

FONCTIONS LOGARITHMES

Ce chapitre traite d'une des plus importantes fonctions en mathématiques, fonction utilisée dans de nombreux domaines scientifiques ou économiques

1) Fonction logarithme népérien

Définition : La fonction logarithme népérien est LA primitive de la fonction inverse $x \rightarrow \frac{1}{x}$, définie sur $]0; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1. Elle se note \ln . Les valeurs de cette fonction s'obtiennent par la touche \ln de la calculatrice.

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \ln x$$



Autrement dit, on peut définir la fonction \ln comme la fonction, définie sur $]0; +\infty[$, qui s'annule en 1 et dont la dérivée est la fonction inverse

$$f(x) = \ln x \text{ sur }]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x} \text{ sur }]0; +\infty[$$

Premières propriétés analytiques

Comme la dérivée de \ln est la fonction inverse, strictement positive sur $]0; +\infty[$, alors la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x-1$

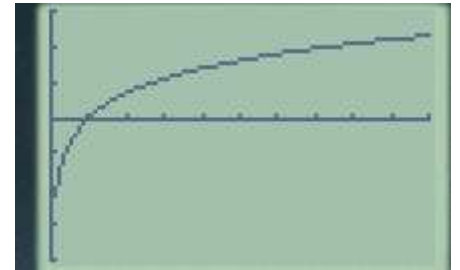
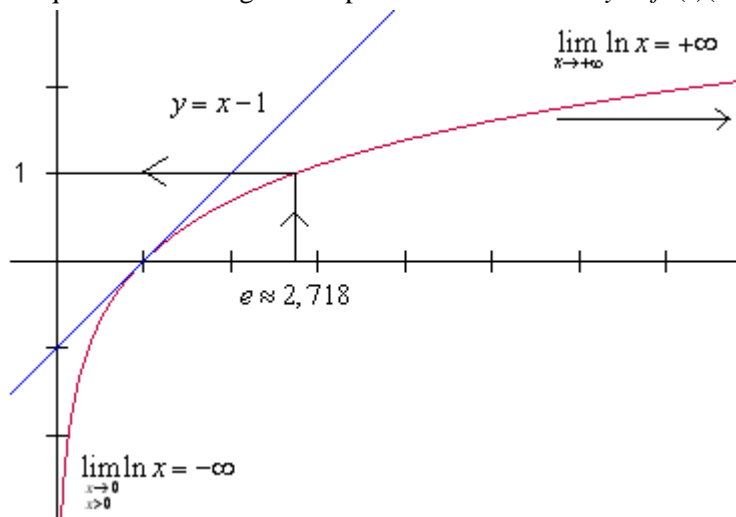


Tableau complet des variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$		0	$+\infty$
	-	-	$-\infty$

Comme la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, deux réels strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs logarithmes. Autrement dit :

Propriété :

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$.

Conséquence :

Le logarithme d'un nombre strictement supérieur à 1 est strictement positif. $a > 1 \Leftrightarrow \ln(a) > 0$

Le logarithme d'un nombre strictement inférieur à 1 est strictement négatif : $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln(a) < 0$

Propriétés algébriques

Pour tous nombres a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln(a^r) = r \ln a \text{ (pour tout réel } r \text{) (ce dernier résultat est très utilisé dans des problèmes d'ordre financier)}$$

Cas particulier : Pour $a > 0$, $\sqrt{a} = (a)^{\frac{1}{2}}$ donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Propriété :

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

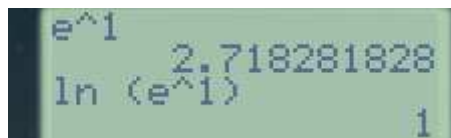
Le nombre e :

Comme la fonction \ln est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$,

l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution.

On note e le nombre dont le logarithme népérien vaut 1.

Une approximation décimale de e à 10^{-3} près est 2,718



En conséquence : Pour nombre entier m , la solution de l'équation $\ln x = m$ est $x = e^m$. En effet,

$$\ln x = m \Leftrightarrow \ln x = m \times 1 \Leftrightarrow \ln x = m \times \ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln(e^m) \Leftrightarrow x = e^m$$

Nous admettrons que le théorème s'étend au cas d'un réel quelconque m .

Dérivée d'une fonction composée avec le logarithme

Théorème :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que, pour tout x de I , on ait $u(x) > 0$; alors :

La fonction $\ln u$ (qui à tout réel x associe $\ln(u(x))$) est dérivable sur I et la dérivée de $\ln u$ est $\frac{u'}{u}$

Ce théorème s'utilise aussi dans l'autre sens : Une primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ sera $\ln(u)$ sur tous les intervalles où u est strictement positive et $\ln(-u)$ sur tous les intervalles où u est strictement négative.

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sera $\ln(|u|)$ sur tout intervalle où u ne s'annule pas.

Croissances comparées

Pour traduire le fait que la croissance de la fonction logarithme népérien est extrêmement lente

Outre les limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on retiendra les résultats suivants :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ et quel que soit le réel } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\text{Enfin } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ et quel que soit le réel } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$$

(on retiendra qu'en présence d'une expression où se mêlent polynômes et logarithmes, ce sont toujours les expressions polynomiales «qui l'emportent»)

Démonstration :

1) Pour tout $x \in]1; +\infty[$, on pose $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de deux fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$. Ainsi, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\sqrt{x} > 1$ donc $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]1; +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) < f(1)$.

Puisque $f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1} = -2 < 0$, on en déduit que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 2\sqrt{x}$.

Ainsi, pour tout $x \in]1; +\infty[$, $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$, c'est-à-dire $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$. Mais puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème

des gendarmes nous permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Soit $\alpha > 0$

Posons $X = x^\alpha$. Puisque $x \in]0; +\infty[$, on a alors $x = X^{\frac{1}{\alpha}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X^{\frac{1}{\alpha}}}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln X}{X} = 0$ d'après le résultat précédent.

2) Si on pose $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$, on a alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} X = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, et on aura donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

Posons $X = x^\alpha$. Puisque $x \in]0; +\infty[$, on a alors $x = X^{\frac{1}{\alpha}}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} X = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha = 0$

De plus $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \ln x = \lim_{X \rightarrow 0} X \ln X^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} X \ln X = 0$ d'après le résultat précédent.

2) Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Log : } x \rightarrow \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Propriétés algébriques

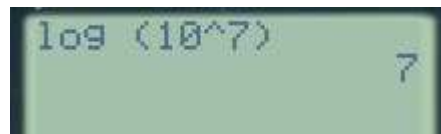
La fonction log possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln, à savoir :

Pour tous nombres a et b strictement positifs :

$$\log(a \times b) = \log a + \log b \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \qquad \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a$$

$$\log(a^r) = r \log a \quad (\text{pour tout réel } r)$$

$$\log 1 = 0, \log 10 = 1, \log 100 = 2 \text{ et pour tout entier } n, \boxed{\log(10^n) = n}$$



Propriétés analytiques

La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k \ln x$ avec $k = \frac{1}{\ln 10} > 0$, ses variations et ses limites sont identiques à celles de la fonction ln.

Guesmi.B