

# Dérivation

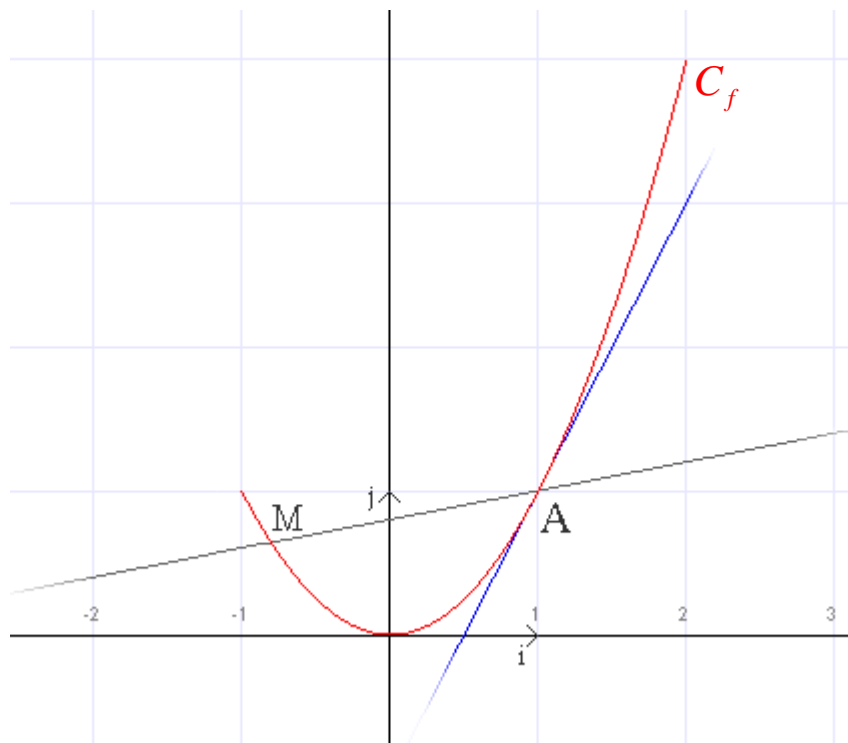
## I. Des exemples pour commencer

### 1. Fonction carrée

On définit la fonction  $f$  telle que  $f(x) = x^2$  sur  $[-1; 2]$ .

Soient les points  $A(1;1)$  et  $M(x;x^2) \in C_f$

$(AM)$  est une sécante à la courbe  $C_f$



Calculons le coefficient directeur de  $(AM)$  :

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$m = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1 \text{ si } x \neq 1.$$

Lorsque l'on « rapproche beaucoup » le point  $M$  du point  $A$ ,  $(AM)$  devient la tangente à  $C_f$  en  $A$ .

Calculons le coefficient directeur de cette tangente. Si on « rapproche beaucoup » le point  $M$  du point  $A$ , cela signifie que dans les coordonnées de  $M$ ,  $x$  tend vers 1 (car  $x_A = 1$ ).

Le coefficient directeur de la tangente en  $A$  est donc :

$$\lim_{x_M \rightarrow 1} \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \lim_{x_M \rightarrow 1} \frac{x_M^2 - 1}{x_M - 1} = \lim_{x_M \rightarrow 1} (x_M + 1) = 2$$

La tangente en  $A$  à la courbe est donc la droite passant par  $A$  et de coefficient

$$\text{directeur } 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_A)}{x - x_A}.$$

$$\text{On note } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{C'est le nombre dérivé de } f \text{ en } x=1$$

La tangente en  $A$  admet pour équation :  $y = 2x + b$

Et comme  $A$  a pour coordonnées  $(1;1)$ , on a  $1 = 2 + b$  donc  $b = -1$

Tangente en  $A$  :  $y = 2x - 1$

### *Recherche du nombre dérivé en un point a quelconque de la courbe :*

**Le nombre dérivé en un point a quelconque est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative en ce point a.**

Le point  $a \in C_f$ , notons ses coordonnées  $(a, a^2)$ .

$$\text{Ce coefficient directeur est égal à } m = \frac{y_M - y_a}{x_M - x_a} = \frac{x^2 - y_a}{x - x_a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

$$\text{Et } \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a \text{ si } x \neq a.$$

Pour trouver la valeur du coefficient directeur, on fait tendre  $x$  vers  $a$  :

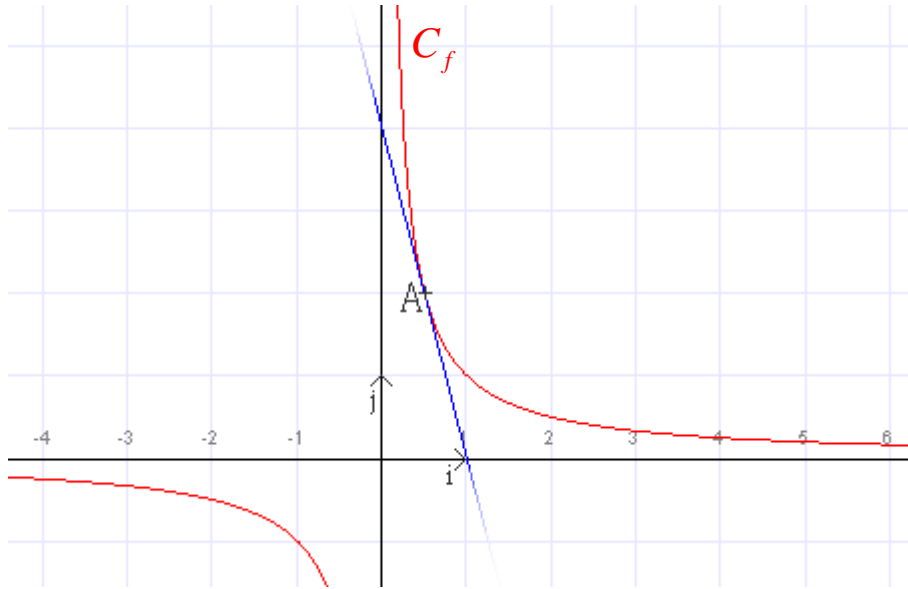
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$$

C'est le nombre dérivé de la fonction carrée en  $a$  :  $f'(a) = 2a$

## 2. Fonction inverse

On définit la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \frac{1}{x}$ . On a  $D_f = \mathbb{R}^*$  (signifie tout  $\mathbb{R}$  sauf 0)

Soient les points  $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$  et  $M\left(x; \frac{1}{x}\right) \in C_f$



Recherchons l'équation de la tangente à  $C_f$  en  $A$ .

La tangente en  $A$  est une droite passant par  $A$  et de coefficient directeur

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{x} - 2}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1 - 2x}{x} = \frac{1 - 2x}{x} \times \frac{2}{2x - 1} = \frac{2}{x} \times \frac{-(2x - 1)}{2x - 1}$$

$$\text{Si } x \neq \frac{1}{2}, \text{ on a } \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{x} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{x}\right) = -4$$

$$\text{Donc } f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$$

La tangente en  $A$  admet une équation du type  $y = -4x + b$  et comme elle passe par  $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ ,

$$\text{on a } 2 = -4 \times \frac{1}{2} + b \text{ donc } b = 4$$

L'équation de la tangente à  $C_f$  en  $A$  est :  $y = -4x + 4$

### **Recherche du nombre dérivé en un point $a$ quelconque de la courbe :**

Rappel : Le nombre dérivé en un point  $a$  quelconque est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative en ce point  $a$ .

Le point  $a \in C_f$ , notons ses coordonnées  $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ .

Le coefficient directeur est égal à  $m = \frac{y_M - y_a}{x_M - x_a} = \frac{\frac{1}{x} - y_a}{x - x_a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \frac{1}{xa} \times \frac{a-x}{x-a}$ .

Si  $x \neq a$ , on a  $m = -\frac{1}{xa}$ .

Pour trouver la valeur du coefficient directeur, on fait tendre  $x$  vers  $a$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( -\frac{1}{xa} \right) = -\frac{1}{a^2}$$

C'est le nombre dérivé de la fonction carrée en  $a$  :  $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

## **II. Définition du nombre dérivé en $x=a$ – tangente en $x=a$**

### **1. Nombre dérivé d'une fonction en $x=a$**

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$ , et soit  $a$  un élément de  $D$ .  
 $f$  est définie « au voisinage » de  $a$ .

Le nombre dérivé de  $f$  en  $x=a$  est noté  $f'(a)$  et est défini par :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

On peut également poser  $x = a + h$ . On a alors  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

Et on obtient : 
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

## 2. Tangente à la courbe en $x=a$

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x=a$ . La tangente à la courbe représentative de  $f$  en  $A(a; f(a))$  est la droite passant par  $A$  et de coefficient directeur  $f'(a)$ .

La tangente en  $A$  a donc pour équation  $y = f'(a) \times x + b$

Par définition, cette tangente passe par  $A(a; f(a))$ , donc  $f(a) = f'(a) \times a + b$  soit

$$b = f(a) - f'(a) \times a$$

La tangente en  $A$  a donc pour équation  $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a = f'(a)(x - a) + f(a)$

### A retenir :

La tangente au point  $A$  d'abscisse  $a$  de la courbe représentative de  $f$  a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

## III. Fonctions dérivées et dérivées de fonctions usuelles

---

### 1. Fonction dérivée d'une fonction $f$

#### Définition :

Si une fonction  $f$  est dérivable en tout point  $a$  d'un intervalle  $I$ , on appelle fonction dérivée de  $f$  sur  $I$  la fonction qui associe à tout réel de  $I$  le nombre dérivé de  $f$  en ce point, et on note  $f'$  cette fonction :

$$x \mapsto f'(x)$$

## 2. Dérivée de fonctions usuelles

Les formules encadrées de ce chapitre sont à connaître par cœur (ou à savoir retrouver).

➤ **Fonction constante :**

$$\text{Si } f(x) = k \text{ alors } f'(x) = 0$$

*Démonstration :*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{k - k}{x - a} = 0 \text{ si } x \neq a$$

Quelque soit  $x \neq a$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$

Donc  $f'(a) = 0$  pour tout  $a$ .

➤ **Fonction affine :**

$$\text{Si } f(x) = mx + p \text{ alors } f'(x) = m$$

*Démonstration :*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{m \cdot x + p - (m \cdot a + p)}{x - a} = \frac{m(x - a)}{x - a} = m \text{ si } x \neq a$$

Quelque soit  $x \neq a$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$

Donc  $f'(a) = m$  pour tout  $a$ .

*Exemples :*

$f(x) = x$	donc	$f'(x) = 1$
$f(x) = 4x - 4$	donc	$f'(x) = 4$
$f(x) = 3 - 2x$	donc	$f'(x) = -2$
$f(x) = \frac{7}{4}x$	donc	$f'(x) = \frac{7}{4}$

➤ **Fonction carrée – fonction trinôme :**

$$\begin{aligned} \text{Si } f(x) = x^2 & \text{ alors } f'(x) = 2x \\ \text{Si } f(x) = ax^2 + bx + c & \text{ alors } f'(x) = 2ax + b \end{aligned}$$

**Démonstration pour  $x^2$  :**

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = x + a \text{ si } x \neq a$$

Quelque soit  $x \neq a$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2a$

Donc  $f'(a) = 2a$  pour tout  $a$ .

**Exemples :**

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{donc} \quad f'(x) = x$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 4 \quad \text{donc} \quad f'(x) = 4x + 4$$

$$f(x) = -x^2 - 7 \quad \text{donc} \quad f'(x) = -2x$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x \quad \text{donc} \quad f'(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

➤ **Fonction inverse :**

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{alors} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

**Démonstration :**

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a - x}{xa}}{x - a} = \frac{1}{xa} \times \frac{a - x}{x - a} = -\frac{1}{xa} \text{ si } x \neq a$$

Quelque soit  $x \neq a$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{1}{a^2}$

Donc  $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$  pour tout  $a$ .

➤ **Fonction racine carrée :**

$$\begin{array}{l} \text{Si } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{alors } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ x \geq 0 \qquad \qquad \qquad x > 0 \end{array}$$

**Démonstration:**

Soient  $x \geq 0$  et  $a \geq 0$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \quad \text{si } x \neq a$$

Quelque soit  $x \neq a$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Donc  $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$  pour tout  $a$ .

➤ **Fonction puissance 3 – puissance  $n$  :**

$$\begin{array}{l} \text{Si } f(x) = x^3 \quad \text{alors } f'(x) = 3x^2 \\ \text{Si } f(x) = x^n \quad \text{alors } f'(x) = n \cdot x^{n-1} \end{array}$$

**Démonstration pour  $f(x) = x^3$  :**

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = x^2 + ax + a^2 \quad \text{si } x \neq a$$

Quelque soit  $x \neq a$ , on a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$

Donc  $f'(a) = 3a^2$  pour tout  $a$ .

**Exemples :**

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^7 & \text{donc} & f'(x) = 7x^6 \\ f(x) = x^4 & \text{donc} & f'(x) = 4x^3 \\ f(x) = x^{33} & \text{donc} & f'(x) = 33x^{32} \\ f(x) = x^{-3} & \text{donc} & f'(x) = -3x^{-4} \end{array}$$



➤ **Fonction sinus et cosinus :**

$$\text{Si } f(x) = \sin x \quad \text{alors } f'(x) = \cos x$$

$$\text{Si } f(x) = \cos x \quad \text{alors } f'(x) = -\sin x$$

### 3. Opérations sur les fonctions dérivables

Les formules encadrées de ce chapitre sont à connaître par cœur (ou à savoir retrouver).

➤ **Dérivée du produit d'une fonction par une constante :**

$$\text{Si } f(x) = k.u(x) \quad \text{alors } f'(x) = k.u'(x)$$

**Exemples :**

$$f(x) = 5x^4 \quad \text{donc} \quad f'(x) = 5 \times 4x^3 = 20x^3$$

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{donc} \quad f'(x) = 3 \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{3}{x^2}$$

➤ **Dérivée d'une somme de fonction :**

$$\text{Si } f(x) = u(x) + v(x) \quad \text{alors } f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

**Exemples :**

$$f(x) = 5x^4 + 3x^3 - \frac{1}{2}x - 2 \quad \text{donc} \quad f'(x) = 5 \times 4x^3 + 3 \times 3x^2 - \frac{1}{2} = 20x^3 + 9x^2 - \frac{1}{2}$$

$$f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{x} \quad \text{donc} \quad f'(x) = 3x^2 + 3 \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$$

➤ **Dérivée d'un produit de fonctions dérivables :**

$$\text{Si } f(x) = u(x).v(x) \quad \text{alors } f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

**Exemples :**

➤  $f(x) = (2x+1)(3x-4)$   
On pose  $u(x) = 2x+1$  et  $v(x) = 3x-4$   
On obtient  $u'(x) = x$  et  $v'(x) = 3$

Donc  $f'(x) = 2(3x-4) + 3(2x+1)$   
 $f'(x) = 6x - 8 + 6x + 3$   
 $f'(x) = 12x - 5$

➤  $f(x) = (-x^2+2)(2x+5)$   
On pose  $u(x) = -x^2+2$  et  $v(x) = 2x+5$   
On obtient  $u'(x) = -2x$  et  $v'(x) = 2$

Donc  $f'(x) = -2x(2x+5) + 2(-x^2+2)$   
 $f'(x) = -4x^2 - 10x - 2x^2 + 4 = -6x^2 - 10x + 4$

➤  $f(x) = (x^2+2x+1)(-x^3+2)$   
On pose  $u(x) = x^2+2x+1$  et  $v(x) = -x^3+2$   
On obtient  $u'(x) = 2x+2$  et  $v'(x) = -3x^2$

Donc  $f'(x) = (2x+2)(-x^3+2) + (-3x^2)(x^2+2x+1)$   
 $f'(x) = 2(x+1)(-x^3+2) + (-3x^2)(x+1)^2$   
 $f'(x) = (x+1)(2(-x^3+2) + (-3x^2)(x+1))$   
 $f'(x) = (x+1)(-2x^3+4-3x^3-3x^2)$   
 $f'(x) = (x+1)(-5x^3-3x^2+4)$

➤ **Dérivée de l'inverse d'une fonction, d'un quotient de fonctions :**

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{u(x)} \text{ alors } f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

$$\text{Si } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ alors } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

**Exemples :**

➤  $f(x) = \frac{1}{4x-2}$

On pose  $u(x) = 4x - 2$  donc  $u'(x) = 4$

$$f'(x) = -\frac{4}{(4x-2)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{(4x-2)^2} = -\frac{4}{16x^2 - 16x + 4} = -\frac{1}{4x^2 - 4x + 1} = -\frac{1}{(2x-1)^2}$$

➤  $f(x) = \frac{-3}{2(5+2x)}$

$$f(x) = \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{5+2x}$$

On pose  $u(x) = 5 + 2x$  donc  $u'(x) = 2$

$$f'(x) = \frac{-3}{2} \cdot \frac{-2}{(5+2x)^2} = \frac{3}{(5+2x)^2}$$

➤  $f(x) = \frac{4x+1}{3x-2}$

On pose  $u(x) = 4x + 1$  donc  $u'(x) = 4$

Et  $v(x) = 3x - 2$  donc  $v'(x) = 3$

$$f'(x) = \frac{4(3x-2) - 3(4x+1)}{(3x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x - 8 - 12x - 3}{(3x-2)^2} = \frac{-11}{(3x-2)^2}$$

➤  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2x + 1}$

On pose  $u(x) = 2x$  donc  $u'(x) = 2$

Et  $v(x) = x^2 + 2x + 1$  donc  $v'(x) = 2x + 2$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 2x + 1) - 2x(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 4x(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 4x}{(x+1)^3} = \frac{-2x + 2}{(x+1)^3} \text{ si } x \neq -1$$

$$\triangleright f(x) = \frac{x^2}{4x-1}$$

On pose  $u(x) = x^2$  donc  $u'(x) = 2x$

Et  $v(x) = 4x-1$  donc  $v'(x) = 4$

$$f'(x) = \frac{2x(4x-1) - 4x^2}{(4x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2 - 2x - 4x^2}{(4x-1)^2} = \frac{4x^2 - 2x}{(4x-1)^2} = \frac{2x(2x-1)}{(4x-1)^2}$$

#### 4. Dérivées de fonctions composées du type $f(x) = v(ax+b)$

Si  $f(x) = v(ax+b)$ , alors  $f'(x) = a.v'(ax+b)$  avec  $v$  une fonction dérivable.

**Conséquences :**

Si  $f(x) = (ax+b)^n$ , alors  $f'(x) = a.n.(ax+b)^{n-1}$

Si  $f(x) = \sqrt{ax+b}$ , alors  $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$  (avec  $ax+b > 0$ )

**Exemples :**

$$\triangleright f(x) = (2x-1)^2$$

$$f'(x) = 2.2.(2x-1)$$

$$f'(x) = 8x-4$$

$$\triangleright f(x) = (\sqrt{3}x+7)^4$$

$$f'(x) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3}x+7)^3$$

$$\triangleright f(x) = \frac{\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^2}{4-x}$$

On pose  $u(x) = \left(-\frac{1}{2}x+3\right)^2$  donc  $u'(x) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}x+3\right) = -\left(-\frac{1}{2}x+3\right)$

Et  $v(x) = 4-x$  donc  $v'(x) = -1$

$$f'(x) = \frac{-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)(4-x) - (-1)\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^2}{(4-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\left((x-4)+\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\right)}{(4-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right)}{(4-x)^2}$$

## IV. Recherche de tangentes à la courbe dérivée d'une fonction

On rappelle que l'équation de la tangente est de la forme :  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

### 1. Premier exemple

On pose :  $f(x) = x^3 - 3x^2$

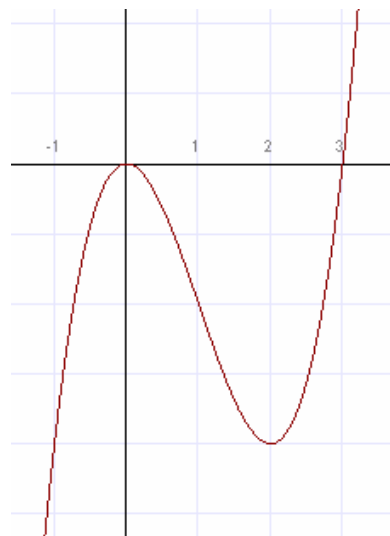
Calculons  $f'(x)$  :  $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$\triangleright$  **Tangente à  $C_f$  en  $(0;0)$  :  $T_0$**

Le point  $(0;0) \in C_f$ .

$f'(0) = 0$  et  $f(0) = 0$  donc  $T_0 : y = 0$

$T_0$  est l'axe des abscisses.



### Important :

Si  $f'(a) = 0$ , la tangente au point d'abscisse  $a$  est parallèle à l'axe des abscisse.

➤ **Tangente à  $C_f$  en  $A(-1; -4)$  :  $T_A$**

Le point  $A(-1; -4) \in C_f$ .

$$f'(-1) = 9 \text{ et } f(-1) = -4 \quad \text{donc} \quad T_A : y = 9(x+1) - 4$$

$$T_A : y = 9x + 9 - 4$$

$$T_A : y = 9x + 5$$

➤ **Tangente à  $C_f$  en  $B(1; -2)$  :  $T_B$**

Le point  $B(1; -2) \in C_f$ .

$$f'(1) = -3 \text{ et } f(1) = -2 \quad \text{donc} \quad T_B : y = -3(x-1) - 2$$

$$T_B : y = -3x + 3 - 2$$

$$T_B : y = -3x + 1$$

## 2. Deuxième exemple :

Soit la fonction  $f$  qui à  $x$  associe  $f(x) = 3x^3 - 4x + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$  et  $C$  sa courbe représentative.

Déterminer dans chacun des cas suivants les coordonnées des points de  $C$  où la tangente :

- admet 5 pour coefficient directeur.
- est parallèle à la droite d'équation  $y = x + 2$ .
- est parallèle à la droite d'équation  $y = -5x + 2$ .

### **Solutions :**

Tout d'abord, calculons  $f'(x)$  :

$$f'(x) = 9x^2 - 4$$

- Tangente de coefficient directeur 5.

L'abscisse  $a$  du point de  $C$  où la tangente a pour coefficient directeur 5 vérifie :  $f'(a) = 5$ .

$$9.a^2 - 4 = 5$$

$$9.a^2 = 9$$

$$a^2 = 1$$

$$\text{donc } a = 1 \quad \text{ou} \quad a = -1$$

Il existe donc 2 tangentes de coefficient directeur 5 qui sont les 2 points de  $C$  d'abscisses 1 et -1 :

$$A(1;0) \quad \text{et} \quad A'(-1;2)$$

$$\begin{aligned} T_A : y = 5(x-1)+0 & \quad \text{et} \quad T_{A'} : y = 5(x+1)+2 \\ T_A : y = 5x-5 & \quad \text{et} \quad T_{A'} : y = 5x+7 \end{aligned}$$

b) Tangente parallèle à la droite d'équation  $y = x + 2$ .

Si la tangente est parallèle à cette droite, elle a le même coefficient directeur, donc on recherche les tangentes de coefficient directeur 1. La question est alors semblable à la précédente.

L'abscisse  $a$  du point de  $C$  où la tangente a pour coefficient directeur 1 vérifie :  $f'(a) = 1$ .

$$9.a^2 - 4 = 1$$

$$9.a^2 = 5$$

$$a^2 = \frac{5}{9}$$

$$\text{donc } a = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{ou} \quad a' = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Il existe donc 2 tangentes de coefficient directeur 1 qui sont les 2 points de  $C$  d'abscisses  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

et  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$  :

$$B\left(\frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{9-7\sqrt{5}}{9}\right) \quad \text{et} \quad B'\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{9+7\sqrt{5}}{9}\right)$$

c) Tangente parallèle à la droite d'équation  $y = -5x + 2$ .

Ce sont les tangentes de coefficient directeur -5.

L'abscisse  $a$  du point de  $C$  où la tangente a pour coefficient directeur 1 vérifie :  $f'(a) = -5$ .

$$9.a^2 - 4 = -5$$

$$9.a^2 = -1$$

$$a^2 = -\frac{1}{9} \quad \text{cette équation n'a pas de solution (un carré ne peut pas être négatif).}$$

Il n'existe pas de tangente parallèle à la droite d'équation  $y = -5x + 2$ .

## V. Dérivée et sens de variation d'une fonction

---

 **Chapitre très important !**

### 1. Théorème donnant le sens de variation à partir du signe de la dérivée :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si pour tout  $x$  de  $I$  on a  $f'(x) \geq 0$  alors  $f$  est croissante sur  $I$ .
- Si pour tout  $x$  de  $I$  on a  $f'(x) \leq 0$  alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .
- Si pour tout  $x$  de  $I$  on a  $f'(x) = 0$  alors  $f$  est constante sur  $I$ .

### 2. Exemples d'utilisation :

➤ **Comment utiliser ce théorème ?**

Lorsqu'on souhaite étudier le sens de variation d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  :

- On calcule  $f'(x)$  sur  $I$ .
- On étudie le signe de  $f'(x)$  sur  $I$ .
- On en déduit le tableau de variation de  $f$  sur  $I$ .

➤ **Exemples :**

Dans les exemples suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction à étudier et donner son tableau de variation.

*1<sup>er</sup> exemple :*

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Ensemble de définition :  $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x - 4$$

On voit que  $f'(x) = 0$  si  $x = 2$

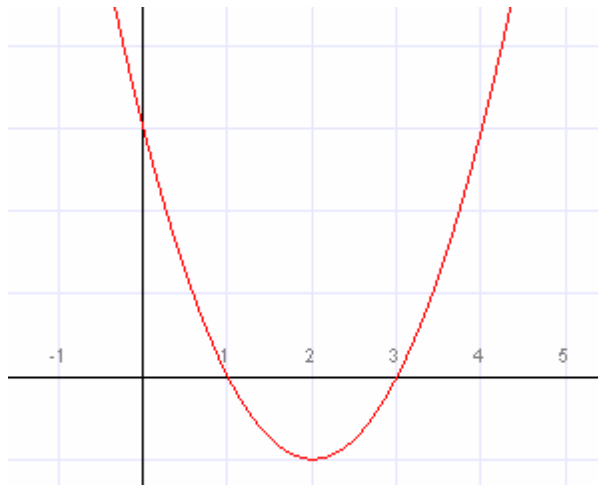


Tableau de variation de  $f$ :

$x$	$-\infty$		$2$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	0	+	
Variations de $f(x)$	↘		-1	↗	

$f(x)$  admet un minimum égal à -1 pour  $x = 2$ .

Si on trace la courbe :



**2<sup>ème</sup> exemple :**

$$f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$$

$f(x)$  existe si le dénominateur est différent de 0, donc si  $x+1 \neq 0$  soit  $x \neq -1$

Donc  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

Calculons  $f'(x)$  :

On pose  $u(x) = 4x+1$  donc  $u'(x) = 4$

et  $v(x) = x+1$  donc  $v'(x) = 1$

$$\text{On a } f'(x) = \frac{4(x+1) - 1(4x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Pour tout  $x \neq -1$ , on a  $f'(x) > 0$

Tableau de variation de  $f$ :

$x$	$-\infty$		$-1$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+			+
Variations de $f(x)$	↗				↗

Si on trace la courbe :



**3<sup>ème</sup> exemple :**

$$f(x) = 3x^3 - 4x + 1$$

Ensemble de définition :  $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 9x^2 - 4$$

$$f'(x) = (3x - 2)(3x + 2)$$

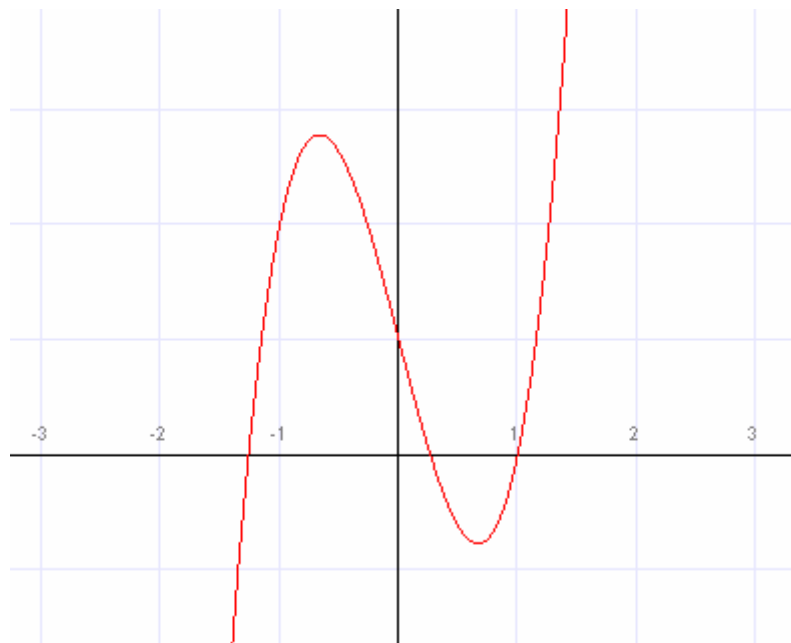
On voit que  $f'(x) = 0$  si  $x = \frac{2}{3}$  ou si  $x = -\frac{2}{3}$

Tableau de variation de  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
Signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+
Variations de $f(x)$	↗		$\frac{25}{9}$	↘	$-\frac{7}{9}$	↗

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 1 = \frac{25}{9} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{8}{9} - \frac{8}{3} + 1 = -\frac{7}{9}$$

Si on trace la courbe :



**4<sup>ème</sup> exemple :**

$$f(x) = (x+1)(2x-1)^2$$

Ensemble de définition :  $D_f = \mathbb{R}$

Calculons  $f'(x)$  :

$$\begin{array}{lll} \text{On pose} & u(x) = (2x-1)^2 & \text{donc } u'(x) = 2 \times 2 \times (2x-1) = 4(2x-1) \\ \text{et} & v(x) = x+1 & \text{donc } v'(x) = 1 \end{array}$$

$$\text{On a } f'(x) = 1(2x-1)^2 + 4(2x-1)(x+1)$$

$$f'(x) = (2x-1)((2x-1) + 4(x+1))$$

$$f'(x) = (2x-1)(2x-1+4x+4)$$

$$f'(x) = (2x-1)(6x+3)$$

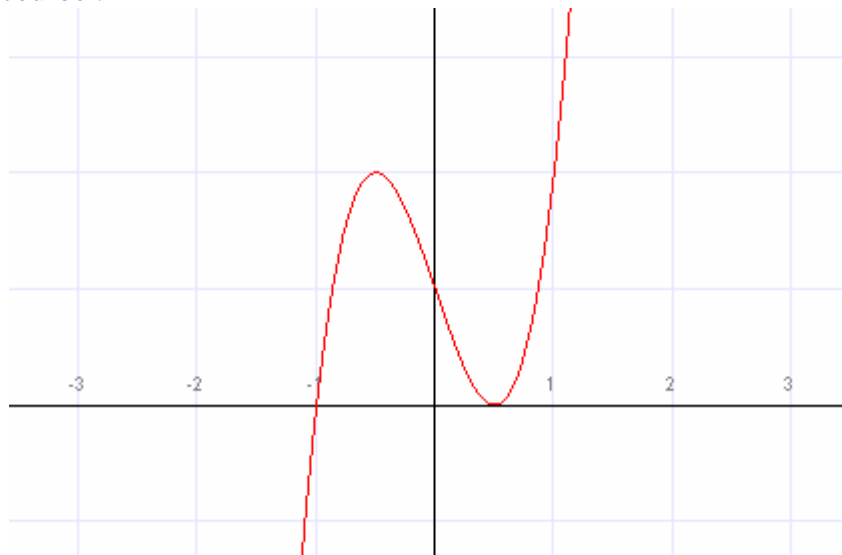
On voit que  $f'(x) = 0$  si  $x = \frac{1}{2}$  ou si  $x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

Tableau de variation de  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de $f(x)$	↗		↘	↗	

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \left(2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right)^2 = \frac{1}{2}(-2)^2 = 2 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)^2 = \frac{3}{2}(0)^2 = 0$$

Si on trace la courbe :



➤ **Encadrement d'une fonction sur un intervalle :**

Déterminer à l'aide du tableau de variation un encadrement de l'image l'intervalle  $I = [-1; 2]$  pour les fonctions  $f$  suivantes :

➤  $f(x) = \frac{1}{x-3}$

$$D_f = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2}$$

Sur  $I = [-1; 2]$ ,  $f'(x) < 0$

Traçons le tableau de variation de  $f$  sur  $I = [-1; 2]$  :

$x$	-1	2
Signe de $f'(x)$	-	
Variations de $f(x)$	$-\frac{1}{4}$	-1

$$f(-1) = -\frac{1}{4} \text{ et } f(2) = -1$$

D'après le tableau de variation, l'image de  $I = [-1; 2]$  par  $f$  est l'intervalle  $\left[-1; -\frac{1}{4}\right]$ .

$$\triangleright f(x) = \frac{3x+1}{x^2-9}$$

$$D_f = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x - 27}{(x^2 - 9)^2}$$

$(x^2 - 9)^2 > 0$  quelque soit  $x \in D_f$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $-3x^2 - 2x - 27$ .

Etudions le signe de  $-3x^2 - 2x - 27$  :

$$\Delta = 4 - 4(-3)(-27) < 0 \text{ donc } -3x^2 - 2x - 27 < 0 \text{ sur } I = [-1; 2], \text{ donc } f'(x) < 0 \text{ sur } I = [-1; 2].$$

Traçons le tableau de variation de  $f$  sur  $I = [-1; 2]$  :

$x$	-1	2
Signe de $f'(x)$	-	
Variations de $f(x)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{5}$

D'après le tableau de variation, l'image de  $I = [-1; 2]$  par  $f$  est l'intervalle  $\left[-\frac{7}{5}; \frac{1}{4}\right]$ .

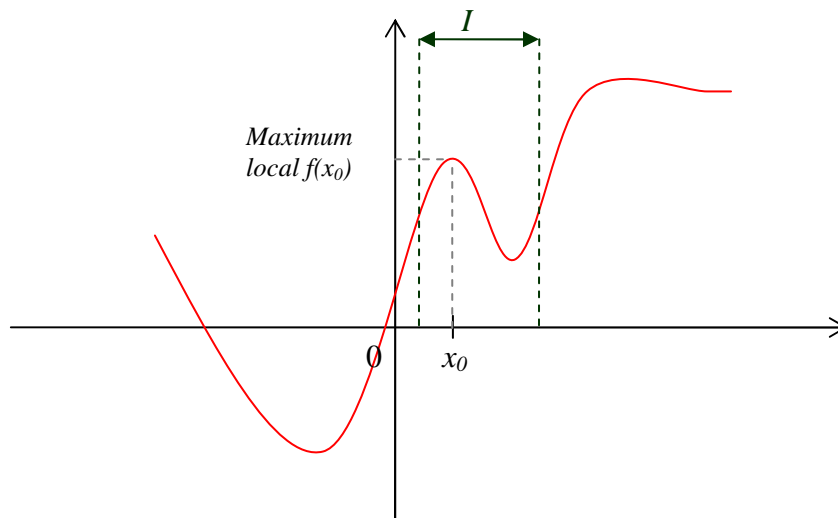
## VI. Dérivée et extremum local d'une fonction

---

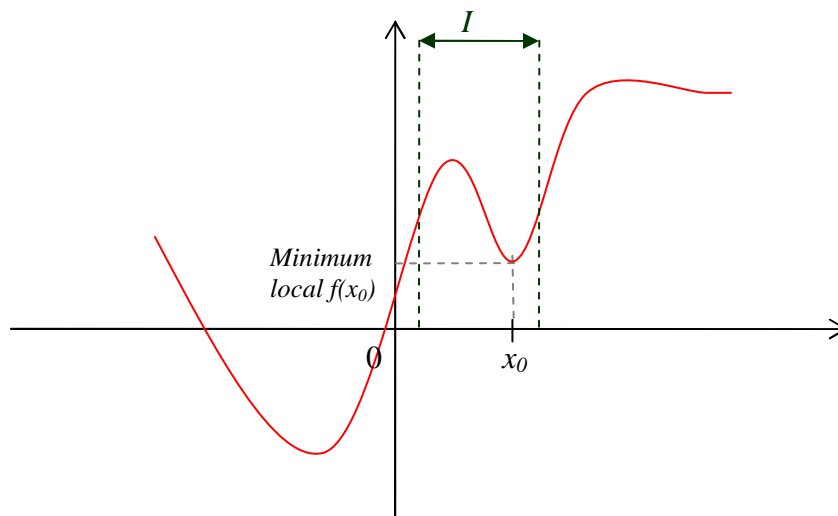
### 1. Définitions :

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$ .

- Dire que  $f(x_0)$  est un maximum local de  $f$  sur  $D$  signifie qu'il existe un intervalle  $I$  contenu dans  $D$  tel que pour tout  $x \in I$ , on ait :  
$$f(x) \leq f(x_0)$$



- Dire que  $f(x_0)$  est un minimum local de  $f$  sur  $D$  signifie qu'il existe un intervalle  $I$  contenu dans  $D$  tel que pour tout  $x \in I$ , on ait :  
$$f(x) \geq f(x_0)$$



**Exemple :**

Dans le 3<sup>ème</sup> exemple du V.2.,  $\frac{25}{9}$  est un maximum local obtenu pour  $x = -\frac{1}{2}$ , et  $-\frac{7}{9}$  est un minimum local obtenu pour  $x = \frac{1}{2}$ .

## 2. Extremum et racine de la dérivée :

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . Si  $f$  admet un extremum en  $x_0 \in I$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . Si la dérivée  $f'$  de  $f$  s'annule et change de signe en un point  $x_0 \in I$ , alors  $f(x_0)$  est un extremum de la fonction.