Les primitives

EXERCICE 1

Primitives de fonctions polynômes

1. Déterminer des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$x \mapsto x$
$x \mapsto x^2$
$x \mapsto x^3$
$x \mapsto -5$

2. Déterminer des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

$x \mapsto 2x$
$x \mapsto -3x^2$
$x \mapsto 8x^3$

3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$x \mapsto 8x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

EXERCICE 2

Primitives immédiates

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

$f : x \to 0$
$g : x \to 2$
$h : x \mapsto x^5$

2. Déterminer toutes les primitives sur $]0,+\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

$i : x \to \dfrac{1}{x^2}$

$j : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3. Déterminer deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$f : x \to 2x^3 + 3x - 1$

EXERCICE 3

Fonctions simples

Déterminer deux primitives sur $]0,+\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

$f : x \to \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{3}x^2$

$g : x \to \dfrac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}$

EXERCICE 4

Fonction rationnelle

Déterminer deux primitives sur]0,+∞[de la fonction f : x $\mapsto \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}$.

EXERCICE 5

Puissance

Déterminer deux primitives sur $\mathbb{R}$ de f : x $\rightarrow$ 5 $(4x - 1)^6$

et deux primitives sur]1; +∞[de g : x $\mapsto \dfrac{7}{(3x+2)^5}$.

EXERCICE 6

Racine carrée

Déterminer une primitive sur]-1; +∞[de f : x $\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+5}}$,

et une primitive sur]2; +∞[de g : x $\rightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$.

EXERCICE 7

Primitives et dérivées

1. Soit g la fonction définie sur]0; +∞[par g(x) = x $\sqrt{x}$.
Calculer la dérivée de g sur]0,+∞[.

2. Soit f la fonction définie sur]0; +∞[par f(x) = $\sqrt{x}$.
Déduire de la première question une primitive de f sur]0; +∞[.

EXERCICE 8

Signe et variations d'une primitive

Soit f la fonction définie sur]-3,+∞[par f(x) = $\dfrac{x}{x+3}$ et F la primitive de f sur]-3,+∞[qui s'annule en zéro.

1. Etudier les variations de la fonction F sur]-3; +∞[.
2. Etudier le signe de F(x) sur [-3; +∞[.
3. Soit g la fonction définie sur]-3; +∞[par g(x) = F(x) - x.

a) Démontrer que g est décroissante sur $]-3; +\infty[$.
b) En déduire que : si $x > 0$, alors $F(x) < x$.

CORRECTION

EXERCICE 1

1. ► Des primitives de $x \mapsto x$ sont par exmple : $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 4$ ou encore $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 4,5$
d'une manière générale : $x \to \frac{1}{2}x^2 + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

► Des primitives de $x \mapsto x^2$ sont par exemple : $x \to \frac{1}{3}x^3 + 89$ ou encore $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 12,7$
d'une manière générale : $x \to \frac{1}{3}x^3 + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

► Des primitives de $x \mapsto x^3$ sont par exemple : $x \to \frac{1}{4}x^4 + 8,7$ ou encore $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 121,7$
d'une manière générale : $x \to \frac{1}{4}x^4 + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

► Des primitives de $x \mapsto -5$ sont par exemple : $x \to -5x + 1,4$ ou encore $x \to -5x + 17$
d'une manière générale : $x \to -5x + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

2. Des primitives de $x \mapsto 2x$ sont de la forme $x \to x^2 + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Des primitives de $x \to -3x^2$ sont de la forme $x \to -x^3 + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Des primitives de $x \to 8x^3$ sont de la forme $x \to 2x^4 + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

3. A l'aide des questions précédentes, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 8x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ est par exemple :

$$x \mapsto 2x^4 - x^3 + x^2 - 5x$$

EXERCICE 2

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 0$ est $F : x \to 4$
D'une manière générale, les primitives de f sont $x : \mapsto \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
Une primitive de $g : x \mapsto 2$ est $G : x \mapsto 2x$
Une primitive de $h : x \to x^5$ est $H : x \mapsto \frac{1}{6}x^6$

2. Les primitives de $i : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont $I : x \mapsto -\frac{1}{x} + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
Les primitives de $j : x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont $J : x \to 2\sqrt{x} + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

3. Deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f sont :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + 2 \quad \text{et} \quad x \to \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + 18$$

EXERCICE 3

- Deux primitives de f sont par exemple :

$$x \to -\frac{3}{x} + \frac{1}{9}x^3 \quad \text{et} \quad x \to -\frac{3}{x} + \frac{1}{9}x^3 - 12$$

- Deux primitves de g sont par exemple :

$$x \to 4\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 \quad \text{et} \quad x \to 4\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 3.5$$

EXERCICE 4

La fonction f peut s'écrire : f : $x \mapsto 3x + 2 + \frac{1}{x^2}$
Deux primitives de la fonction f sont par exemple :

$$x \to \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad x \to \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x} - 3$$

EXERCICE 5

- On utilise la formule suivante $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec u(x) = 4x - 1 et n = 7.

Deux primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc :

$$x \mapsto \frac{5}{28}(4x-1)^7 \quad \text{et} \quad x \to \frac{5}{28}(4x-1)^7 - 1.4$$

- On utilise la forumule suivant : $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$ avec u(x) = 3x + 2 et n = 4.

Deux primitives de g sur]1; +∞[sont donc :

$$x \to -\frac{7}{12(3x+2)^4} \quad \text{et} \quad x \to -\frac{7}{12(3x+2)^4} - 7$$

EXERCICE 6

On utilise la formule $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

- avec u(x) = 3x + 5

Une primitive sur]-1; +∞[de f est donc : x $\to \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+5}$

- avec u(x) = x^2 + 2x - 8

Une primitive sur]2; +∞[de g est donc : x $\mapsto \sqrt{x^2+2x-8}$

EXERCICE 7

1. g est dérivable sur]0; +∞[et :

g' $(x) = \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x+x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

2. En remarquant, à l'aide de la question précédente que f(x) = $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2}\sqrt{x} = \dfrac{2}{3}$ g'(x),

une primitive de f sur]0; +∞[est : x $\mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$

EXERCICE 8

1. Etude des variations de F sur]-3; +∞[:
Pour tout x de]-3; +∞[, F'(x) = f(x).
Pour étudier les variations de F, étudions le signe de f :

Donc : f'(x) < 0 pour x ∈]-3; 0[;
f'(x) = 0 pour x = 0;
f'(x) > 0 pour x ∈]0; +∞[

D'où : F est décroissante sur]-3; 0] et croissante sur [0; +∞[

2. D'après les variations de F, F admet un minimum en 0. De plus, F(0) = 0 (puisque F est la primitive de f qui s'annule en 0).
D'où : pour tout x ∈ [-3; +∞[, F(x) ⩾ 0.

3. a) Pour tout x appartenant à]-3; +∞[,

$$g'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1 = \frac{x}{x+3} - 1 = \frac{x-x-3}{x+3} = -\frac{3}{x+3}$$

Pour tout x appartenant à]-3; +∞[, $-\dfrac{3}{x+3}$ < 0
Donc : pour tout x appartenant à]-3; +∞[, $g'(x)$ < 0
D'où : g est décroissante sur]-3; +∞[.

3. b) D'après les variations de g, g est décroissante sur $[0; +\infty[$ et admet donc un maximum en 0.
De plus, $g(0) = F(0) - 0 = 0$.
Donc : pour tout $x > 0$, $g(x) < 0$
c'est-à-dire : pour tout $x > 0$, $F(x) - x < 0$
D'où : pour tout $x > 0$, $F(x) < x$.