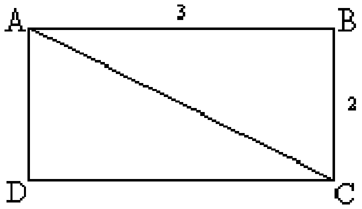
Les Racines Carrées

I. Carré d'un nombre

Pour tout nombre a, le carré de a est $a^2 = a \times a$.
a^2 est le carré de a.

Exercice :
► On connaît a^2 et on veut retrouver a.
$a^2 = 25$, alors a = 5 ou a = -5.
► AB est une longueur. $AB^2 = 13$, alors AB = $\sqrt{13}$ (AB est positif car c'est une longueur).
troncature au millième: AB $\approx$ 3,605
arrondi au centième: AB $\approx$ 3,61

II. Racine carrée d'un nombre positif



Sur la figure ci-dessus, ABCD est un rectangle avec : AB = 3 ; BC = 2.
Calculons la longueur de la diagonale du rectangle ABCD :
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AC^2 = 13$
La valeur exacte de AC est : $\sqrt{13}$

Définition :
a désigne un nombre positif.
La racine carrée de a est le nombre positif dont le carré est égal à a.

Ce nombre est noté $\sqrt{a}$.
$\sqrt{a}$ se lit "racine carrée de a". Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle un radical.
On a : $a \geqslant 0.\ (\sqrt{a})^2 = a$

Exemples :
$\sqrt{0} = 0$
$\sqrt{1} = 1$
$\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$ et 5 est un nombre positif.
$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ car $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ et $\frac{4}{3}$ est un nombre positif.

Propriété :
Si a désigne un nombre positif, alors : $\boxed{\sqrt{a^2} = a}$

Preuve :
D'après la définition, $\sqrt{a^2}$ est le nombre positif dont le carré est égal à a^2.
Or, a est le nombre positif dont le carré est a^2.
Donc : $\sqrt{a^2} = a$

Exemple :
$\sqrt{12.4^2} = 12.4$

III. Equation de la forme $x^2 = a$

Propriété :

Si a > 0,
alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$

Si a = 0,
alors l'équation $x^2 = a$ admet une seule solution : 0

Si a < 0,
alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Preuve :

Si a > 0 :
L'équation $x^2 = a$ s'écrit :

L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Si a = 0 :
L'équation $x^2 = a$ s'écrit $x^2 = 0$
L'équation $x^2 = a$ admet une seule solution : 0

Si a < 0 :
Un carré n'étant jamais négatif, l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Exemples :
L'équation $x^2 = 17$ admet deux solutions : $-\sqrt{17}$ et $\sqrt{17}$.
L'équation $x^2 = -2$ n'admet aucune solution.

IV. Produit et quotient de racines carrées

1. Produit de deux racines

Conjecture : Calculer :

Solution :

On constate que :

Propriété :
Le produit des racines carrées de deux nombres positifs est égale à la racine carrée de leur produit.
Pour tous nombres a et b (a $\geqslant$ 0 et b $\geqslant$ 0) : $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$

Preuve : Montrons que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (pour tous les nombres a et b positifs).
Calculons le carré de $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$:

$$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$$

Le nombre $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est le produit de deux nombres positifs. Il est donc positif et son carré est égal à $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = a \times b$.

On en déduit que : $\sqrt{\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a \times b}$, c'est-à-dire $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Exemples :

2. Quotient de deux racines

Conjecture : Calculer :

Solution :

On constate que :

Propriété :

Le quotient des racines carrées de deux nombres positifs est égale à la racine carrée de leur quotient.

Pour tous les nombres a et b positifs, on a : $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

Preuve : Montrons que $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (pour tous les nombres a et b positifs).

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$$

Le nombre positif $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ a donc pour carré $\dfrac{a}{b}$.

Or, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ est le seul nombre positif qui a pour carré $\dfrac{a}{b}$.

Donc $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Exemples :

3. Remarques

La somme de deux racines carrées n'est pas égale à la racine carré de la somme.

Exemple :

$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$

$\text{et } \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

Donc : $\sqrt{64} + \sqrt{36} \neq \sqrt{64 + 36}$

La différence de deux racines carrées n'est pass égale à la racine carrée de la différence.

Exemple :

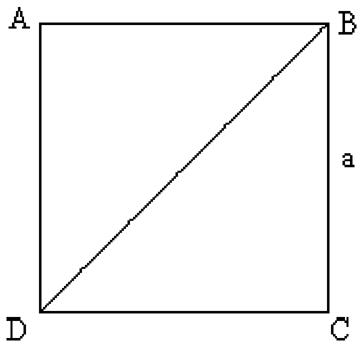
$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$

$\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

Donc : $\sqrt{25} - \sqrt{9} \neq \sqrt{25} - \sqrt{9}$

V. Utilisation en géométrie

1. ABCD est un carré de côté a. Déterminons BD.



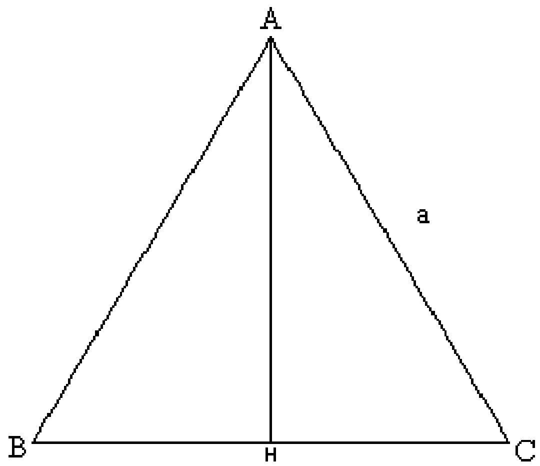
ABCD est un carré, donc BCD est un triangle rectangle en C. Appliquons le théorème de Pythagore dans ce triangle :

$BD^2 = BC^2 + DC^2 = a^2 + a^2 = a^2 \times 2$

Donc $BD = \sqrt{a^2 \times 2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{2} = a\sqrt{2}$

La diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$.

2. ABC est un triangle équilatéral de côté a. (AH) est la hauteur issue de A. Déterminons AH.



(AH) est la hauteur issue de A, donc AHC est un triangle rectangle en H.

(AH) est aussi la médiane issue de A. Elle coupe donc [BC] en son milieu H. Donc $HC = \frac{a}{2}$

Dans le triangle AHC rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore.

$AC^2 = AH^2 + HC^2$

Donc :

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a mesure $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Guesmi.B