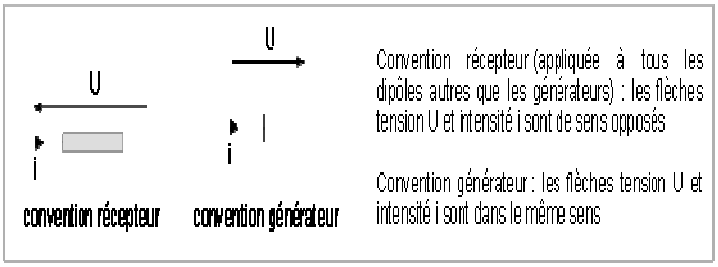
Etude des condensateurs et bobines

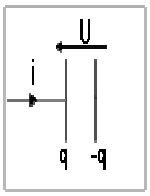
B. Conventions récepteur et générateur

Pour étudier le comportement électrique d'un dipôle, il est nécessaire d'orienter le circuit série ou la branche dans lequel il se trouve. Le sens d'orientation, choisi arbitrairement, est indiqué par des flèches-intensités.
L'intensité est positive si le sens du courant électrique est le même que le sens d'orientation choisi par l'expérimentateur ; elle est négative dans le cas contraire.



C. Relation entre la tension U d'un condensateur et la charge q d'une de ses armatures

Représentons un condensateur et adoptons les conventions suivantes :
- la flèche tension pointe vers l'armature de charge q
- les flèches tension U et intensité i sont de sens opposés (conformément à la convention récepteur).



Remarque : la flèche intensité et la flèche tension pointent toutes les ceux vers l'armature de charge q.

Si les conventions précédemment énoncées sont respectées, alors on a la relation

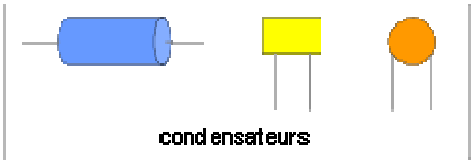
$q = CU$ q : charge électrique en coulomb (C)
C : capacité du condensateur en farad (F)
U : tension en volt (V)

Pour exprimer la capacité d'un condensateur, les sous-multiples du farad sont très souvent employés :
- le microfarad : 1 µF = 10^{-6} F
- le nanofarad : 1 nF = 10^{-9} F
- le picofarad : 1 pF = 10^{-12} F

page 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

A. Description et symbole

Un condensateur est constitué de deux surfaces conductrices métalliques (les armatures) séparées par un isolant (air, papier, céramique...). Il a généralement l'une des formes suivantes :



Le symbole normalisé du condensateur est :

Les deux traits parallèles représentent les armatures.

D. Relation entre charge électrique et intensité

L'intensité est un débit de charges électriques transportées par les électrons (dans les métaux) ou les ions (dans les solutions).

Rappel : le sens de déplacement des électrons est contraire au sens conventionnel du courant.

Si les conventions précédemment citées sont respectées, alors la relation suivante est vérifiée :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

i : intensité (en ampère) du courant arrivant sur l'armature de charge q

q : charge (en coulomb) d'une des armatures du condensateur

La notation $\frac{dq}{dt}$ représente la dérivée de la charge q par rapport au temps (exprimé en seconde).

- Si le courant circule réellement dans le sens indiqué par la flèche intensité, alors i, donc $\frac{dq}{dt}$, sont positifs ; cela signifie que la charge q augmente.

E. Energie emmagasinée par un condensateur

$$E = \frac{1}{2}CU^2$$

E : énergie en joule (J) emmagasinée par le condensateur

C : capacité du condensateur en farad (F)

U : tension du condensateur en volt (V)

En remplaçant, dans la formule précédente, « C » par « $\frac{q}{U}$ », on obtient :

$$E = \frac{1}{2}qU$$

E est en joule (J), q en coulomb (C) et U en volt (V)

A partir des expressions : $E = \frac{1}{2}CU^2$ et $U = \frac{q}{C}$, on obtient aussi :

$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

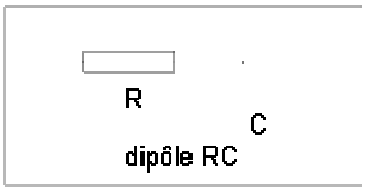
E est en joule (J), q en coulomb (C) et C en farad (F)

Le stockage et le déstockage de l'énergie ne peuvent jamais s'effectuer instantanément. C'est pourquoi la charge et la décharge d'un condensateur ne peuvent pas être instantanées. La tension aux bornes d'un condensateur et la charge électrique de chacune des armatures de ce condensateur sont donc toujours continues.

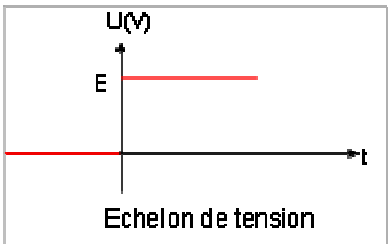
Remarque : l'intensité du courant traversant un dipôle RC peut tout à fait être discontinue.

A. Définitions

- On appelle dipôle RC l'association en série d'une résistance R avec un condensateur de capacité C :



- Un échelon de tension est un signal électrique de la forme indiquée ci-contre : La tension est discontinue ; elle passe brutalement de 0 V à une valeur constante E.
- On appelle réponse en tension du dipôle RC la tension U(t) du condensateur.
- La réponse en intensité du dipôle RC correspond à l'intensité i(t) du courant le traversant.

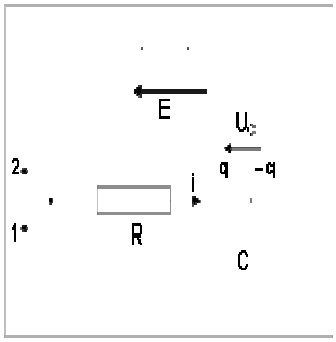


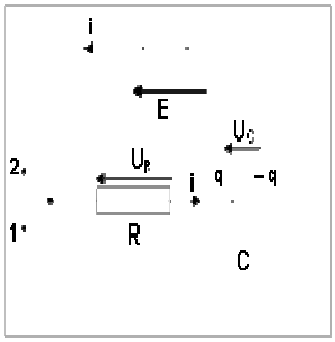
II. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension

B. Description du montage utilisé pour l'étude du dipôle RC

L'interrupteur permet de connecter le dipôle RC à un simple fil de connexion (position 1) ou au générateur de tension (position 2).
Lorsque l'interrupteur passe de la position 1 à la position 2, la tension entre les bornes du dipôle RC passe brusquement de 0 à la valeur constante E. Le dipôle est donc soumis à un échelon de tension.
Nous allons alors étudier l'évolution de :

- la tension U_C du condensateur
- l'intensité i du courant traversant le dipôle RC.





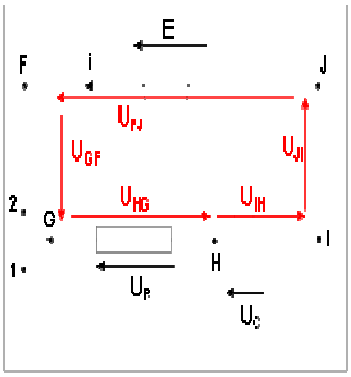
C. Tension entre les bornes du condensateur

A la date t = 0, faisons basculer l'interrupteur de la position 1 à la position 2.
La loi d'additivité des tensions permet d'écrire, pour t > 0 : $U_{FJ} + U_{GF} + U_{HG} + U_{IH} + U_{JI} = 0$ avec :

$U_{FJ} = E$; $U_{GF} = 0$; $U_{HG} = -U_R$ (*) ; $U_{IH} = -U_C$; $U_{JI} = 0$.

On a donc : $E - U_R - U_C = 0$ soit : $E = U_C + U_R$ (1)

(*) Le signe « – » est dû au fait que les flèches tensions de U_{HG} et de U_R sont de sens inverses.



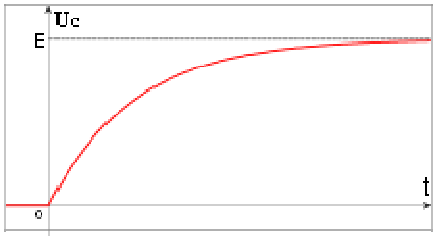
$U_R = Ri$ et $i = \frac{dq}{dt}$ donc : $U_R = R\frac{dq}{dt}$. De plus, $q = CU_C$, donc : $\frac{dq}{dt} = \frac{d(CU_C)}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$ (la capacité C est une constante). Alors : $U_R = RC\frac{dU_C}{dt}$

L'équation (1) devient : $E = U_C + RC\frac{dU_C}{dt}$ (2) ou $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{RC}$ (3)

Les équations (2) et (3) font figurer une fonction ($U_C(t)$) et sa dérivée ($\frac{dU_C}{dt}$) ; ce sont des équations différentielles.

$$U_C(t) = -Ee^{-\frac{t}{RC}} + E \quad \Rightarrow \quad U_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

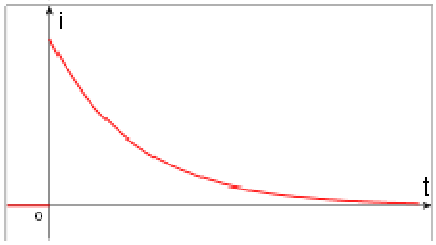
$$\frac{E}{R} \qquad U_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$



D. Intensité du courant traversant le dipôle RC

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad \text{et} \quad q(t) = CU_C(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad \text{donc :} \quad i(t) = CE(-e^{-\frac{t}{RC}} \times (-\frac{1}{RC}))$$

$$\text{D'où :} \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{ou} \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$



Vous admettrez que la solution de l'équation différentielle : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{RC}$ (ou $E = U_C + RC\frac{dU_C}{dt}$) est de la forme : $U_C(t) = Ae^{\alpha t} + B$ (α : lettre grecque « alpha »)

Pour déterminer les valeurs de A, α et B, il faut trouver deux équations.

- La première est obtenue en remplaçant U_C par $Ae^{\alpha t} + B$ dans l'équation différentielle : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{RC}$ (ou $E = U_C + RC\frac{dU_C}{dt}$).

Vous avez vu (ou vous verrez bientôt) que : $(e^u)' = e^u \times u'$. Alors : $\frac{d}{dt}(e^{\alpha t}) = e^{\alpha t} \times \alpha$ et $\frac{dU_C}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{\alpha t} + B) = \frac{d}{dt}(Ae^{\alpha t}) = A\frac{d}{dt}(e^{\alpha t}) = Ae^{\alpha t} \times \alpha$

Alors : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow \alpha Ae^{\alpha t} + \frac{Ae^{\alpha t} + B}{RC} = \frac{E}{RC} \Rightarrow Ae^{\alpha t}(\alpha + \frac{1}{RC}) + \frac{B}{RC} = \frac{E}{RC}$ (4)

Le terme $\frac{E}{RC}$ est constant. Pour que l'équation (4) soit vérifiée pour toute date t, il faudrait aussi que le terme : $Ae^{\alpha t}(\alpha + \frac{1}{RC}) + \frac{B}{RC}$ soit constant, c'est-à-dire qu'il ne dépende pas du temps. Cela n'est possible que si : $\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$

L'équation (4) devient : $\frac{B}{RC} = \frac{E}{RC}$, donc : $B = E$.

- La deuxième équation est établie à partir des conditions initiales :

$U(0) = Ae^{\alpha \times 0} + B = A + B$ ($e^0 = 1$).

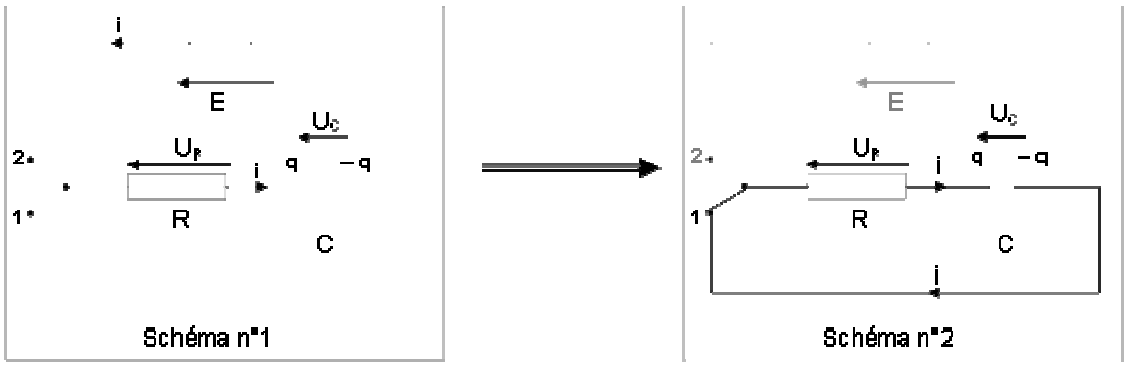
A $t = 0$, le condensateur est déchargé ($q = 0$) ; sa tension est donc nulle (car $U_C = \frac{q}{C}$) : $U(0) = 0$. Alors : $A + B = 0 \Rightarrow A = -B = -E$

On a finalement : $U_C(t) = Ae^{\alpha t} + B$ avec : $A = -E$, $\alpha = -\frac{1}{RC}$ et $B = E$. La tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur a donc pour expression :

III. Décharge d'un condensateur dans une résistance

A. Tension entre les bornes du condensateur

Chargeons un condensateur jusqu'à ce que sa tension U_C atteigne celle (= E) délivrée par le générateur (voir schéma n°1). Puis, à la date t = 0, faisons basculer l'interrupteur de la position 2 à la position 1 afin que le condensateur se décharge.



Remarque : Lorsque : $U_C = E$, on a aussi : $U_R = 0$ donc : $i = 0$. Plus aucun courant ne traverse le condensateur ; la charge de ce dernier est alors terminée.

Nous allons déterminer l'expression de la tension $U_C(t)$ du condensateur durant la décharge.
Pour commencer, considérons la maille tracée en noir sur le schéma n°2 (schéma représentant la situation à t > 0). La loi d'additivité des tensions appliquée à cette maille permet d'écrire : $U_R + U_C = 0$.

Or : $U_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = R\frac{d(CU_C)}{dt} = RC\frac{dU_C}{dt}$ d'où l'équation : $RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$ (1) ou : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = 0$ (2)

Vous avez vu précédemment (partie II.C de ce cours) que la fonction $U_C(t)$ est solution de l'équation (2) (ou (1)) si elle est de la forme : $U_C(t) = Ae^{\alpha t} + B$.

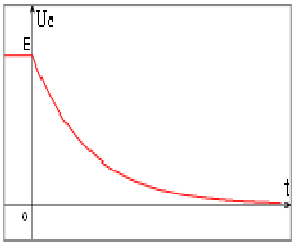
Pour déterminer les valeurs de A, α et B, il faut trouver deux équations.

- La première est obtenue en remplaçant U_C par $Ae^{\alpha t} + B$ dans l'équation différentielle (2) (ou(1)) : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = 0$

$\frac{dU_C}{dt} = Ae^{\alpha t} \times \alpha$ alors : $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = 0 \Leftrightarrow \alpha Ae^{\alpha t} + \frac{Ae^{\alpha t} + B}{RC} = 0 \Rightarrow Ae^{\alpha t}(\alpha + \frac{1}{RC}) + \frac{B}{RC} = 0$ (3)

L'équation doit être vérifiée, quelle que soit la valeur de t. Il faut donc que : $\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$. L'équation (3) devient alors : $\frac{B}{RC} = 0$, d'où : $B = 0$.

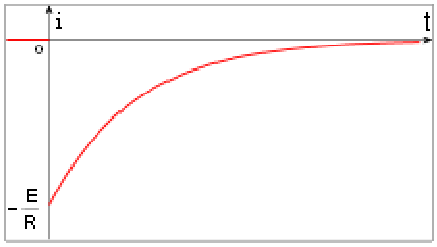
- La deuxième équation est établie à partir des conditions initiales (i.e. à t = 0).



Juste avant t = 0, on a : $U_C = E$. Puisque la tension du condensateur ne peut pas être discontinue, on a encore, à t = 0 : $U_C = E$.
Alors : $U_C(0) = Ae^0 = A$ et $U_C(0) = E$. On a donc : $A = E$.

Finalement : $U_C(t) = Ae^{\alpha t} + B$ avec : $A = E$, $\alpha = -\frac{1}{RC}$ et $B = 0$. Alors : $U_C(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$ ou $U_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = RC$.

B. Intensité du courant traversant le dipôle RC



$i(t) = \frac{dq}{dt}$ et $q(t) = C\overset{E}{U_C}(t) = CEe^{-\frac{t}{RC}}$ donc : $i(t) = CEe^{-\frac{t}{RC}} \times (-\frac{1}{RC})$

$\Rightarrow \quad i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ ou $i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Remarque : L'intensité i(t) est négative, ce qui signifie que le sens réel du courant est contraire à celui indiqué par les flèche intensité sur le schéma du montage (schéma n°2 du III.A).

IV. Constante de temps du dipôle RC

A. Analyse dimensionnelle

Nous allons déterminer l'unité de τ (= RC) en utilisant la méthode de l'analyse dimensionnelle.

Des formules : $R = \frac{U}{I}$ et $C = \frac{q}{U}$, on déduit que : $[RC] = \frac{U}{[I][U]}\frac{q}{} = \frac{q}{[I]}$ (1). De plus, $i = \frac{dq}{dt}$ alors $[I] = \frac{q}{[t]}$ et $\frac{q}{[I]} = [t]$ (2)

A partir des égalités (1) et (2), on obtient : $[RC] = [t]$ ([RC] et [t] signifient : « dimension de RC » et « dimension temps » ou « dimension d'un temps »)

Le produit RC est homogène à un temps. Il s'exprime donc en seconde. Il est désigné par la lettre τ (lettre grecque « tau ») et est appelé constante de temps du dipôle RC.

B. Méthodes de détermination de la constante de temps τ

1. Calcul direct

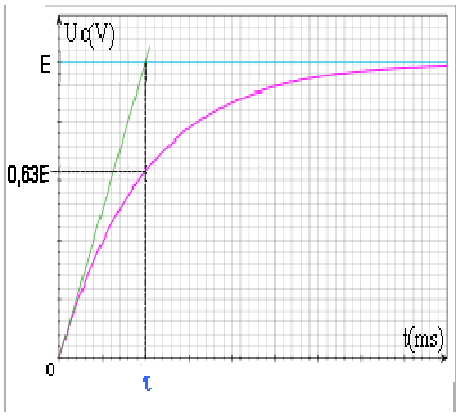
On connaît R (en Ω) et C (en F) ; il reste à calculer le produit RC (en s).

2. Utilisation de la représentation graphique $U_C(t)$ de la réponse du dipôle RC à un échelon de tension

Soit $U_C(t)$ la tension entre les bornes du condensateur lors de sa charge : $U_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

- Si $t = \tau$ (= RC), alors : $U_C = E(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63\,E$

Pour déterminer la valeur de τ, il suffit de déterminer graphiquement l'abscisse du point de la courbe $U_C(t)$ ayant pour ordonnée 0,63 E.



- La tangente à l'origine (point de coordonnées (0 ; 0)) à la courbe $U_C(t)$ a pour équation :

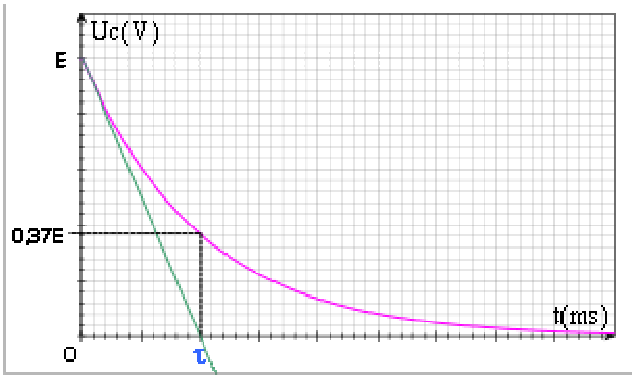
$f(t) = (\frac{dU_C}{dt})_{t=0} \times t + U_C(0)$ avec : $\frac{dU_C(t)}{dt} = -Ee^{-\frac{t}{RC}} \times (-\frac{1}{RC})$ et $U_C(0) = 0$

L'écriture $(\frac{dU_C}{dt})_{t=0}$ désigne la dérivée de U(t) par rapport au temps à la date t = 0.

$\Rightarrow \quad f(t) = -Ee^{0} \times (-\frac{1}{RC}) \times t \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{E}{RC}t = \frac{E}{\tau}t$

$\Rightarrow$ La tangente passe par le point de coordonnées (τ ; E). En effet : $f(\tau) = E$

Pour déterminer la valeur de τ, il suffit alors de tracer la tangente à l'origine ; elle coupe l'asymptote $U_C = E$ au point d'abscisse τ.

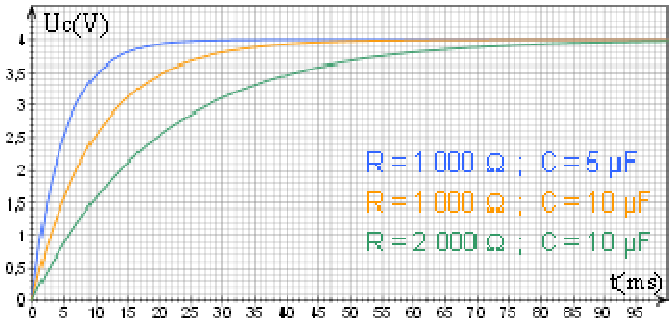


Pour déterminer la valeur de τ, il suffit de tracer la tangente à la courbe $U_C(t)$ au point (0 ; E) ; elle coupe l'asymptote $U_C = 0$ (c'est-à-dire : l'axe des abscisses) au point d'abscisse τ.

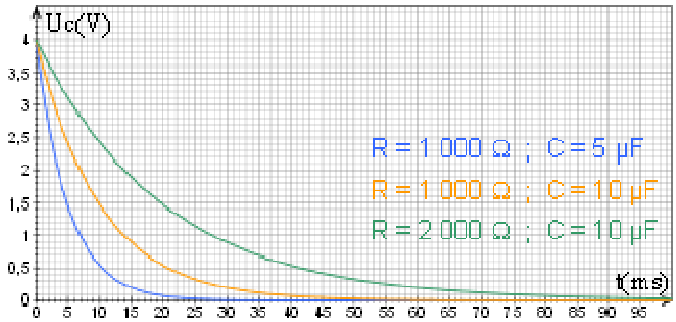
C. Influence des caractéristiques du dipôle RC sur la charge et la décharge du condensateur

On peut vérifier, à l'aide des courbes ci-dessous, qu'une augmentation de la résistance R et/ou de la capacité C du condensateur a pour effet de ralentir la charge et la décharge de ce dernier.

charge du condensateur :



décharge du condensateur :



Remarque :

La charge d'un condensateur est réalisée à 99 % au bout d'une durée égale à 5τ (voir exercice n°10). Cette durée est éga
99 % le même condensateur.

3. Utilisation de la représentation graphique $U_C(t)$ de la décharge du condensateur

La tension entre les bornes du condensateur lors de sa décharge est : $U_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$

- Si $t = \tau$, alors : $U_C = E e^{-1} \approx 0{,}37\ E$

Pour déterminer la valeur de τ, il suffit de déterminer graphiquement l'abscisse du point de la courbe $U_C(t)$ ayant pour ordonnée 0,37 E.

- La tangente au point de coordonnées (0 ; E) à la courbe $U_C(t)$ a pour équation :

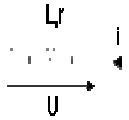
$$f(t) = \left(\frac{dU_C}{dt}\right)_{t=0} \times t + U_C(0) \quad \text{avec} \quad \frac{dU_C(t)}{dt} = E e^{-\frac{t}{RC}} \times \left(-\frac{1}{\tau}\right) \quad \text{et} \quad U_C(0) = E$$

$$\Rightarrow\ f(t) = E e^{0} \times \left(-\frac{1}{\tau}\right) \times t + E \quad \Rightarrow \quad f(t) = -\frac{t}{\tau} E + E = E\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

La tangente passe par le point de coordonnées (τ ; 0).
En effet : $f(\tau) = 0$

Attention ! Cette relation est valable seulement si l'on adopte la convention récepteur, c'est-à-dire : si les flèches tension et intensité sont de sens contraires.

Exemple :



Remarques:

- Il est possible d'augmenter l'inductance L d'une bobine en y introduisant un noyau de fer (cylindre de fer). Dans ce cas, l'expression $U = L\frac{di}{dt} + ri$ n'est plus valable.
- Dans le cas où l'intensité i est constante, on a : $\frac{di}{dt} = 0$; la bobine se comporte alors comme un conducteur ohmique de résistance r.
- La résistance r d'une bobine vaut généralement quelques ohms ou quelques dizaines d'ohms.

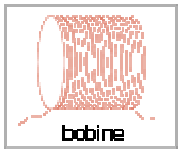
C. Energie emmagasinée dans une bobine

$$E = \frac{1}{2}Li^2$$

E : énergie en joule (J) emmagasinée par la bobine
L : inductance en henry (H)
i : intensité en ampère (A)

Le stockage et le déstockage de l'énergie ne peuvent jamais s'effectuer instantanément. C'est pourquoi l'intensité du courant dans une bobine ne subit jamais de discontinuité.

A. Description et symbole



Une bobine est un dipôle constitué par un enroulement cylindrique d'un fil électrique.

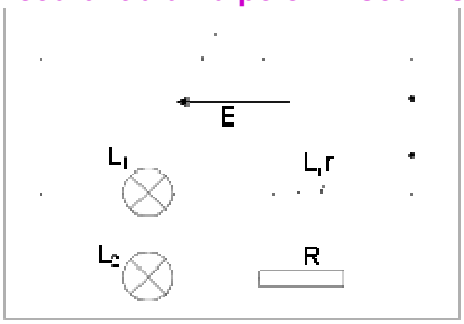
Symbole normalisé d'une bobine d'inductance L et de résistance r :

B. Relation entre la tension d'une bobine et l'intensité du courant qui la traverse

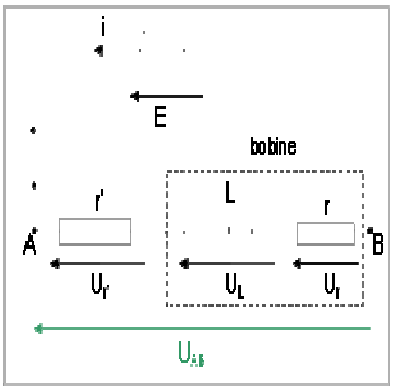
$$U = L\frac{di}{dt} + ri$$

U : tension (en volt) entre les bornes de la bobine
L : inductance de la bobine en henry (H)
i : intensité en ampère (A)
t : temps en seconde
r : résistance de la bobine en ohm (Ω)

VI. Etude de la réponse en courant d'un dipôle RL soumis à un échelon de tension



C. Etablissement et résolution de l'équation différentielle



Considérons le circuit ci-contre constitué d'un générateur délivrant une tension E, d'un interrupteur, d'une résistance r' et d'une bobine (symbolisée par une résistance r et une bobine idéale de résistance nulle).

Fermons l'interrupteur à la date t = 0. La tension U_{AB} entre les bornes A et B du dipôle RL passe instantanément de 0 V à la valeur E. Par contre, l'intensité n'a pas eu le temps d'évoluer ; elle reste nulle : i(0) = 0. En effet, l'intensité du courant traversant une bobine ne peut pas subir de discontinuité.

On a : $U_{AB} = U_r + U_L + U_{r'}$ et $U_{AB} = E \Rightarrow E = U_r + U_L + U_{r'} \Rightarrow E = ri + L\frac{di}{dt} + r'i$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{r+r'}{L} i = \frac{E}{L}$$

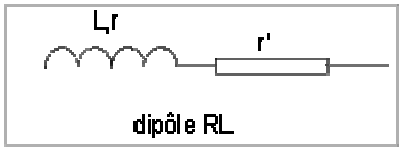
Que se passe-t-il lorsque l'on ferme l'interrupteur ?
- La lampe L_2 brille instantanément tandis que la lampe L_1 en série avec la bobine s'allume avec un retard.

Que se passe-t-il lorsqu'on ouvre l'interrupteur ?
- Les lampes L_1 et L_2 continuent à briller pendant un bref instant.

Remarque : le courant qui traverse la bobine est alors le même que celui traversant chacune des lampes.

Il apparaît donc que la bobine minimise les variations d'intensité occasionnées lors de la fermeture et de l'ouverture de l'interrupteur. Elle retarde l'établissement et la rupture du courant.

A. Définitions



- Un dipôle RL correspond à une bobine d'inductance L et de résistance interne r généralement associée en série avec une résistance r'.
- La réponse en intensité du dipôle RL correspond à l'intensité i(t) du courant le traversant.
- On appelle réponse en tension du dipôle RL la tension U(t) de la bobine.

B. Mise en évidence expérimentale du comportement d'une bobine à l'établissement et à la rupture du courant

On réalise le montage schématisé ci-contre ; les lampes L_1 et L_2 sont identiques et R = r.

Vous admettrez que la solution de l'équation différentielle précédemment établie : $\frac{di}{dt} + \frac{r+r'}{L} i = \frac{E}{L}$ est de la forme : $i(t) = Ae^{\alpha t} + B$.

Pour déterminer les valeurs de A, α et B, il faut trouver deux équations.

- La première est obtenue en remplaçant « i » par « $Ae^{\alpha t} + B$ » dans l'équation différentielle : $\frac{di}{dt} + \frac{r+r'}{L} i(t) = \frac{E}{L}$

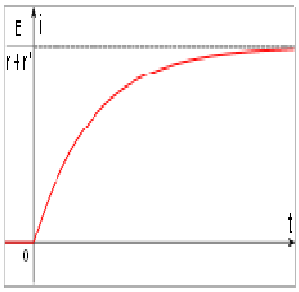
$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{\alpha t} + B) = \alpha Ae^{\alpha t}$ alors : $\frac{di}{dt} + \frac{r+r'}{L} i(t) = \frac{E}{L} \Leftrightarrow \alpha Ae^{\alpha t} + \frac{r+r'}{L}(Ae^{\alpha t} + B) = \frac{E}{L} \Rightarrow Ae^{\alpha t}(\alpha + \frac{r+r'}{L}) + \frac{r+r'}{L} B = \frac{E}{L}$ (1)

L'équation (1) doit être vérifiée, quelle que soit la valeur de t. Il faut donc que : $\alpha + \frac{r+r'}{L} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{r+r'}{L}$

L'équation (1) devient : $\frac{r+r'}{L} B = \frac{E}{L}$ d'où : $B = \frac{E}{r+r'}$

- La deuxième équation est établie à partir des conditions initiales :

$i(0) = 0$ et $i(0) = Ae^{\alpha 0} + B = A + B$ d'où : $A + B = 0 \Rightarrow A = -B \ (= -\frac{E}{r+r'})$



L'intensité i(t) du courant traversant le circuit s'écrit donc :

$i(t) = -\frac{E}{r+r'} e^{-\frac{(r+r')t}{L}} + \frac{E}{r+r'} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{r+r'}(1 - e^{-\frac{(r+r')t}{L}})$ ou $i(t) = \frac{E}{r+r'}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $\tau = \frac{L}{r+r'}$

Remarque importante .

Si $t = 5\tau \ (= 5\frac{L}{r+r'})$, alors : $e^{-\frac{(r+r')t}{L}} = e^{-5} \approx 0{,}007$ donc $i = \frac{E}{r+r'}(1 - e^{-5}) \approx 0{,}993 \frac{E}{r+r'} \approx \frac{E}{r+r'}$ = constante.

On peut, par conséquent, considérer que le régime asymptotique (ou permanent) est atteint si $t \geq 5\tau$. L'intensité i, alors constante, ne dépend plus que de E, r et r' ; l'inductance L de la bobine n'est plus d'aucune influence.

D. Tension entre les bornes de la bobine

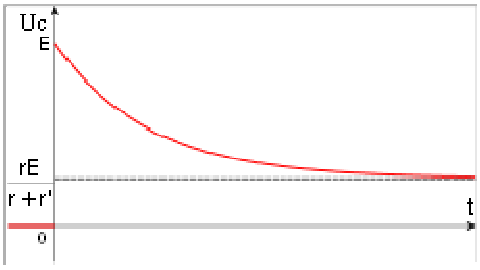
$U = L\frac{di}{dt} + ri$ et $i(t) = \frac{E}{r+r'}(1 - e^{-\frac{(r+r')t}{L}})$ donc :

$U(t) = L\frac{E}{r+r'}(e^{-\frac{(r+r')t}{L}} \times \frac{r+r'}{L}) + r\frac{E}{r+r'}(1 - e^{-\frac{(r+r')t}{L}})$

$U(t) = Ee^{-\frac{(r+r')t}{L}} + r\frac{E}{r+r'}(1 - e^{-\frac{(r+r')t}{L}}) = e^{-\frac{(r+r')t}{L}}(E - r\frac{E}{r+r'}) + r\frac{E}{r+r'}$

$U(t) = e^{-\frac{(r+r')t}{L}}(\frac{E(r+r') - rE}{r+r'}) + r\frac{E}{r+r'} = \frac{r'}{r+r'}Ee^{-\frac{(r+r')t}{L}} + r\frac{E}{r+r'}$

$U(t) = \frac{E}{r+r'}(r'e^{-\frac{(r+r')t}{L}} + r)$ ou $U(t) = \frac{E}{r+r'}(r'e^{-\frac{t}{\tau}} + r)$ avec $\tau = \frac{L}{r+r'}$



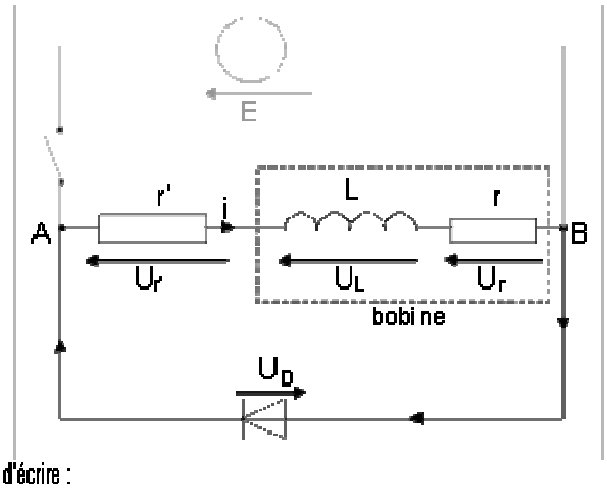
A. Intensité du courant dans la bobine

Fermons l'interrupteur du circuit suivant pendant une durée supérieure à 5τ afin que le régime permanent soit établi.

L'intensité i atteint alors sa valeur asymptotique : $\frac{E}{r+r'}$.

Puis, à la date t = 0, ouvrons l'interrupteur. La tension entre les bornes A et B du dipôle RL passe instantanément de la valeur E à 0 V. Par contre, l'intensité n'a pas eu le temps d'évoluer ; on a donc :

$i(0) = \frac{E}{r+r'}$ (bien sûr, le sens du courant dans la bobine n'est pas modifié).



La loi d'additivité des tensions appliquée à la maille représentée en noir sur le schéma permet d'écrire :

$$U_r + U_L + U_{r'} + U_D = 0 \Rightarrow ri + L\frac{di}{dt} + r'i + U_D = 0$$

La diode laisse passer le courant. Afin de simplifier les calculs, on va considérer que la tension U_D entre ses bornes est nulle (elle vaut généralement de 0,4 V à 0,8 V).

On obtient alors : $\frac{di}{dt} + \frac{r+r'}{L} i = 0$.

La solution de cette équation différentielle est de la forme : $i(t) = Ae^{\alpha t} + B$. En raisonnant comme dans le VI.C., on trouve que : $\alpha = -\frac{r+r'}{L}$ et $B = 0$.

On a donc : $i(0) = A$. De plus : $i(0) = \frac{E}{r+r'}$, alors : $A = \frac{E}{r+r'}$.

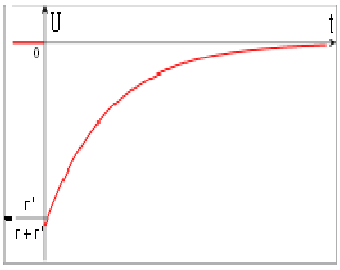
L'intensité i(t) du courant traversant le circuit s'écrit donc : $i(t) = \frac{E}{r+r'} e^{-\frac{(r+r')t}{L}}$ ou $i(t) = \frac{E}{r+r'} e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{r+r'}$

B. Tension entre les bornes de la bobine

$U = L\frac{di}{dt} + ri$ et $i(t) = \frac{E}{r+r'} e^{-\frac{(r+r')t}{L}}$ donc :

$$U(t) = L\frac{E}{r+r'} e^{-\frac{(r+r')t}{L}} \times \left(-\frac{r+r'}{L}\right) + r\frac{E}{r+r'}\left(e^{-\frac{(r+r')t}{L}}\right) = -Ee^{-\frac{(r+r')t}{L}} + r\frac{E}{r+r'} e^{-\frac{(r+r')t}{L}}$$

$$U(t) = Ee^{-\frac{(r+r')t}{L}}\left(-1 + \frac{r}{r+r'}\right) \Rightarrow U(t) = -\frac{r'}{r+r'} Ee^{-\frac{(r+r')t}{L}} \text{ ou } U(t) = -\frac{r'}{r+r'} Ee^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } \tau = \frac{L}{r+r'}$$



On remarquera que la tension de la bobine, contrairement à celle du condensateur, peut être discontinue.

VIII. Constante de temps du dipôle RL

A. Analyse dimensionnelle

Nous allons déterminer l'unité de τ ($= \frac{L}{r+r'}$) en utilisant la méthode de l'analyse dimensionnelle.

$U = L\frac{di}{dt} + ri$ donc : $[U] = \frac{[L][i]}{[t]}$ et $[U] = [r][i]$. On en déduit que : $\frac{[L][i]}{[t]} = [r][i]$ d'où : $\frac{[L]}{[r]} = [t]$

Le rapport $\tau = \frac{L}{r+r'}$ est homogène à un temps ; il est appelé constante de temps du dipôle RL et s'exprime en seconde.

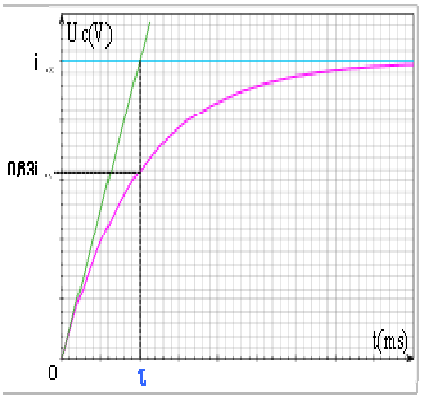
B. Détermination de la constante τ

1. Calcul direct

On connaît r, r' (en Ω) et L (en H) ; il reste à calculer le rapport $\frac{L}{r+r'}$ (en s).

2. Utilisation de la représentation graphique de la réponse en intensité du dipôle RL à un échelon de tension

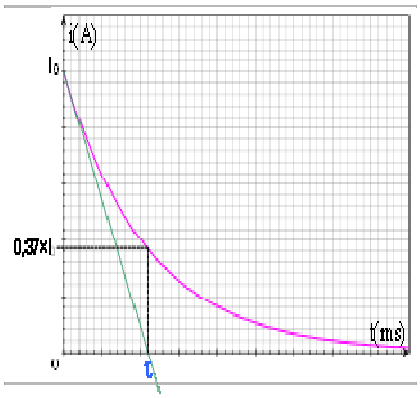
$$i(t) = \frac{E}{r+r'}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = i_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



- Si $t = \tau$, alors : $i = i_{max}(1 - e^{-1}) \approx 0{,}63\, i_{max}$
  ⇒ La valeur de τ correspond à l'abscisse du point de la courbe i(t) ayant pour ordonnée $0{,}63\, i_{max}$
- La tangente à la courbe i(t) en t = 0 coupe l'asymptote $i = i_{max}$ au point d'abscisse τ.

3. Utilisation de la représentation graphique de la réponse en intensité du dipôle RL lors d'une rupture de courant

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

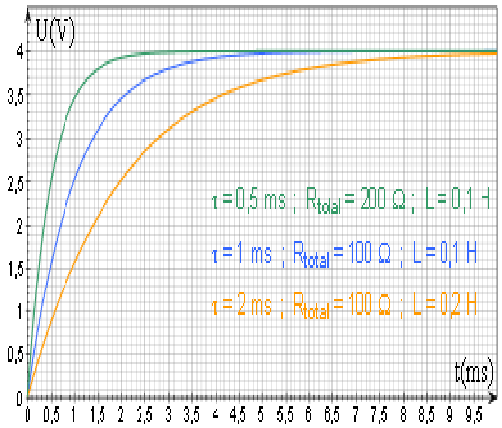
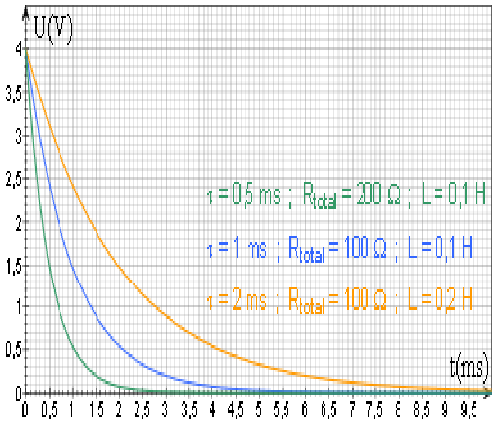


- Si $t = \tau$, alors : $i = I_0 e^{-1} \approx 0{,}37\, I_0$

La valeur de τ correspond à l'abscisse du point de la courbe i(t) ayant pour ordonnée $0{,}37\, I_0$.

- La tangente à la courbe i(t) en t = 0 coupe l'asymptote i = 0 au point d'abscisse τ.

C. Influence des caractéristiques du dipôle RL sur la durée du régime transitoire

La durée du régime transitoire, généralement estimée à 5τ ($= 5\frac{L}{r+r'}$), croît lorsque l'inductance L augmente et lorsque $R_{total} = r + r'$ diminue.

L'établissement et la rupture du courant sont donc d'autant plus rapides que
- la constante τ est petite
- l'inductance L est petite
- la résistance totale (r+r') est grande.