtout nécessaire...
9.13 : On pourra étudier sur $[0,1]$ la fonction $t \mapsto t(1-t)$. On utilisera la caractérisation des bornes supérieures.
9.15 : a) On pourra utiliser le fait que les intervalles sont aussi les parties convexes de $\mathbb{R}$. **b)** Pour $(a,b)\in I^2$, $(a',b')\in J^2$ et $y\in\mathbb{R}$ tel que $aa'\leqslant y\leqslant bb'$, on pourra distinguer les cas $y\leqslant ab'$ et $y\geqslant ab'$.
9.16 : On pourra utiliser la définition ou la caractérisation de la partie entière.
9.20 : Comment caractériser les réels positifs, à l'aide uniquement de la multiplication ?

Chapitre 10

10.2 : a) On discutera bien sûr suivant les valeurs relatives de a et b.
10.3 : a) On montrera que la suite v définie par $v_n=u_n\sin\frac{\theta}{2^n}$ est une suite géometrique. **b)** Si $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, on montrera que $v_n\to 0$, en montrant que $|\cos(n\theta)|\not\to 1$.
10.4 : On pourra reconnaître une somme télescopique.
10.12 : On pourra montrer que, si $b\notin\mathbb{R}^-$, alors $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n\notin\mathbb{R}^-$, et écrire dans ce cas w_n sous forme trigonométrique.
10.16 : Pour ce dernier exemple, plus difficile, on pourra étudier la suite définie par : $u_n=2+\sin(\sqrt{n})$, en utilisant l'identité $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ pour prouver que $u_{n+1}-u_n\to 0$.
10.18 : On pourra montrer que $\forall M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}, \exists p\geqslant n, u_p\geqslant M$, puis construire par récurrence les entiers $\varphi(k),\ k\in\mathbb{N}$.

Chapitre 11

11.2 : On pourra s'inspirer de l'exercice **2.3**.
11.6 : On pourra montrer que $\sum_{k=1}^{p} v_f(x_k)+\sum_{k=1}^{p-1}(f_g(x_{k+1}-f_d(x_k))=f_g(b)-f_d(a)\leqslant f(b)-f(a)$
11.10 : En notant $f(x)=2x-x^3$, on aura intérêt à rechercher les points fixes de $f\circ f$.
11.17 : On raisonnera par l'absurde en supposant la suite bornée et en montrant qu'il existe alors $\alpha>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ f(x_n)\geqslant\alpha$.

11.18 : On utilisera le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que $f(0) = 0$.
11.19 : On pourra montrer qu'il existe un intervalle de longueur $r > 0$ sur lequel f ne prend pas la valeur $f(0)$, et en déduire que $a \geqslant r$.
11.21 : On pourra remarquer que, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(a) = f(x - a)$.

Chapitre 12

12.3 : On pourra d'abord supposer $x \leqslant y \leqslant z$, et montrer que $x \leqslant 3$.
12.4 : Là aussi, on pourra d'abord supposer $x \leqslant y \leqslant z$. En notant $x + y = nz$, on étudiera les valeurs possibles de n.

Chapitre 13

13.2 : En notant $Q = \lambda X + \mu$, on montrera qu'il existe une valeur de μ telle que le polynôme $P - Q$ s'annule en une infinité de réels.
13.4 : On se rappellera que $P(0) = a_0$, et on vérifiera que $p - kq$ est premier avec q.
13.11 : Penser à la quantité conjuguée.
13.21 : On pourra faire un développement limité de x et y en $t = 0$, pour simplifier le calcul de leurs dérivées successives en ce point.

Chapitre 14

14.5 : Attention : on ne suppose pas que la fonction f est dérivable.
14.6 : On pourra étudier la suite w définie par $w_n = v_n - u_n f'(0)$.
14.11 : Montrer qu'il existe une valeur que la fonction f prend au moins deux fois par période.
14.14 : On pourra introduire une fonction g telle que $g(a) = g'(a) = g(b) = 0$, et utiliser le théorème de Rolle.
14.16 : On pourra introduire une fonction g telle que $g(a) = g(c) = g(b) = 0$, et utiliser le théorème de Rolle.
14.17 : On pourra utiliser l'égalité des accroissements finis.
14.18 : On pourra remarquer que g induit une bijection de $[a, +\infty[$ sur un intervalle à préciser, et étudier $h = f \circ g^{-1}$.

Chapitre 15

15.9 : b) On pourra distinguer suivant que le module de α est égal à ou différent de 1. **c)** Le plus difficile est de montrer que f est surjective si $|\alpha| \neq 1$. En notant $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, on pourra calculer $f(e^{i\frac{\theta}{2}})$ et $f(ie^{i\frac{\theta}{2}})$.
15.11 : On raisonnera par l'absurde pour prouver que non, en étudiant, par exemple, $\ker(\mathrm{Id})$, $\ker T$ et $\ker T^2$.

Chapitre 16

16.3 : On montrera que c'est aussi le nombre de parties à p éléments de $[\![1, q]\!]$.
16.5 : b) On pourra observer que $\operatorname{Card} A + \operatorname{Card} \bar{A} = \operatorname{Card} E$. **c)** On pourra grouper les termes de la somme S.
16.9 : On pourra faire le lien avec l'exercice précédent, ou traiter celui-ci indépendamment.
16.12 : On pourra commencer par montrer que φ_a est injective.

Chapitre 17

17.4 : Pour déterminer la dimension, on pourra appliquer le théorème du rang à l'application $u : E \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \ldots + x_n$.
17.7 : En notant λ_x le «λ» (unique ?) associée à x, on montrera que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\lambda_x = \lambda_y$. On pourra distinguer suivant que la famille (x, y) est libre ou liée.
17.12 : On pourra commencer par montrer que c'est une famille libre.
17.14 : On pourra considérer des bases adaptées de E et F.

Chapitre 18

18.3 : On pourra envisager deux méthodes : soit considérer un endomorphisme de matrice A ; soit prouver d'abord le résultat pour une matrice du type $J_{n,n,r}$, puis généraliser.
18.5 : Là encore, deux points de vue possibles : matrices ou applications linéaires.
18.10 : On pourra utiliser la formule du binôme de Newton

Chapitre 19

19.5 : a) On pourra étudier les racines de ces deux polynômes. **b)** On supposera, pour simplifier, que n peut s'écrire $n = pq - 1$, et on pourra grouper les monômes de P par paquets de p.

19.7 : On pourra considérer, si $B \neq 0$, la division euclidienne de A par B.

19.10 : On pourra commencer par le cas où les racines de P sont toutes simples, et utiliser, bien sûr, le théorème de Rolle !

19.11 : En étudiant les racines réelles et complexes de P, on montrera qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q\bar{Q}$.

Chapitre 20

20.6 : On pourra commencer par calculer l'intégrale en remplaçant $\cos t$ par sa limite en 0.

20.7 : On pourra comparer à $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt$.

20.8 : Pour les question b et c, on aura intérêt à introduire $\varepsilon \in]0, b-a[$ fixé, et à couper l'intégrale en deux en un un réel c «proche» de b.

20.17 : Attention, il ne s'agit pas de la formule de Taylor-Young !

20.19 : a) On pourra utiliser un changement de variable. **b)** On pourra utiliser une intégration par parties.

20.24 : On pourra appliquer les règles de Bioche.

20.28 : a) On pourra repérer un changement de variable «habile» avant de se précipiter sur la décomposition en éléments simples.

Chapitre 21

21.5 : On montrera que, si X_a contient trois points $x < y < z$, alors X_a contient le segment $[x, z]$.

21.6 : On pourra bien sûr utiliser l'exercice précédent.

21.15 : On peut trouver, par exemple, $0 \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \frac{-1}{3(n+1)n(n-1)}$.

Chapitre 22

22.5 : On commencera par $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$. Pour généraliser le résultat obtenu, on pourra faire intervenir l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

22.7 : On montrera que ce problème se traduit par un système de n équations à n inconnues complexes, et on étudiera, suivant la parité de n, la compatibilité de ce système.

22.9 : Le développement «à la barbare» est bien sûr déconseillé !

22.12 : On pourra développer par rapport à la première colonne.

22.13 : Si l'ordre n est intimidant, on pourra commencer par $n = 3$ ou 4.

Chapitre 23

23.5 : On pourra calculer $\langle L_i, L_j \rangle$ au moyen d'intégrations par parties successives.

23.6 : On montrera que $M = {}^tPP$, où P est la matrice de passage de la base des $\frac{1}{\|L_i\|} L_i$ à la base canonique, puis on calculera le déterminant de P. Ne cherchez pas à obtenir une expression très simple !

23.12 : On pourra montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont orthogonaux dans $\mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ pour un produit scalaire bien choisi, et utiliser l'exercice précédent.

23.13 : On pourra introduire un produit scalaire bien choisi sur $\mathbb{R}_2[X]$, et interpréter I comme le carré de la distance de X^2 à un certain sev de $\mathbb{R}_2[X]$.

23.17 : On pourra commencer par faire un dessin, et étudier $Inv(s)$ et $Opp(s)$.

23.18 : Si $k \geqslant 1$, on pourra utiliser l'exercice précédent pour montrer qu'il existe une réflexion orthogonale s telle que $\dim(\mathrm{inv}(s \circ u) = n - k + 1$.

Chapitre 24

24.8 : On pourra étudier $Opp(u)$

24.16 : a) On commencera par étudier les parties linéaires de s, s' et f. **b)** On recherchera d'abord l'ensemble des invariants de f. **c)** On fera intervenir la perpendiculaire commune aux droites D et D', après avoir déterminer la partie linéaire de f.

24.17 : On pourra rechercher l'ensemble des invariants de s'.

Chapitre 25

25.2 : On pourra montrer que S est k-lipschitzienne (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$, et la valeur absolue de $\mathbb{R}$), avec $k = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

25.6 : On pourra utiliser une formule de Taylor

25.8 : On pourra remarquer que f est solution ssi l'application $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie l'EDP $g + \frac{\partial g}{\partial y} = xe^{2y}$.

25.9 : On pourra faire le changement de variable $x = 2a$, $y = -3a + b$.

25.10 : Pour trouver le «bon» changement de variables, on pourra factoriser le polynôme de deux variables : $2X^2 - 3XY - 2Y^2$.

25.12 : On aura intérêt à passer en coordonnées polaires.

Chapitre 26

26.4 : Le périmètre, par exemple, sera $\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \sqrt{x'(t) + y'(t)}\, dt$.