Limites – Continuité

2 Continuité

2.1 Continuité en un point - Continuité sur un intervalle

***Définitions* :**

Soit *f* une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$ $I \subseteq \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ $x_0 \in I$.

- On dit que *f* est continue en x_0 x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ tel que $x \in I$ $x \in I$ et $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
- *f* est continue à droite (resp. à gauche) si on rajoute la condition $x \geq x_0$ $x \geq x_0$ (resp. $x \leq x_0$ $x \leq x_0$).

***Conséquences* :**

- *f* est continue en x_0 x_0 si et seulement si *f* est continue à droite et à gauche en x_0 x_0.
- *f* est continue sur I si et seulement si *f* est continue en tout point de *I*.

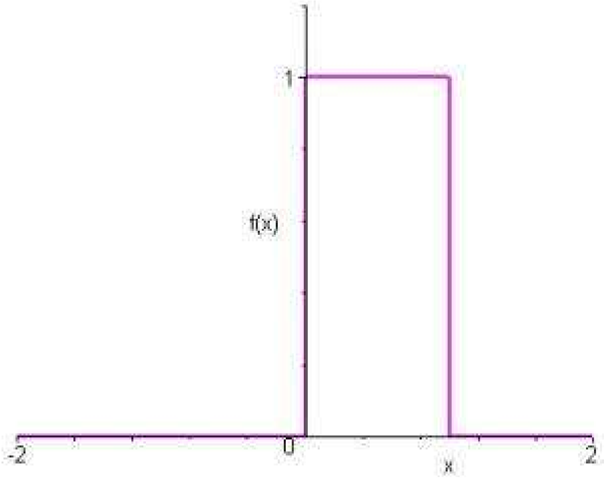
EXEMPLE

2. Considérons la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \notin [0;1] \\ f(x) = 1 & \text{si } x \in [0;1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \notin [0;1] \\ f(x) = 1 & \text{si } x \in [0;1] \end{cases}$$

la fonction *f* n'est ni continue en 0 ni continue en 1.



1.1 Opérations sur les fonctions continues

***Propositions 1* :**

Soient f et g deux fonctions définies sur $I \subseteq \mathbb{R}$ et continues en x_0 (resp. sur I).

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est continue en x_0 (resp. sur I).

(ii) Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est continue en x_0 (resp. sur I).

(iii) Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 (resp. sur I).

<u>Exemples</u> :

Toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.

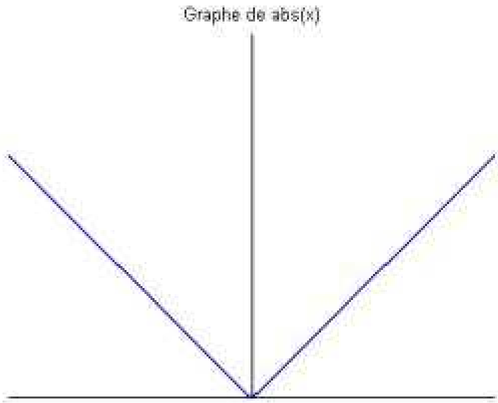
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{|x|}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ sinon n'est pas continue en 0.

En effet, $\lim_{x \to 0^-} |x| = 0$

$\lim_{x \to 0^-} |x| = 0$ et $\lim_{x \to 0+} |x| = 0$

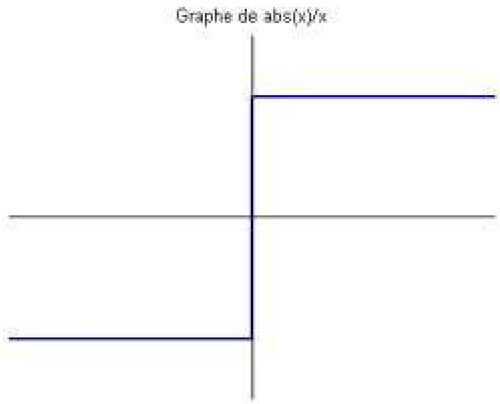
$\lim_{x \to 0+} |x| = 0$



En effet, $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ et $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$



Remarques **:**

Pour démontrer qu'une fonction est continue, il suffit souvent de vérifier qu'il s'agit d'un « mélange » de fonctions continues classiques, et les propositions précédentes ainsi que la suivante s'appliquent.

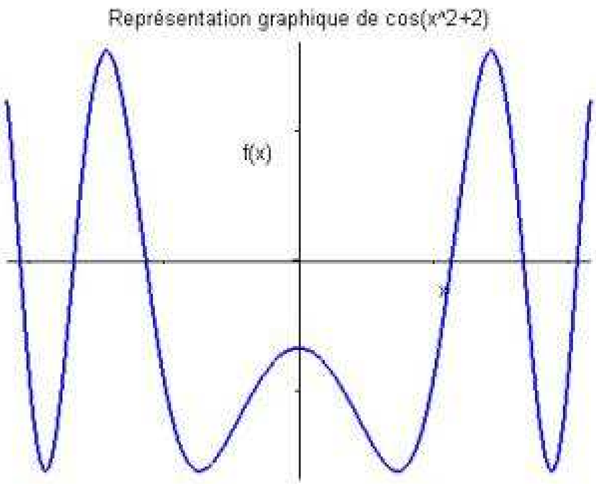
Proposition 2 **:**

Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur $I \subseteq \mathbb{R}$ $I \subseteq \mathbb{R}$. Si *f* est continue en x_0 x_0 (resp. sur *I*) et *g* continue en $f(x_0)$ $f(x_0)$, alors $g \circ f$ $g \circ f$ est continue en x_0 x_0 (resp. sur *I*).

La démonstration de cette proposition découle directement de celle du théorème 1.4.

2. Soient deux fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2$ $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = \cos x$ $g(x) = \cos x$.

f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$. Alors $(g \circ f)(x) = \cos(x^2 + 2)$ $(g \circ f)(x) = \cos(x^2 + 2)$ est continue :



1.2 Prolongement par continuité

Si *f* est une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ $I \setminus \{x_0\}$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, on dit que *g* est un [prolongement par continuité]() de *f* en x_0 x_0 si et seulement si $g(x) = f(x)$ $g(x) = f(x)$ $\forall x \neq x_0$ $\forall x \neq x_0$ et $g(x_0) = a$ $g(x_0) = a$.

EXEMPLE

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R}^*$.

La fonction g définie par $g(x) = f(x)$ $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ $g(0) = 0$ est un prolongement par continuité de *f* en 0.

2.2 Propriétés des fonctions continues

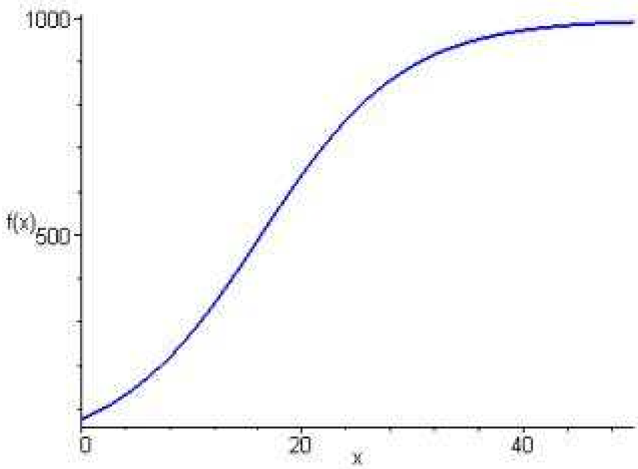
2.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

***Théorème* :**
Soit *f* continue sur *I*. Soient *a* et *b* deux éléments de *I* tels que $a < b$. Alors, en supposant que $f(a) < f(b)$, pour tout *y* tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$, il existe **au moins** un élément $x \in]a,b[$ tel que $y = f(x)$.

***Théorème des valeurs intermédiaires* :**

Soit *f* continue sur *I*. Soient *a* et *b* deux éléments de *I* tels que $a < b$. Alors pour tout *y* tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$, il existe **au moins** un élément $c \in]a,b[$ tel que $y = f(c)$.

***Remarque* :**
Un petit dessin semble constituer une démonstration simple de ce théorème, et pourtant…
Cauchy a énoncé ce théorème mais sans le démontrer. Un cas particulier de ce théorème fût énoncé par Bolzano, et Weierstrass proposa un lemme dans le but de le démontrer.



***Exercice* :**
Essayer de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires…, puis posez-vous la question fondamentale : êtes-vous capable de donner une définition claire d'un nombre réel !

➔ ***Une première piste***…[extrait de http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/]
« En 1872, Cantor présente une construction rigoureuse, définitive, des nombres réels au moyen des classes d'équivalence de suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, améliorant celle,

semblable, du français Meray. La même année, Dedekind publiait sa construction par les *coupures*.

le terme de *nombre réel* n'était pas utilisé à cette époque : on parlait de *grandeur numérique* chez Cantor et simplement de nombre irrationnel chez Dedekind. L'appellation nombre réel apparaît chez Cantor en 1883 dans ses *Grundlagen*.

En 1873, afin de prouver que l'ensemble **R** des nombres réels est non *dénombrable* (le terme est de lui : i.e. on ne peut établir de bijection entre **R** et **N**), Cantor fit appel à un procédé, appelé aujourd'hui *diagonale de Cantor*, sorte de crible, montrant par épuisement des nombres entiers, l'impossibilité d'établir cette bijection. ».

➔ *Une deuxième piste*

Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

Cette démonstration suppose acquise la construction de $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ et la notion de borne supérieure (voir remarque).

Soit f continue sur I.

Soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$ $a < b$.

Soit y tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$ $f(a) \leq y \leq f(b)$.

- On pose $c = f(a)$ $c = f(a)$ et $d = f(b)$ $d = f(b)$.

  On peut supposer que $c < d$ $c < d$ (dans le cas contraire, le raisonnement reste le même).

- On pose $E = \{x \in [a,b] / f(x) \leq y\}$ $E = \{x \in [a,b] / f(x) \leq y\}$.

  Comme $f(a) \leq y \leq f(b)$ $f(a) \leq y \leq f(b)$, on a $E \neq \varnothing$ $E \neq \varnothing$ (car $a \in E$ $a \in E$

  E est majoré par b

  Donc, comme toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, on en déduit l'existence de $x_0 = \sup E$ $x_0 = \sup E$.

- D'après les propriétés des bornes supérieures, $\exists (a_n) \subset E$ $\exists (a_n) \subset E$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$ $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$.

  Comme f est continue, on en déduit que $f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$ $f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$.

  Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in E$ $a_n \in E$ donc $f(a_n) \leq y$ $f(a_n) \leq y$ et ainsi $\boxed{f(x_0) \leq y}$ $\boxed{f(x_0) \leq y}$ (*cf.* proposition 4, § 1.3, chap 2).

- Si $f(b)=y$ alors

***Corollaire 1* :**

Soit *f* continue sur $[a,b]$. Si $f(a)f(b)\leq 0$, alors $\exists c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$.

DEMONSTRATION

Démonstration

Il suffit de remarquer que $0\in[f(a);f(b)]$ et d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice

Une personne parcourt à vélo une distance de 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel elle parcourt exactement 10 km.

Solution :

La distance parcourue au cours du temps est une fonction continue définie sur $[0,1]$. Elle vérifie $f(0)=0$ et $f(1)=20$.

On cherche ici un t_0 tel que $f\left(t_0+\frac{1}{2}\right)=f(t_0)+10$.

Posons $g(t)=f\left(t_0+\frac{1}{2}\right)-f(t_0)-10$. *g* est continue (somme de fonctions continues) et définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. On vérifie que :

$$g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - 10$$

$g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - 10$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 10 - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 10 - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$

On a donc $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$ $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ $t_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $g(t_0) = 0$ $g(t_0) = 0$, *i.e.*, $f\left(t_0 + \frac{1}{2}\right) = f(t_0) + 10$

$f\left(t_0 + \frac{1}{2}\right) = f(t_0) + 10$.

***Corollaire 2* :**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

! *Attention* :

Si I a pour bornes a et b, celles de $f(I)$ $f(I)$ ne sont pas nécessairement $f(a)$ $f(a)$ et $f(b)$ $f(b)$.

EXEMPLE

2. Soit la fonction définie par $f(x) = \sin x$ $f(x) = \sin x$: $f(]0; 2\pi[) = [-1; 1]$ $f(]0; 2\pi[) = [-1; 1]$.

Les bornes de $f(]0; 2\pi[)$ $f(]0; 2\pi[)$ ne sont pas $f(0)$ $f(0)$ et $f(2\pi)$ $f(2\pi)$: $f(0) = f(2\pi) = 0$ $f(0) = f(2\pi) = 0$

.

On constate de plus qu'il y a un intervalle ouvert et un intervalle fermé.

2.2 Théorème de la bijection réciproque

Théorème :
Si $f : I \to J$ est continue et strictement monotone sur *I*, alors *f* réalise une bijection de *I* sur *J*. De plus, la fonction réciproque f^{-1}, de *J* vers *I*, est continue et strictement monotone (avec la même monotonie que *f*).

***Remarques* :**

- Les courbes représentatives de *f* et f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre dans la symétrie par rapport à la droite $y = x$ parallèlement à la droite $y = -x$; si le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$.
- **Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$. Le théorème de la bijection réciproque en assure l'unicité.**

EXEMPLE

Pour tout réel $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto x^{\alpha}$ et $x \mapsto x^{1/\alpha}$ sont deux bijections de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, réciproques l'une de l'autre :