

Les équations de droites

Définition:

Toute fonction affine $f(x)=ax+b$ où a et b sont des constantes, x étant l'élément variable, est représentée par une droite. Réciproquement nous démontrons aussi qu'une droite dans un repère du plan (droite non parallèle à l'axe des ordonnées) est la représentation graphique d'une fonction affine.

Dans un repère du plan, tout point est situé à l'aide de ses coordonnées (abscisse;ordonnée). Chaque point d'une droite de ce plan est donc repéré par $(x;y)$ où x est son abscisse lue sur l'axe des abscisses (souvent nommé x') et y son ordonnée lue sur l'axe des ordonnées (souvent nommé y').

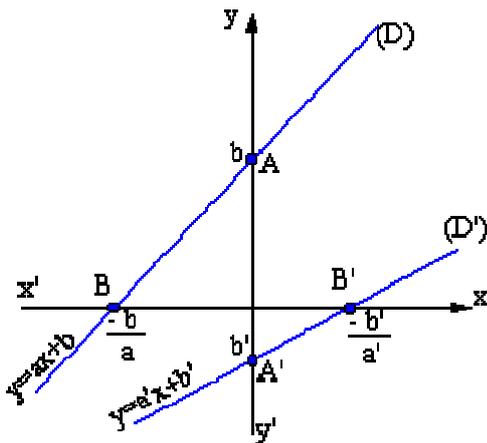
Comme cette droite représente une fonction affine $f(x)=ax+b$, nous pouvons en déduire que pour un point quelconque $P(x;y)$ de cette droite comme x est l'abscisse de P alors $f(x)$ est l'ordonnée de P . Ce qui peut donc s'écrire: $y=ax+b$.

Une équation d'une droite, dans un repère du plan, est de la forme $y=ax+b$. Le coefficient a est appelé coefficient directeur de la droite.

Remarque : nous écrivons "UNE équation d'une droite", ce qui signifie qu'il y en a d'autres. Par exemple, pour une droite donnée nous pouvons avoir $y=2x+1$ mais aussi $y-2x=1$ ou $2x-y+1=0$ ou $4x-2y=-2$ ou ... Mais chacune de ces équations, après simplification et repositionnement des termes, est équivalente à $y=2x+1$ (si vous ajoutez $2x$ aux deux membres de l'équation $y-2x=1$ vous obtenez $y-2x+2x=1+2x$ et $y=2x+1$,... etc.).

Notation : pour une droite (D) d'équation $y=ax+b$, il est parfois intéressant d'adopter la notation suivante : **$(D):y=ax+b$**

Points particuliers:



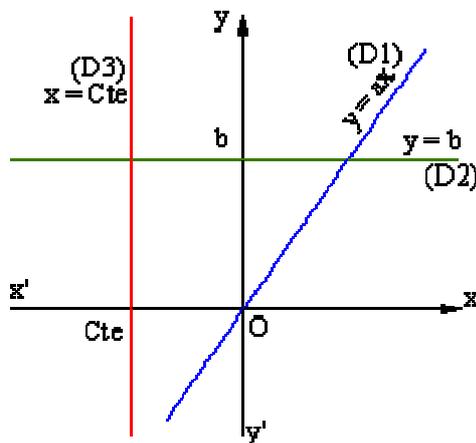
- Ordonnée à l'origine :

Une droite non parallèle à $(y'y)$ coupe cet axe en un point $(0, b)$: d'abscisse 0 (tous les points de $(y'y)$ ont pour abscisse 0) et d'ordonnée b (ordonnée à l'origine).

- Abscisse à l'origine :

Si la droite coupe l'axe des abscisses, elle le fait au point $(-b/a; 0)$ d'abscisse $-b/a$ (abscisse à l'origine) et d'ordonnée 0 (tous les points de $(x'x)$ ont pour ordonnée 0).

Droites particulières:



Dans un repère du plan d'axes $(x'x)$ et $(y'y)$, nous avons les trois possibilités suivantes:

- (D1) **Droite passant par l'origine du repère: $b=0$.** Elle représente une fonction linéaire. Son équation est donc du type $y=ax$. **Une fonction linéaire est une fonction affine**, la réciproque est fautive.

- (D2) **Droite parallèle à l'axe des abscisses: $a=0$.** Tous ses points ont la même ordonnée b . Son équation est donc $y=b$.

- (D3) **Droite parallèle à l'axe des ordonnées :** tous ses points ont la même abscisse quelque soit y . Son équation est de la forme $x=Cte$ où Cte est un nombre

constant. C' est un cas d'exception.

Calcul d'une équation d'une droite :

1. Droite passant par 2 point connus :

Remarque:

Il faut vérifier, en étudiant les coordonnées des deux points, si la droite est parallèle à l'un des deux axes (son équation est immédiate: soit $y=Cte$ (parallèle à $(x'x)$) soit $x=Cte$ (parallèle à $(y'y)$). Exemples:

* Soient $A(2;1)$ et $B(2;4)$: comme $x_A = x_B = 2$ alors (AB) est parallèle à $(y'y)$ et son équation est $x=2$.

* Soient $A(4;3)$ et $B(2;3)$: comme $y_A = y_B = 3$ alors (AB) est parallèle à $(x'x)$ et son équation est $y=3$.

Soient les points $A(2;5)$ et $B(-3; -4)$.

Méthode :

Comme $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$ alors (AB) n'est pas parallèle aux axes de coordonnées

L'équation de la droite est donc de la forme $y=ax+b$:

En A nous avons $y_A=5$ et $x_A=2$, donc $5=2a+b$ (1)

En B nous avons $y_B=-4$ et $x_B=-3$ donc $-4=-3a+b$ (2).

a et b doivent vérifier les équations (1) et (2) donc être solutions du système :

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -3a + b = -4 \quad (\times -1) \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 3a - b = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 3a - b + 2a + b = 4 + 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = 5 - 2a \\ 5a = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 5 - 2a \\ a = 9/5 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 5 - 2(9/5) \\ a = 9/5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = 5 - 18/5 \\ a = 9/5 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 25/5 - 18/5 \\ a = 9/5 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 7/5 \\ a = 9/5 \end{cases}$$

Vérification des calculs:

pour (1) : $2a + b = 2(9/5) + 7/5 = 18/5 + 7/5 = 25/5 = 5$. (1) est vérifiée

pour (2) : $-3a + b = -3(9/5) + 7/5 = -27/5 + 7/5 = -20/5 = -4$. (2) est vérifiée

Conclusion : La fonction recherchée est donc : $y = (9/5)x + 7/5$

Pour s'entraîner:

Pour vérifier que vous avez bien compris ce qui est exposé ci dessus, un petit programme interactif peut être affiché dans une fenêtre auxiliaire. Il permet de:

- Placer deux points dans un repère orthonormal.
- Tracer la droite joignant ces deux points.
- Donner à la demande l'équation de cette droite.

2. Droite passant par un point connu et parallèle à une droite connue par son équation:

Soient le point A(1;4) et la droite (D) : $y = 2x+3$. Calculer une équation de la droite (d) passant par A et parallèle à (D).

Méthode :

Nous savons que des droites parallèles ont même coefficient directeur.

Comme les droites (D) et (d) sont parallèles alors le coefficient directeur de (d) est le même que celui de (D). Donc $a=2$ et (d): $y=2x+b$.

Les coordonnées du point A vont nous permettre de calculer b.

En A: $y=4$ et $x=1$. Donc (d): $4=2 \times 1+b$ et $4=2+b$ d'où $b=2$.

Une équation de (d) est donc $y=2x+2$.

3. Droite passant par un point et perpendiculaire à une droite connue par son équation :

Dans ce cas, le repère doit être orthonormé (on utilise un théorème dont la démonstration fait appel au théorème de Pythagore pour le calcul de distances, ce qui nécessite un repère orthonormé).

Soient le point A(1;4) et la droite (D) : $y = 2x+3$. Calculer une équation de la droite (d) passant par A et perpendiculaire à (D).

Méthode :

Nous savons que les coefficients directeurs a et a' de deux droites perpendiculaires sont tels que $aa' = -1$

Une équation de (d) est de la forme $y=ax+b$. Le coefficient directeur de (D) est 2.

Comme (d) et (D) sont perpendiculaires alors $2 \times a = -1$ d'où $a = -1/2$.

Une équation de (d) a donc la forme (d): $y = (-1/2)x + b$.

Comme au 2. le calcul de b se fait à l'aide des coordonnées de A.

En A: $y=4$ et $x=1$. Donc (d): $4 = (-1/2) \times 1 + b$. Nous obtenons $b=9/2$.

Une équation de (d) est donc $y = (-1/2)x + 9/2$.

Pour démontrer que :

Un point appartient à une droite :

Si les coordonnées d'un point vérifient une équation de la droite alors ce point appartient à la droite (la réciproque est vraie).

Plusieurs (au moins trois) points sont alignés :

Si plusieurs points vérifient la même équation de droite alors ces points sont alignés (la réciproque est vraie).

Pratiquement vous calculerez une équation de la droite passant par deux de ces points, et vous vérifierez ensuite pour chaque point restant, si ses coordonnées vérifient cette équation.

Deux droites sont parallèles :

Si les équations des deux droites sont soit de la forme $y=Cte$, soit de la forme $x=Cte$ alors ces deux droites sont parallèles.

La notation "Cte" signifie qu'il s'agit d'une valeur numérique constante.

Si deux droites ont même coefficient directeur alors ces deux droites sont parallèles (la réciproque est vraie).

Deux droites sont perpendiculaires :

Ce théorème n'est applicable que dans un repère orthonormé.

Si le produit des coefficient directeurs des deux droites est égal à -1 alors ces deux droites sont perpendiculaires (la réciproque est vraie).

Problème :

Ce problème permet de comprendre comment:

- calculer une équation d'une droite.
- calculer les coordonnées du point d'intersection de deux droites.

- démontrer qu'un point est milieu d'un segment.
- utiliser le parallélisme de deux droites.
- utiliser les propriétés d'un parallélogramme.
- démontrer l'appartenance d'un point à une droite.

Énoncé:

Dans un repère d'axes $(x'x)$ et $(y'y)$, d'origine O , on donne $A(-2;1)$, $B(6;4)$ et $C(-2;0)$.

- 1- Calculer une équation de la droite (AB) .
- 2- Calculer une équation de la droite (d) de coefficient directeur $3/2$ et passant par C .
- 3- Calculer les coordonnées du point P commun aux droites (AB) et (d) .
- 4- La droite (d) coupe l'axe des ordonnées $(y'y)$ en N .
 - a) Calculer les coordonnées de N .
 - b) Montrer que N est le milieu du segment $[EC]$.
- 5- La droite parallèle à la droite (BC) et passant par N coupe la droite (AB) en P . Calculer les coordonnées du point P .
- 6 -Soit H un point tel que $AKBN$ est un parallélogramme.
 - a) Calculer les coordonnées de K .
 - b) Montrer que K appartient à (d)