Guesmi.B

# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

## Enoncé des exercices

## 1 Les basiques

**Exercice 5.1** *Montrer la formule du double produit vectoriel :* $\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\,\overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{c}$

**Exercice 5.2** *Soient* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *et* $\overrightarrow{d}$ *quatre vecteurs de l'espace, montrer que* $\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \wedge \left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}\right) = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right]\overrightarrow{b} - \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right]\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\right]\overrightarrow{c} - \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\overrightarrow{d}$. *(On pourra utiliser la formule du double produit vectoriel* $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})\,\overrightarrow{w}$*).*

**Exercice 5.3** *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, *on considère les points* $A : (1,0,1)$, $B : (-1,3,3)$, $C : (2,-1,2)$ *et* $D : (1,2,1)$. *On note* $\mathcal{P}$ *le plan passant par* $A, B$ *et* $C$.

1. *Déterminer une équation cartésienne de* $\mathcal{P}$.
2. *Déterminer les coordonnées de* $D'$ *projection orthogonale de* $D$ *sur* $\mathcal{P}$.

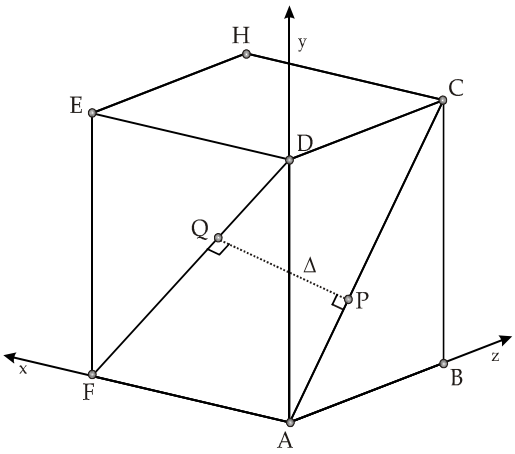
**Exercice 5.4** *Soient* $D_1, D_2$ *et* $D_3$ *trois droites non deux à deux coplanaires, on note* $\Delta_1$ *la perpendiculaire commune de* $D_1$ *et* $D_2$ *et* $\Delta_2$ *la perpendiculaire commune de* $D_2$ *et* $D_3$. *Quelle est la perpendiculaire commune de* $\Delta_1$ *et de* $\Delta_2$ *?*

**Exercice 5.5** *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, *on considère la droite* $D$ *passant par* $A : (1,2,3)$, *dirigée par* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ *et la droite* $D'$ *passant par* $B : (-2,0,1)$ *dirigée par* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. *Montrer que* $D$ *et* $D'$ *ne sont pas parallèles et déterminer un système d'équations cartesiennes de leur perpendiculaire commune.*

**Exercice 5.6** *Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, soit* $P$ *d'équation* $x+y+z=1$, $D$ *passant par* $A$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}$ *où* $A = (1,2,1)$ *et* $\vec{u} = (2,1,-2)$. *Soit* $B = (1,1,1)$ *trouver un système d'équations de la droite* $\Delta$ *définie par* $B \in \Delta$, $\Delta \,//\, P$ *et* $\Delta \cap D \neq \varnothing$.

**Exercice 5.7** *Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, soit* $D$ *d'équation* $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$, *donner l'équation de* $P$ *passant par* $A = (1,0,2)$ *et contenant* $D$.

**Exercice 5.8** *On considère un cube (c.f. figure ci dessous)*




*On de propose de déterminer la perpendiculaire commune $\Delta$ des droites $(AC)$ et $(DF)$. On se place dans le repère d'origine $A$ d'axes indiqués par la figure. On note $a$ la longueur de l'arête du cube. Soient $P$ et $Q$ les points d'intersection de $\Delta$ et de $(AC)$ et $(DF)$ respectivement, on définit $u$ et $v$ tels que*

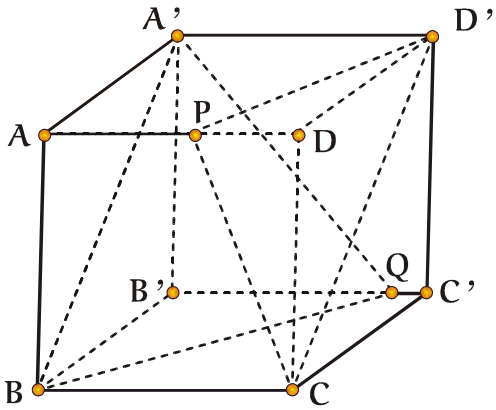
$$\overrightarrow{AP} = u\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{DQ} = v\overrightarrow{DF}$$

1. *Déterminer $u$ et $v$, en déduire les coordonnées de $P$ et $Q$.*
2. *Soient $I$ le point d'intersection des droites $(DP)$ et $(AB)$, $J$ le point d'intersection des droites $(AQ)$ et $(ED)$. Déterminer les coordonnées de $I$ et $J$ et donner une construction simple de $\Delta$.*

**Exercice 5.9** *On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct.*
*Soit $\mathcal{S}$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ et soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2y + 1 \\ z = y + 4 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 9 = 0 \end{cases}$ deux droites.*

1. *Déterminer le centre et le rayon de $\mathcal{S}$.*
2. *Déterminer le ou les plans $\mathcal{P}$ tangents à $\mathcal{S}$ tels que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient parallèles à $\mathcal{P}$.*
3. *Préciser le ou les points de contact entre $\mathcal{S}$ et le ou les plans trouvés.*

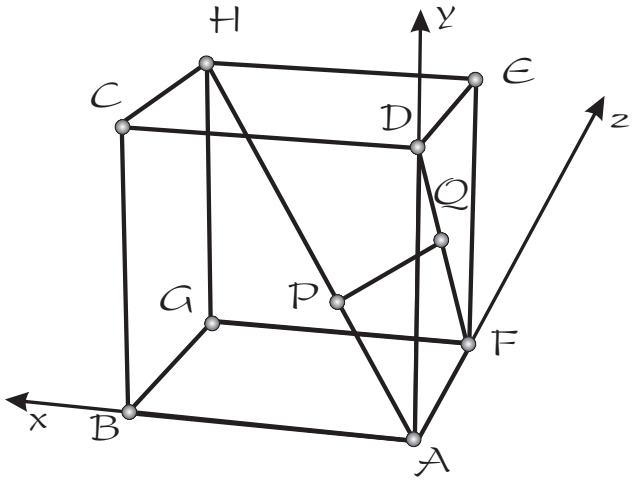
**Exercice 5.10** *Une histoire de tétraèdre*
*Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube, soit $P$ un point sur l'arête $[A, D]$ et $Q$ un point sur l'arête $[B', C']$. On se place dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA}\right)$.*




1. *Quelles sont les coordonnées des points $B, D', A', C, P$ et $Q$ (On notera $p$ et $q$ les premières coordonnées de $P$ et $Q$).*

2. *Donner les équations des plans* $(BQA')$ *et* $(CD'P)$
3. *Donner une représentation paramétrique de* $\mathcal{D} = (BQA') \cap (CD'P)$. *On précisera quand les deux plans sont parallèles, et on interprétera cette condition sur les distances* $AP$ *et* $C'Q$. *Que constatez vous de remarquable sur* $\mathcal{D}$ *?*

**Exercice 5.11** *On considère un cube d'arête de longueur* 1 *dont on nomme les sommet comme sur la figure suivante.*




1. *Déterminer la perpendiculaire commune* $(PQ)$ *aux droites* $(AH)$ *et* $(DF)$. *On se placera dans le repère orthonormé direct* $\mathcal{R}$ *indiqué par la figure. On posera* $u$ *et* $v$ *les réels tels que*

$$\overrightarrow{AP} = u\overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{DQ} = v\overrightarrow{DF}$$

2. *Quel est l'intersection de la droite* $(PQ)$ *avec la face* $(ABGF)$ *du cube ? En déduire une construction simple de la perpendiculaire commune cherchée.*

**Exercice 5.12** *On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois plans* $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ *et* $\mathcal{P}_3$ *d'équation respective*

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{P}_1 & : & x + y + mz = 1 \\ \mathcal{P}_2 & : & x + y - z = 1 \\ \mathcal{P}_3 & : & x + my - mz = 1 \end{array}$$

*Discuter suivant la valeur de* $m$, *la nature de* $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

**Exercice13** *Donner un système d'équations de la perpendiculaire commune à* $D$ *passant par* $A = (2, 3, -1)$ *dirigée par* $\overrightarrow{v} = (-1, 6, 2)$ *et à* $D'$ *passant par* $B = (1, 1, -2)$ *et dirigée par* $\overrightarrow{w} = (2, 1, -4)$ *dans le ROND* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

**Exercice 5.14** *Montrer l'inégalité de Hadamard :* $\mathrm{Det}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \vec{w}) \leq \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\|$.

**Exercice 5.15** *Montrer l'identité de Lagrange :* $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2$.

**Exercice 5.16** *Soient* $A, B, C$ *et* $D$ *quatre points de l'espace tels que les droites* $(AB)$ *et* $(CD)$ *soient sécantes en* $I$. *Déterminer le lieu des points* $M$ *tels que* $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$.

## 2 Les techniques

**Exercice 5.17** *Soit $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs de l'espace avec $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, résoudre l'équation*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

*d'inconnue $\overrightarrow{x}$. Rappel : la formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\,\overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{c}$*

**Exercice 5.18** *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère canonique $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Déterminer $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ tels que*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \text{ et } \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

*On pourra calculer (entre autre) $\overrightarrow{i} \wedge \left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ de deux manières différentes, et utiliser l'exercice 5.2*

**Exercice 5.19** *Résoudre l'équation $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ (utiliser 5.1).*

**Exercice 5.20** *On suppose $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} = 0$. Montrer que le système $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{d} \end{array}\right.$ admet une solution si et seulement si $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} + \cdot \overrightarrow{c} = 0$. (utiliser 5.1).*

**Exercice 5.21** *Déterminer l'équation de la (les ?) sphère(s) centrée(s) sur $D : \left\{\begin{array}{l} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{array}\right.$, tangente(s) aux plans d'équations $x + 2y - 2z - 2 = 0$ et $2x + y - z + 2 = 0$.*

**Exercice 5.22** *Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct.*

1. *Déterminer les droites rencontrant $D_1 : \left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$, $D_2 : \left\{\begin{array}{l} z = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$, $D_3 : \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array}\right.$*
   *Indication de méthode : Prendre $A \in D_1$, $B \in D_2$ et $C \in D_3$ ($A$ ne dépend que d'un paramètre $\alpha$, $B$ ne dépend que d'un paramètre $\beta$ et $C$ de $\gamma$, traduire l'alignement de $A, B, C$ pour en déduire un lien entre $\alpha, \beta$ et $\gamma$).*
2. *(Question Olympique). Pour quelles valeurs de $u$ existe-t-il une droite coupant $D_1, D_2, D_3$ et $D_4 : \left\{\begin{array}{l} x = y \\ y = uz \end{array}\right.$ ?*

**Exercice 5.23** *On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ canonique.*
*Soient $D : \left\{\begin{array}{l} x - y + 2 = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right.$ et $D' : \left\{\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{array}\right.$.*

1. *Montrer que ces deux droites sont sécantes en un point $A$ que l'on précisera.*
2. *Trouver toutes les droites $\Delta$ de l'espace parallèles à $xOy$ et rencontrant $D$, $D'$ et l'axe $Oz$.*
   *(On donnera soit un système d'équations cartésiennes, soit une représentation paramétrique, soit deux points distincts).*

**Exercice 5.24** *Soit $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée directe et $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \vec{w})$ une base orthonormée, montrer que si $\mathcal{B}_2$ est directe alors*

$$\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{i}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{j}, \vec{w} - \overrightarrow{k}\right) = 0$$

*et si $\mathcal{B}_2$ est indirecte alors*

$$\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{i}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{j}, \vec{w} - \overrightarrow{k}\right) = 2\left(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{k} \cdot \vec{w} - 1\right)$$

**Exercice 5.25**

1. *Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz = d$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ dans le repère orthonormal $\mathcal{R}$. Soit $\overrightarrow{n} : (a, b, c)$, on note $P$ la projection orthogonale de l'origine sur $\mathcal{P}$, montrer que les coordonnées de $P$ sont $\left(\frac{ad}{\|n\|^2}, \frac{bd}{\|n\|^2}, \frac{cd}{\|n\|^2}\right)$.*
2. *Soit $A : (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ et $C = (0, 0, c)$ avec $abc \neq 0$, $P$ la projection orthogonale de $O$ sur le plan $(ABC)$. Montrer que $\frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (On peut vérifier que $P$ est l'othocentre du triangle $(ABC)$).*

**Exercice 5.26** *(Oral CCP) Soient $A, B, C$ et $D$ quatre points non coplanaires et $\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$ quatre réels différents de $-1$. On construit les quatre points $K, L, M$ et $N$ tels que*

$$\overrightarrow{KA} + \alpha\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{LB} + \beta\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0},\ \overrightarrow{MC} + \gamma\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{ND} + \delta\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{0}$$

1. *Déterminer dans le repère $\mathcal{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ l'équation des plans $(KCD)$, $(LAD)$, $(MAB)$ et $(NBC)$.*
2. *Donner une CNS sur $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ pour que ces plans aient un point commun.*

## 3 Les olympiques

**Exercice 5.27** *Soient $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}\right)$ et $\mathcal{R}' = \left(O, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_3}\right)$ deux ROND, montrer que $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ et $\overrightarrow{A_3B_3}$ sont coplanaires. (Comparer avec l'exo 5.24).*

Chapitre 5

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Solution des exercices

Guesmi.B

## 1 Les basiques

**Exercice 5.1** *Si* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *c'est vrai, sinon on se place dans la BOND* $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *suivante :*
$\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$, $\overrightarrow{j}$ *tel que* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$ *soient dans le même plan. Les coordonnées de* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *et* $\overrightarrow{c}$ *sont alors :* $\overrightarrow{a}$ : $\begin{pmatrix} \|\overrightarrow{a}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$. *On a alors* $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta w \\ -\alpha w \\ \alpha v - \beta u \end{pmatrix}$ *car* $\mathcal{B}$ *est un BOND d'où* $\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) : \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{a}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \beta w \\ -\alpha w \\ \alpha v - \beta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\|\overrightarrow{a}\|(\alpha v - \beta u) \\ -\alpha w \|\overrightarrow{a}\| \end{pmatrix}$
*Puis* $(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{b} : \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{a}\| u\alpha \\ \|\overrightarrow{a}\| u\beta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{c} : \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{a}\| \alpha u \\ \|\overrightarrow{a}\| \alpha v \\ \|\overrightarrow{a}\| \alpha w \end{pmatrix}$ *car* $\mathcal{B}$ *est une BOND, d'où* $(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{c}$ : $\begin{pmatrix} 0 \\ \|\overrightarrow{a}\| u\beta - \|\overrightarrow{a}\| \alpha v \\ -\|\overrightarrow{a}\| \alpha w \end{pmatrix}$
*Puisque* $\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right)$ *et* $(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{c}$ *ont même coordonnées dans* $\mathcal{B}$*, ces vecteurs sont égaux.*

**Exercice 5.2** *On applique la formule du double produit vectoriel* $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{w}$*, on a alors avec* $\overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{c}$ *et* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{d}$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \wedge \left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}\right) &= \left(\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c} - \left(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{d} \\ &= \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\right]\overrightarrow{c} - \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\overrightarrow{d} \end{aligned}$$

*mais on a aussi*

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \wedge \left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}\right) &= -\left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}\right) \wedge \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \\ &= -\left(\left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}\right]\overrightarrow{a} - \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{a}\right]\overrightarrow{b}\right) \text{ (on échange les rôles de } \overrightarrow{a} \text{ et } \overrightarrow{c}, \text{ et de } \overrightarrow{b} \text{ et } \overrightarrow{d} \text{ )} \\ &= \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{a}\right]\overrightarrow{b} - \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}\right]\overrightarrow{a} \\ &= \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right]\overrightarrow{b} - \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right]\overrightarrow{a} \text{ ( le produit mixte est invariant par permutation circulaire)} \end{aligned}$$

**Exercice 5.3** *1. On applique le cours,*

$$M \quad : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y & 3 & -1 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad 5x + 4y - z - 4 = 0$$

*2. On applique le cours, on a* $D' = D - \dfrac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\overrightarrow{n}$ *où* $\overrightarrow{n} : \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ *est normal au plan* $\mathcal{P}$.

$$D : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8}{25+16+1}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{21} \\ \frac{26}{21} \\ \frac{25}{21} \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.4** *Un peu de bon sens, c'est* $D_2$ *!*

**Exercice 5.5** *On a* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, *les deux droites ne sont donc pas parallèles. Soit* $\mathcal{P}_1$ *le plan contenant* $D$ *et* $\overrightarrow{n}$ *et* $\mathcal{P}_2$ *le plan contenant* $D'$ *et* $\overrightarrow{n}$, *la perpendiculaire commune est l'intersection de* $\mathcal{P}_1$ *et de* $\mathcal{P}_2$. *Une équation de* $\mathcal{P}_1$ *est* $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + z = 0$, *une équation de* $\mathcal{P}_2$ *est* $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & -1 \\ y & 2 & 0 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 2z + 2 = 0$. *La perpendiculaire commune admet donc comme système d'équations*

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

**Exercice 5.6** *Soit* $P'$ *parallèle à* $P$ *passant par* $B$, *une équation de* $P'$ *est de la forme* $x + y + z = d$, *puisque* $B \in P'$, *on a* $1 + 1 + 1 = c$, *d'où* $c = 3$. *Ainsi* $P'$ *a pour équation* $x + y + z = 3$. *La droite* $D$ *a pour représentation paramètrique* $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. *Soit* $B' = D \cap P'$, *si* $B' = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2+t \\ 1-2t \end{pmatrix}$, *alors* $B' \in P' \Longrightarrow (1 + 2t) + (2 + t) + (1 - 2t) = 3 \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow B' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

*Mais puisque* $\Delta$ *est parallèle à* $P$ *et passe par* $B$, *on en déduit que* $\Delta$ *est incluse dans* $P'$. *Le point d'intersection de* $\Delta$ *et de* $D$ *est donc un point de* $P'$ *et de* $D$, *c'est donc* $B'$. *Ceci prouve que* $\Delta = (BB')$.
*Pour donner un système d'équation de* $\Delta$, *on connaît déja un plan qui contient* $\Delta$, *c'est* $P'$. *Un vecteur directeur de* $\Delta$ *est* $\overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, *ainsi une représentation paramètrique de* $\Delta$ *est*

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

*On constate donc que tous les points de* $\Delta$ *ont leurs coordonnées en* $y$ *égale à* 1. *Ceci signifie que* $\Delta$ *est incluse dans le plan d'équation* $y = 1$. *On a donc immédiatement un système d'équation de* $\Delta$, *à savoir*

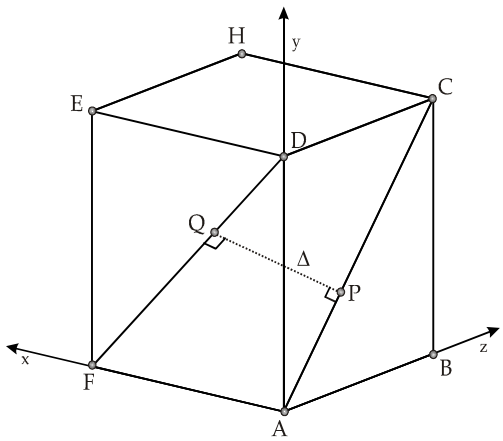
$$\Delta : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

**Exercice 5.7** *Première méthode : La droite $D$ est donnée comme intersection de deux plans $P_1$ et $P_2$. Le vecteur $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à $P_1$, le vecteur $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à $P_2$. Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $D$. On cherche ensuite un point particulier de $D$. La droite $D$ coupe (sans doute !) le plan $xOy$. Les coordonnées sont donc solutions de $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-3=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=3 \\ z=0 \end{cases} \iff, \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \\ z=0 \end{cases}$, d'où $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Le plan $P$ est donc défini par $A, \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{AB} = (-2) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ -\frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, une équation de $P$ est donc*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-0 & -3 & 5 \\ z-2 & -2 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} (x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} (z-2) \\ &= -2x-6y+8z-14=0 \end{aligned}$$

*Une équation de $P$ est donc $x+3y-4z=-7$.*
*Seconde méthode : Le plan $P_{\alpha,\beta}$ d'équation $\alpha(x+y-z+2)+\beta(x-y+2z-3)$ contient $D$, il contient aussi $A$ si et seulement si $\alpha(1+0-2+2)+\beta(1-0+4-3)=\alpha+2\beta=0$. Si on choisit $\alpha=2$ et $\beta=-1$, le plan $P_{2,-1}$ d'équation $2(x+y-z+2)-(x-y+2z-3)=x+3y-4z+7$ contient donc $D$ et $A$, c'est donc $P$.*

**Exercice 5.8**




1. *On a $B : (0,0,1)$, $C : (0,1,1)$, $D : (0,1,0)$ et $F : (1,0,0)$. Puis $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$, mais $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}$ d'après Chasles, donc*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -u \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DF} &= \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}\right) \cdot \overrightarrow{DF} \\ &= -u\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DF} + v \left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = 0 \end{aligned}$$

*Mais* $\overrightarrow{AC} : (0,1,1)$ *donc* $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = 2$, $\overrightarrow{DF} : (1,-1,0)$ *d'où* $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC} = -1$, $\overrightarrow{AD} = (0,1,0)$ *d'où* $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = 1$. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DF} = -1$, $\left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 = 2$ *et* $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DF} = -1$. *Ainsi* $u$ *et* $v$ *sont solutions de*

$$\begin{cases} 2u+v=1 \\ -u-2v=-1 \end{cases}$$

*ce qui donne* $u = v = \dfrac{1}{3}$. *On en déduit que* $P : \left(0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ *et* $Q : \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 0\right)$

2. *On constate que* $P$ *est l'isobarycentre du triangle* $ABD$, *il est donc sur la médiane issue de* $D$. *Cela signifie que la droite* $(DP)$ *coupe* $(AB)$ *au milieu du segment* $[A,B]$. *De même* $Q$ *est l'isobarycentre de* $AED$, *la droite* $(AQ)$ *coupe donc* $(ED)$ *au milieu du segment* $[E,D]$. *Cela donne un procédé simple de construction de* $\Delta$ *: on place les milieux* $I$ *et* $J$ *des segments* $[A,B]$ *et* $[E,D]$. *La droite* $(DI)$ *coupe* $(AC)$ *en* $P$, *la droite* $(AJ)$ *coupe* $(DF)$ *en* $Q$.

**Exercice 5.9** Guesmi.B

1. *L'équation de* $\mathcal{S}$ *s'écrit* $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 4 - 1 + 1 = 0$, *ce qui donne pour centre* $\Omega : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et pour rayon* $R = 2$.
2. *On commence par chercher des vecteurs directeurs de* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$. *La droite* $\mathcal{D}$ *est paramétrée par* $y$, *un vecteur directeur est* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Pour* $\mathcal{D}'$ *qui est donnée comme intersection de deux plans, on prend le produit vectoriel des deux vecteurs normaux aux plans qui définissent* $\mathcal{D}'$. *Ainsi* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *dirige* $\mathcal{D}'$.

   *Le vecteur normal* $\overrightarrow{n}$ *de* $\mathcal{P}$ *doit être orthogonal à la fois à* $\overrightarrow{u}$ *et à* $\overrightarrow{v}$, *ainsi* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Une équation de* $\mathcal{P}$ *est donc de la forme*

$$x + y - 3z + d = 0 \text{ où } d \in \mathbb{R}$$

   *Le plan* $\mathcal{P}$ *est tangent à* $\mathcal{S}$ *si et seulement si* $d(\Omega, \mathcal{P}) = 2$, *i.e.*

$$\frac{|1+2+d|}{\sqrt{1+1+9}} = 2$$

   *soit*

$$d = 2\sqrt{11} - 3 \text{ ou } d = -2\sqrt{11} - 3$$

   *On a donc deux plans solutions*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 \text{ d'équation } x + y - 3z + 2\sqrt{11} - 3 &= 0 \\ \mathcal{P}_2 \text{ d'équation } x + y - 3z - 2\sqrt{11} - 3 &= 0 \end{aligned}$$

3. *Soit* $M_1 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{S}$ *et* $M_2 = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{S}$. *On sait que* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *sont parallèles et que* $(\Omega M_1)$ *et* $(\Omega M_2)$ *sont perpendiculaires à* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$. *On en déduit que* $\overrightarrow{\Omega M_1}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{n}$ *ainsi que* $\overrightarrow{\Omega M_2}$. *Ainsi les points* $M_1, M_2$ *et* $\Omega$ *sont alignés sur une même droite* $\Delta$ *dirigée par* $\overrightarrow{n}$.
   *Une représentation paramétrique de* $\Delta$ *est donc*

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 0 - 3t \end{cases} \quad \text{(elle par } \Omega \text{ et est dirigée par } \overrightarrow{n}\text{)}$$

*Le point de paramètre $t$ de $\Delta$ est sur $\mathcal{P}_1$ si et seulement si* $(2+t)+(1+t)-3\times(-3t)+2\sqrt{11}-3=0, \Longleftrightarrow t=-\dfrac{2}{\sqrt{11}}$, *on en déduit les coordonnées de $M_1$*

$$M_1 : \begin{pmatrix} 2-\dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ 1-\dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ \dfrac{6}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

*On procède de même pour $M_2$, on trouve*

$$M_2 : \begin{pmatrix} 2+\dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ 1+\dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ -\dfrac{6}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.10**

1. *On a* $B:(0,0,0)$, $D':(1,1,1)$, $A':(0,1,1)$, $C:(1,0,0)$, $P:(p,0,1)$ *et* $Q:(q,1,0)$
2. *On a* $(BQA'):\begin{vmatrix} x & 0 & q \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = qy-x-qz=0$ *soit*

$$(BQA') : x-qy+qz=0$$

*et* $(CD'P):\begin{vmatrix} x-1 & 0 & p-1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *soit*

$$(CD'P) : x+(p-1)\,y+(1-p)\,z-1=0$$

3. *Le point $M$ de coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\begin{cases} x-qy+qz=0 \\ x+(p-1)\,y+(1-p)\,z-1=0 \end{cases}$$

*Puisque $\mathcal{D}$ est données comme intersection de deux plans, on a facilement un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ en prenant le produit vectoriel des vecteurs normaux de ces plans. Ainsi* $\overrightarrow{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -q \\ q \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_1}} \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ p-1 \\ 1-p \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_2}}$ *dirige $\mathcal{D}$. Après calcul, on obtient*

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ (p+q-1) \\ (p+q-1) \end{pmatrix} = (p+q-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (p+q+1)\,\overrightarrow{BA'}$$

*Lorsque $p+q=1$, les deux vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaire, les plans $(BQA')$ et $(CD'P)$ sont parallèles. La condition $p+q=1$, s'écrit $q=1-p$ et peut aussi se traduire par $AP=C'Q$. Le vecteur direteur de $\mathcal{D}$ ne dépend ni de $p$, ni de $q$ !*
*Il reste à trouver un point de $\mathcal{D}$, on peut chercher le point d'intersection avec le plan $z=0$, cela revient à résoudre le système*

$$\begin{cases} x-qy=0 \\ x+(p-1)\,y=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=qy \\ (q+p-1)\,y=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{q}{p+q-1} \\ y=\dfrac{1}{p+q-1} \end{cases} \quad (\text{car } p+q-1\neq 0)$$

*On a alors la représentation paramètrique suivante*

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \dfrac{q}{p+q-1} \\ y = \dfrac{1}{p+q-1} + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Exercice 5.11**

1. *Dans* $\mathcal{R}$, *on a* $A : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $H : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *d'où* $\overrightarrow{AH} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DF} : \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AD} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Puis* $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$, *Or* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = -u\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} + v\overrightarrow{DF}$ *d'où*

$$\left(-u\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} + v\overrightarrow{DF}\right) \cdot \overrightarrow{AH} = -u\left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} + v\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AH}$$

*mais puisque l'on est en repère orthonormé, on a* $\left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2 = 3$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 1$, $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ *ainsi*

$$-3u + 1 = 0$$

*de même*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DF} &= \left(-u\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} + v\overrightarrow{DF}\right) \cdot \overrightarrow{DF} \\ &= -u\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DF} + v\left\|\overrightarrow{DF}\right\|^2 \\ &= -1 + 2v = 0 \end{aligned}$$

*On a donc* $v = \dfrac{1}{2}$.*et* $u = \dfrac{1}{3}$. *On en déduit que* $P = A - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *et* $Q = D + \dfrac{\overrightarrow{DF}}{2} : \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *est le milieu de* $[D, F]$.

2. *La droite* $(PQ)$ *a pour représentation paramétrique*

$$\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = \dfrac{1}{2} - t \\ z = \dfrac{1}{2} - t \end{cases}$$

*car* $\overrightarrow{PQ}$ *est colinéaire à* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Elle coupe le plan d'équation* $y = 0$ *au point de paramètre* $t = \dfrac{1}{2}$ *donc en* $B$ *!*
*La construction est simple, on relie* $B$ *au centre de la face* $ADEF$.

**Exercice 5.12** *Cela revient à discuter de la nature de l'ensemble des solutions du système*

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + my - mz = 1 \end{cases}$$

*On calcule le déterminant du système qui vaut*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & -1-m \\ 0 & m-1 & -2m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

*Pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$, le système est de Cramer, il y a une unique solution et $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ est un point de l'espace.*
*Pour $m = 1$, le système s'écrit*

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right.$$

*Les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont confondus et non parallèles à $\mathcal{P}_1$. Ainsi $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ est une droite.*
*Pour $m = -1$, le système s'écrit*

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{array}\right.$$

*Cette fois-ci ce sont $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_1$ qui sont confondus et non parallèles à $\mathcal{P}_3$. Ainsi $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ est une droite.*

**Exercice 5.13** *On applique le cours, on calcule le $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ qui est un vecteur directeur de la perpendiculaire commune $\Delta$ de $D$ et $D'$. On obtient le vecteur $\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & -1 & 2 \\ \overrightarrow{j} & 6 & 1 \\ \overrightarrow{k} & 2 & -4 \end{vmatrix} = -26\overrightarrow{i} - 13\overrightarrow{k}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -26 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ dirige donc la perpendiculaire commune.*
*On sait que $\Delta$ est l'intersection des plans $\mathcal{P} = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\mathcal{P}' = (B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$. On calcule donc une équation de chacun de ces plans. On a*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} & : & \begin{vmatrix} x-2 & 2 & -1 \\ y-3 & 0 & 6 \\ z-(-1) & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6x - 5y + 12z + 39 = 0 \\ \mathcal{P}' & : & \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-(-2) & 1 & -4 \end{vmatrix} = -x + 10y + 2z - 5 = 0 \end{array}$$

*Un système d'équations de $\Delta$ est donc*

$$\left\{\begin{array}{l} 6x + 5y - 12z - 39 = 0 \\ x - 10y - 2z + 5 = 0 \end{array}\right.$$

**Exercice 5.14** *On a*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Det}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \vec{w}) & = & (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \vec{w} = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \cos(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \vec{w}) \\ & = & \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \times \|\overrightarrow{w}\| \cos(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \vec{w}) \\ & = & \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \, |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \cos(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \vec{w}) \\ & \leq & \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \end{array}$$

**Exercice 5.15** *Aussi simple que Hadamard,*

$$\begin{array}{rcl} (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) & = & \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \\ \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| & = & \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \, |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \end{array}$$

*d'où*

$$(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2 \left(\cos^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \sin^2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\right) = \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \|\overrightarrow{v}\|^2$$

*On a*

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} & = & \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB} \\ & = & -\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB} \\ & = & \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB} \text{ car } I, A \text{ et } B \text{ sont alignés donc } \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \end{array}$$

*De même* $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{CD}$, *ainsi*

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{0}$$

*Le lieu de* $M$ *est la droite passant par* $I$ *et dirigée par le vecteur* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$..

## 2 Les techniques

**Exercice 5.16** *Puisque* $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{b}$, *une condition nécessaire est* $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$. *Si* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \neq 0$, *il n'y a pas de solution. On suppose donc* $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$ *i.e* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.
*On résout l'équation homogène* $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = 0$. *On a*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = 0 \Longleftrightarrow (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}) \text{ colinéaires} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{a}$$

*car on a supposé* $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$.
*On cherche ensuite une solution particulière. On cherche une solution de la forme* $\alpha\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right)$. *On a alors*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \wedge \left(\alpha \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) &= \alpha\left[\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right)\right] \\ &= \alpha\left[\left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a} - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{b}\right] \underset{\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}}{=} -\alpha \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

*Ainsi*

$$\overrightarrow{a} \wedge \left(\alpha \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{b} \Longleftrightarrow \alpha = -\frac{1}{\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2}$$

*Une solution particulière est donc*

$$\overrightarrow{x_0} = -\frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2}$$

*On résout ensuite le problème de départ, en effet*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x_0} \text{ car } \overrightarrow{x_0} \text{ est solution} \\ &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}) = \overrightarrow{0} \text{ par linéarité à droite du produit vectoriel} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0} = \lambda \overrightarrow{a} \end{aligned}$$

*Les solutions sont donc de la forme*

$$\overrightarrow{x} = -\frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2} + \lambda \overrightarrow{a} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

***Remarque :*** *On peut deviner la forme de la solution particulière de la manière suivante. Si* $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ *alors*

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{a} - \left\|\overrightarrow{a}\right\|^2 \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$$

*Si on cherche une solution orthogonale à* $\overrightarrow{a}$, *on a* $\overrightarrow{x} = -\dfrac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2}$ *(en fait les solutions sont* $-\dfrac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{a}$ *soit de la forme* $-\dfrac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2} + \lambda \overrightarrow{a}$*).*

**Exercice 5.17** *On a* $\overrightarrow{i} \wedge \left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{k} = \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right)$. *On utilise alors le résultat suivant (qui découle de la formule du double produit vectoriel)*

$$\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \wedge \left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}\right) = \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\right)\overrightarrow{c} - \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{d}$$

*donc*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i}\wedge\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right) &= \left(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right)\wedge\left(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c}\right)=\overrightarrow{k}\\ &= \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{b}-\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c}\\ &= \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

*De même*

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)\wedge\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right) &= \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}=\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{c}\\ \left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)\wedge\overrightarrow{i} &= \overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}=\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{a}\end{aligned}$$

*Puis, avant tout* $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)\neq 0$ *car* $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{k}\neq 0$, *et*

$$\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)=\left(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}\cdot\frac{\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}}{\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)}=\frac{\left\|\overrightarrow{i}\right\|^2}{\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)}=\frac{1}{\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)}$$

*d'où*

$$\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)^2=1$$

*On en déduit que* $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)=\pm 1$. *On a donc deux solutions (on vérifie facilement que ce sont bien des solutions)*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{j}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{b}=\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}\\ \overrightarrow{a} &= \overrightarrow{k}-\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{b}=-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{c}=\overrightarrow{j}-\overrightarrow{i}\end{aligned}$$

Guesmi.B

*Analyse : Si* $\overrightarrow{x}$ *est solution alors*

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x}+\overrightarrow{x})=\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\\ \Longleftrightarrow\ &\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x})+\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\\ \Longleftrightarrow\ &(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a})\,\overrightarrow{a}-\|\overrightarrow{a}\|^2\,\overrightarrow{x}+\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

*Or*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x}+\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b}\Longrightarrow(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x}+\overrightarrow{x})\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\Longrightarrow\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\\ \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x}+\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{b}\Longrightarrow\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

*d'où*

$$\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}-\|\overrightarrow{a}\|^2\,\overrightarrow{x}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$$

*soit*

$$\overrightarrow{x}=\frac{\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}}{1+\|\overrightarrow{a}\|^2}$$

*Synthèse : On a*

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{a}\wedge\left[\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right]+\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\\ =\ &\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\wedge\left(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\right)+\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\\ =\ &\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}-\left[\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}-\|\overrightarrow{a}\|^2\,\overrightarrow{b}\right]+\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}\\ =\ &\left(1+\|\overrightarrow{a}\|^2\right)\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

*ce qui prouve que*

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}\right) \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{1 + \|\overrightarrow{a}\|^2} \right\}$$

**Exercice 5.19** *On procède par analyse synthèse.*
*Analyse : On calcule* $\text{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d}$, *mais* $\text{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}\right) = \text{Det}\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a}\right) = \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{x}\right) \cdot \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{a}$, *par différence on a*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$$

*Remarquons également que* $\text{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}\right) = \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{x}$.
*Synthèse : Supposons que* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$. *Deux cas se présentent, si* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} \neq 0$, *on pose*

$$\overrightarrow{x} = -\frac{1}{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d}} \left(\overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{c}\right)$$

*Puisque*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{c}\right) &= \left(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}\right) \overrightarrow{d} - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d}\right) \overrightarrow{c} = -\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d}\right) \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b} \wedge \left(\overrightarrow{d} \wedge \overrightarrow{c}\right) &= \left(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b}\right) \overrightarrow{d} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}\right) \overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b}\right) \overrightarrow{d} = -\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d}\right) \overrightarrow{d} \end{aligned}$$

*On obtient*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{c} \text{ et } \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{d}$$

*Si maintenant* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} = 0$, *alors* $\text{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}\right) = 0$ *(on a vu que* $\text{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}\right) = -\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{a}$*), ainsi les vecteurs* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *et* $\overrightarrow{x}$ *sont coplanaires. Or* $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ *donc* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *sont non colinéaires. On en déduit que* $\overrightarrow{x}$ *est dans le plan de vecteurs directeurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$. *On peut donc exprimer* $\overrightarrow{x}$ *à l'aide de* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$, *il existe donc deux réels* $\alpha$ *et* $\beta$ *tels que*

$$\overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}$$

*On a également* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} = 0$ *et* $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$ *(la dernière égalité provient de* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} = 0$ *et* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$*) donc* $\overrightarrow{c}$ *et* $\overrightarrow{d}$ *sont orthogonaux à* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$, *ils sont donc colinéaires à* $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$, *il existe donc deux réels* $\gamma$ *et* $\delta$ *tels que* $\overrightarrow{c} = \gamma \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ *et* $\overrightarrow{d} = \delta \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$. *Mais alors*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \wedge \left(\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}\right) &= \beta \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \Longleftrightarrow \beta = \gamma \\ \overrightarrow{b} \wedge \left(\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}\right) &= -\alpha \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{d} \Longleftrightarrow \alpha = -\delta \end{aligned}$$

***Remarque :*** *On peut donner une expression des coefficients en fonction des données. En effet, on a* $\text{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \gamma \left\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right\|^2$ *(idem avec* $\delta$*) d'où*

$$\overrightarrow{x} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right\|^2} \left(\text{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) \overrightarrow{b} - \text{Det}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\right) \overrightarrow{a}\right)$$

**Exercice 5.20** *On commence par chercher l'ensembles de points* $M$ *équidistants de* $\mathcal{P}_1 : \ x + 2y - 2z - 2 = 0$ *et* $\mathcal{P}_2 : 2x + y - z + 2 = 0$. *En effet les centres des sphères cherchées sont dans cet ensemble. On a donc, si* $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$d\left(M, \mathcal{P}_1\right) = d\left(M, \mathcal{P}_2\right) \Longleftrightarrow \frac{|\ x + 2y - 2z - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|2x + y - z + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}}$$

*On trouve deux plans (bissecteurs) d'équation*

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{6}\,(x+2y-2z-2) & = & 3\,(2x+y-z+2) \\ & & et \\ -\sqrt{6}\,(x+2y-2z-2) & = & 3\,(2x+y-z+2) \end{array} \qquad (\mathcal{B}_1)$$

*On cherche alors les points d'intersectin de $D$ avec ces deux plans. Pour cela, on met $D$ sous forme paramétrique.*

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+4y-z-7=0 \\ 4x+5y+z-14=0 \end{array}\right. \underset{L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} 2x+4y-z-7=0 \\ -3y+3z=0 \end{array}\right.$$

*Ainsi une représentation paramétrique de $D$ est*

$$\left\{\begin{array}{c} -\dfrac{3}{2}z+\dfrac{7}{2} \\ z \\ z \end{array}\right.$$

*Le point d'intersection de $D$ avec le plan $(\mathcal{B}_1)$ vérifie donc*

$$\sqrt{6}\left(-\frac{3}{2}z+\frac{7}{2}-2\right)=3\,(-3z+7+2) \Longleftrightarrow -\frac{3}{2}\sqrt{6}\,(z-1)=-3\,(3z-9)$$

*ce qui donne* $z=\dfrac{\sqrt{6}-18}{\sqrt{6}-6}=\dfrac{\left(\sqrt{6}-18\right)\left(-\sqrt{6}-6\right)}{30}=\dfrac{17}{5}+\dfrac{2}{5}\sqrt{6}$. *Le premier centre $C_1$ a donc pour coordonnées*

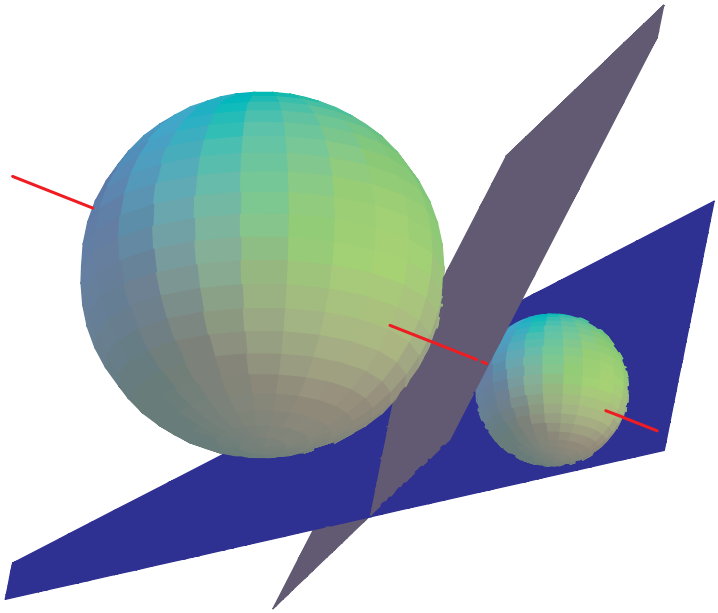
$$\begin{pmatrix} \dfrac{-8-3\sqrt{6}}{5} \\ \dfrac{17+2\sqrt{6}}{5} \\ \dfrac{17+2\sqrt{6}}{5} \end{pmatrix}$$

*Le rayon est alors*

$$d\,(C_1,\mathcal{P}_1)=\frac{\left|\dfrac{-8-3\sqrt{6}}{5}-2\right|}{3}=\frac{6+\sqrt{6}}{5}$$

*Pour la seconde sphère, il suffit de remplacer $\sqrt{6}$ par $-\sqrt{6}$ partout (conjugaison par rapport à $\sqrt{6}$).*

*Voici une représentation avec Maple.*



**Exercice 5.21**

1. *Soit* $A : \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in D_1$, $B : \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \in D_2$ *et* $C : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \in D_3$, *l'alignement se traduit par* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ *soit*

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ -1 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\beta-1)+1 \\ \alpha\gamma + 1 - \alpha \\ \alpha + (\alpha-1)(\beta-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Avant tout la troisième équation est inutile, en effet si les deux premières sont vérifiées alors*

$$\begin{array}{lll} & (\alpha-1) & = \alpha\gamma \\ \Longrightarrow & (\alpha-1)(\beta-1) & = \alpha\gamma(\beta-1) \\ \Longrightarrow & (\alpha-1)(\beta-1) & = -\alpha \\ & \alpha + (\alpha-1)(\beta-1) & = 0 \end{array}$$

*On a donc*

$$\begin{array}{l} \beta\gamma = \gamma - 1 \\ (\gamma-1)\alpha = -1 \ \textit{(ainsi } \gamma \neq 1\textit{, donc à la ligne au dessus } \gamma \neq 0\textit{)} \end{array}$$

*d'où*

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & \dfrac{\gamma-1}{\gamma} \\ \alpha & = & -\dfrac{1}{\gamma-1} \end{array}$$

*On en déduit donc que les droites qui coupent* $D_1, D_2$ *et* $D_2$ *sont de la forme (en paramètrique, elles passent par* $C$ *et sont dirigées par* $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ -1 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma}{\gamma-1} \\ -1 \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$\Gamma : \begin{cases} x = 1 + \dfrac{\gamma}{\gamma-1}t \\ y = -t \\ z = \gamma + \gamma t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \ \textit{avec } \gamma \neq 0,\ \gamma \neq 1$$

***Remarque :*** *On ne peut avoir $\gamma = 0$, car dans ce cas $\Gamma$ a pour équation $\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, ainsi $\Gamma$ est parallèle à $D_2$, elle ne saurait la rencontrer !*

2. *On connaît déjà les droites qui coupent $D_1, D_2$ et $D_3$, elles sont du type $\Gamma$. La droite $D_4$ rencontre $\Gamma$ s'il existe un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} t \\ y = -t \\ z = \gamma + \gamma t \\ x = y \\ y = uz \end{cases}$$

Guesmi.B

*La condition $x = y$ donne*

$$1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} t + t = 0 \Longleftrightarrow t \frac{2\gamma - 1}{\gamma - 1} = -1$$

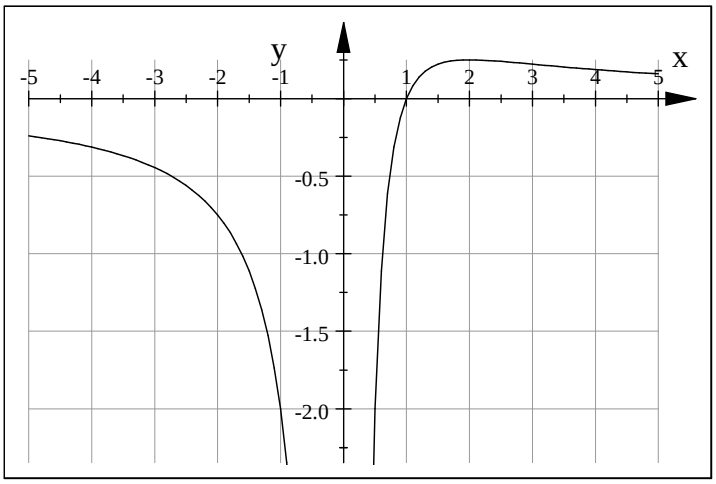
*Ainsi $\gamma \neq \dfrac{1}{2}$ (car sinon il n'y a pas de solution) et $t = \dfrac{1 - \gamma}{2\gamma - 1}$. On injecte cette valeur dans la condition $y = uz$, qui s'écrit $-t = u \times (\gamma + \gamma t)$ pour obtenir*

$$-\frac{1 - \gamma}{2\gamma - 1} = u \times \gamma \left(1 + \frac{1 - \gamma}{2\gamma - 1}\right)$$

*soit*

$$-\frac{1 - \gamma}{2\gamma - 1} = u \times \frac{\gamma^2}{2\gamma - 1} \Longrightarrow u = \frac{\gamma - 1}{\gamma^2}$$

*Il existe donc une droite qui rencontre $D_1, D_2, D_3$ et $D_4$ si et seulement s'il existe $\gamma \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ tel que $u = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma^2}$. Cela impose à $u$ d'être non nul ($\gamma \neq 0$), le tracé de la courbe $f(\gamma) = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma^2} = \dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{1}{\gamma^2}$ (dont la dérivée vaut $f'(\gamma) = \dfrac{2 - \gamma}{\gamma^3}$ donne un maximum en $f(2)$ qui vaut $\dfrac{1}{4}$.*




*En conclusion, il existe une droite qui rencontre $D_1, D_2, D_3$ et $D_4$ si et seulement si $u \in \left]-\infty, 0\right[ \cup \left]0, \dfrac{1}{4}\right]$.*

**Exercice 5.22** .

1. *Les droites sont sécantes si le système*

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

*admet une solution. C'est bien le cas, la solution est* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. *Il y a une droite évidente, elle passe par* $A$ *et est parallèle à* $xOy$*. Elle passe donc par* $A$ *et par* $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   *La question se pose de savoir si il y en a d'autres. On considère donc un plan* $P_\lambda$ *d'équation* $z = \lambda$*, parallèle à* $xOy$*. Ce plan coupe* $D$ *en* $M$ *et* $D'$ *en* $M'$*. On détermine ensuite si la droite* $(MM')$ *coupe l'axe* $Oz$*.*
   *Les coordonnées de* $M$ *vérifient*

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{doù } M = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

   *de même pour* $M'$ *dont les coordonnées vérifient*

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - \lambda - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} \\ \lambda + 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

   *La droite* $(MM')$ *ne peut couper* $Oz$ *qu'en* $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$*. Il s'agit de vérifier si* $\overrightarrow{MM'}$ *et* $\overrightarrow{PM}$ *sont liées, i.e. si leur produit vectoriel est nul.*

$$\overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\lambda + 2)(1 - \lambda) \end{pmatrix}$$

   *On retrouve le cas* $\lambda = 1$ *(plan passant par* $A$ *et* $A'$*) mais aussi un autre cas* $\lambda = -2$*.*
   *Il existe une seconde droite qui passe par*

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.23** *On développe* $\mathrm{Det}\left(\vec{u} - \vec{i}, \vec{v} - \vec{j}, \vec{w} - \vec{k}\right)$ *par trilininéarité pour obtenir*

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\left(\vec{u} - \vec{i}, \vec{v} - \vec{j}, \vec{w} - \vec{k}\right) &= \mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) - \mathrm{Det}\left(\vec{i}, \vec{v}, \vec{w}\right) - \mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{j}, \vec{w}\right) + \mathrm{Det}\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{w}\right) \\ &\quad - \mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right) + \mathrm{Det}\left(\vec{i}, \vec{v}, \vec{k}\right) + \mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{j}, \vec{k}\right) - \mathrm{Det}\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \end{aligned}$$

*On a* $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ *et* $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$, $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{v}$ *si* $\mathcal{B}_1$ *est directe. Ainsi, lorsque* $\mathcal{B}_1$ *est directe, on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) &= \mathrm{Det}\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) = 1 \\ \mathrm{Det}\left(\vec{i}, \vec{v}, \vec{w}\right) &= \vec{i} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{i} \cdot \vec{u} \\ \mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{j}, \vec{w}\right) &= \mathrm{Det}\left(\vec{w}, \vec{u}, \vec{j}\right) = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{j} = \vec{v} \cdot \vec{j} \\ \mathrm{Det}\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{w}\right) &= \left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \cdot \vec{w} = \vec{k} \cdot \vec{w} \\ \mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right) &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{k} = \vec{w} \cdot \vec{k} \\ \mathrm{Det}\left(\vec{i}, \vec{v}, \vec{k}\right) &= \mathrm{Det}\left(\vec{k}, \vec{i}, \vec{v}\right) = \vec{j} \cdot \vec{v} \\ \mathrm{Det}\left(\vec{u}, \vec{j}, \vec{k}\right) &= \vec{u} \cdot \left(\vec{j} \wedge \vec{k}\right) = \vec{u} \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

*d'où*

$$\text{Det}\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{i},\overrightarrow{v}-\overrightarrow{j},\vec{w}-\overrightarrow{k}\right)=1-\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\cdot\vec{w}-\vec{w}\cdot\overrightarrow{k}+\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{i}-1=0$$

*Si* $\mathcal{B}_2$ *est indirecte alors* $\mathcal{B}_3=(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\vec{w})$ *est directe donc*

$$\text{Det}\left(-\overrightarrow{u}-\overrightarrow{i},\overrightarrow{v}-\overrightarrow{j},\vec{w}-\overrightarrow{k}\right)=0$$

*On a alors*

$$\begin{aligned}\text{Det}\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{i},\overrightarrow{v}-\overrightarrow{j},\vec{w}-\overrightarrow{k}\right) &= \text{Det}\left(2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}-\overrightarrow{i},\overrightarrow{v}-\overrightarrow{j},\vec{w}-\overrightarrow{k}\right)\\ &= \text{Det}\left(2\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}-\overrightarrow{j},\vec{w}-\overrightarrow{k}\right)\end{aligned}$$

*On développe le dernier déterminant pour trouver le résultat demandé.*

### Exercice 5.24

1. *Soit* $P$ *le point de coordonnées* $\left(\frac{ad}{\|n\|^2},\frac{bd}{\|n\|^2},\frac{cd}{\|n\|^2}\right)$, *il suffit de vérifier que* $P\in\mathcal{P}$ *et que* $\overrightarrow{OP}$ *est normal à* $\mathcal{P}$*,i.e. colinéaire à* $\overrightarrow{n}$. *On a clairement*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{d}{\|n\|}\overrightarrow{n}\ \textit{et}\\ a\times\frac{ad}{\|n\|^2}+b\times\frac{bd}{\|n\|^2}+c\times\frac{cd}{\|n\|^2} &= \frac{\|n\|^2}{\|n\|^2}d=d\Longrightarrow P\in\mathcal{P}\end{aligned}$$

2. *L'équation de* $\mathcal{P}$ *est* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, *les coodonnées de* $P$ *sont donc*

$$P:\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\ \frac{1}{b}\\ \frac{1}{c}\end{pmatrix}$$

*En particulier* $OP^2=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2}\times\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}\Longrightarrow\frac{1}{OP^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$

*On peut vérifier que* $P$ *est l'othocentre du triangle* $(ABC)$, *en effet* $\overrightarrow{AP}:\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}\times\begin{pmatrix}?\\ \frac{1}{b}\\ \frac{1}{c}\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{BC}:\begin{pmatrix}0\\ -b\\ c\end{pmatrix}$ *d'où* $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ *et par symétrie des rôles* $\cdots$

### Exercice 5.25

1. *On a, dans* $\mathcal{R}$, $A:(0,0,0)$, $B:(1,0,0)$, $C:(0,1,0)$ *et* $D:(0,0,1)$ *d'où (*$K$ *est le barycentre de* $(A,1)$ *et* $(B,\alpha)$*)*

$$K:\left(\frac{\alpha}{1+\alpha},0,0\right),\ L:\left(\frac{1}{1+\beta},\frac{\beta}{1+\beta},0\right),\ M:\left(0,\frac{1}{1+\gamma},\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\ \textit{et}\ N:\left(0,0,\frac{1}{1+\delta}\right)$$

*On en déduit que*

$$(KCD) \quad : \quad \begin{vmatrix} x & 0 & \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \\ y-1 & 1 & -1 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\alpha+1}\left((\alpha+1)x+\alpha y+\alpha z-\alpha\right)=0$$

$$(LAD) \quad : \quad \begin{vmatrix} x & 0 & \dfrac{1}{1+\beta} \\ y & 0 & \dfrac{\beta}{1+\beta} \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\beta+1}(\beta x-y)=0,\ (MAB): \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & \dfrac{1}{1+\gamma} \\ z & 0 & \dfrac{\gamma}{1+\gamma} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1+\gamma}(\gamma y-z)=0$$

$$(NBC) \quad : \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & -1 & -1 \\ z & 0 & \dfrac{1}{1+\delta} \end{vmatrix} = -\frac{1}{1+\delta}\left(x+y+(1+\delta)z-1\right)=0$$

*Soit,*

$$\begin{aligned} (KCD) \quad &: \quad (\alpha+1)x+\alpha y+\alpha z=\alpha,\ (LAD): \beta x-y=0,\ (MAB): \gamma y-z=0 \\ \text{et } (NBC) \quad &: \quad x+y+(1+\delta)z=1 \end{aligned}$$

2. *Les quatre plans ont un point commun si et seulement si le système*

$$\begin{cases} (\alpha+1)x+\alpha y+\alpha z=\alpha \\ \beta x-y=0 \\ \gamma y-z=0 \\ x+y+(1+\delta)z=1 \end{cases} \quad \text{admet une solution}$$

*Soit*

$$\begin{cases} (\alpha+1)x+\alpha y+\alpha z=\alpha \\ y=\beta x \\ z=\gamma\beta x \\ x+y+(1+\delta)z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)x+\alpha\beta x+\alpha\gamma\beta x=\alpha \\ y=\beta x \\ z=\gamma\beta x \\ x+\beta x+(1+\delta)\gamma\beta x=1 \end{cases} \quad \text{admet une solution}$$

*Le dernier système s'écrit*

$$\begin{cases} x(\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma+1)=\alpha \\ y=\beta x \\ z=\gamma\beta x \\ x(\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1)=1 \end{cases}$$

*On travaille alors par analyse-synthèse.*

*Analyse : La dernière ligne impose* $\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1\neq 0$ *et ainsi* $x=\dfrac{1}{\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1}$ *que l'on reporte dans la première pour avoir*

$$\frac{\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma+1}{\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1}=\alpha \iff \alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma+1=\alpha(\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1)$$

*soit*

$$\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma+1-\alpha(\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1)=1-\alpha\beta\gamma\delta=0$$

*Synthèse : Si* $1-\alpha\beta\gamma\delta=0$ *et* $\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1\neq 0$, *alors* $\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma+1=\alpha(\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1)$, *le système devient admet alors une unique solution (les premieres et dernieres lignes sont identiques).*
*La CNS est donc*

$$\alpha\beta\gamma\delta=1 \text{ et } \beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1\neq 0$$

***Remarque :*** *La condition* $\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+1\neq 0$ *semble donner un statut particulier à* $\beta$, *c'est faux. Elle peut s'écrire*

$$\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\beta\gamma\delta\alpha\neq 0$$

*En multipliant pa $\alpha \neq 0$ (car $\alpha\beta\gamma\delta = 1$) elle s'écrit aussi*

$$\alpha\beta + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma\delta + \alpha \neq 0$$

*En remultipliant par $\gamma$, on a*

$$\gamma + \gamma\beta + \gamma\beta\delta + \gamma\beta\delta\alpha \neq 0$$

*et la dernière*

$$\delta + \delta\alpha + \delta\alpha\beta + \delta\alpha\beta\gamma \neq 0$$

*Bref, tout cela est bien symétrique (cela m'a turlupiné).*

## 3 Les olympiques

**Exercice 5.26** *On pose $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OB_1}$ , $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OB_2}$ et $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OB_3}$. Alors $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{k}$. On a*

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_3B_3}\right) &= \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right) - \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{k}\right) - \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{e_3}\right) - \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right) \\ &\quad + \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{e_3}\right) + \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{k}\right) + \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right) - \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)\end{aligned}$$

*Or*

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right) &= \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right) = 1 \\ \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{k}\right) &= \left(\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}\right) \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{k} \\ \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{e_3}\right) &= \left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}\right) \cdot \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{e_3} \\ \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{e_3}\right) &= \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}\right) = \overrightarrow{j} \cdot \left(\overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1}\right) \\ \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{k}\right) &= \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{e_2} \cdot \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{j} \\ \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right) &= \overrightarrow{i} \cdot \left(\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3}\right) = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{e_1} \\ \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right) &= \overrightarrow{e_1} \cdot \left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{i}\end{aligned}$$

Guesmi.B

*en sommant, on a bien*

$$\mathrm{Det}\left(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_3B_3}\right) = 0$$

# Géométrie de l'espace

## Notions communes

**Exercice 1** [ 01872 ] [correction]
A quelle(s) condition(s) simple(s) l'intersection de trois plans de l'espace n'est elle pas réduit à un point ?

**Exercice 2** [ 01873 ] [correction]
Montrer que l'ensemble des barycentres de trois points $A, B, C$ non alignés est le plan $(ABC)$.

**Exercice 3** [ 01874 ] [correction]
Soient $A, B, C, D$ quatre points non coplanaires. On note $\mathcal{A}(.)$ l'aire d'un triangle.
Montrer $\mathcal{A}(BCD) \leqslant \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(ACD)$.

## Droites de l'espace

**Exercice 4** [ 01875 ] [correction]
Une droite $\mathcal{D}$ coupe trois plans parallèles en des points $A, B, C$.
Montrer que le rapport $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ ne dépend de la droite $\mathcal{D}$.

**Exercice 5** [ 01876 ] [correction]
Soient $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) une droite passant par $A$ (resp. $B$) et dirigée par $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$).
Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

**Exercice 6** [ 01877 ] [correction]
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires.
Décrire l'ensemble $\mathcal{S} = \{m\,[M, N]\,/M \in \mathcal{D}, N \in \mathcal{D}'\}$.

**Exercice 7** [ 01878 ] [correction]
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes sécantes de l'espace.
Montrer que l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est la réunion de deux plans.

**Exercice 8** [ 01879 ] [correction]
Soit $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ des droites de l'espace telles que :
$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \neq \emptyset$.
Montrer que les droites $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ sont concourantes ou coplanaires.

## Produits scalaire, vectoriel et mixte

**Exercice 9** [ 01880 ] [correction]
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul $A$ un point et $\lambda$ un réel.
Déterminer les points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \lambda$.

**Exercice 10** [ 01881 ] [correction]
Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Exprimer $\mathrm{Det}(\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u})$ en fonction de $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

**Exercice 11** [ 01882 ] [correction]
Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs de l'espace. Montrer que $\mathrm{Det}(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{c}, \vec{a} \wedge \vec{d}) = 0$.

**Exercice 12** [ 01883 ] [correction]
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux et non nuls de l'espace. Simplifier $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}$.

**Exercice 13** [ 01884 ] [correction]
Soit $A, B, C, D$ quatre points non coplanaires de l'espace.
Déterminer l'ensemble des points $M$ vérifiant $(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$.

**Exercice 14** [ 01885 ] [correction]
Montrer que pour tout points $A, B, C, M$, on a
$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

**Exercice 15** [ 01886 ] [correction]
Soit $\vec{a}, \vec{b}$ des vecteurs de l'espace avec $\vec{a} \neq \vec{o}$.
On désire déterminer les vecteurs $\vec{x}$ tels que $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$.
a) Montrer que, si $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$, il n'y a pas de solution à cette équation.
On suppose maintenant $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
b) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $\vec{x}_0 = \lambda \vec{a} \wedge \vec{b}$ soit solution.
c) Déterminer alors toutes les solutions.

**Exercice 16** [ 01887 ] [correction]
Soit $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs de l'espace et l'équation vectorielle $\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ d'inconnue $\vec{x}$.
a) Soit $\vec{x}$ solution. Montrer que $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ et en déduire une expression de $\vec{x}$.
b) Conclure.

## Coordonnées cartésiennes dans l'espace

**Exercice 17** [ 01888 ] [correction]
Montrer que l'ensemble formé des points $M \left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.$ avec $\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases}$ pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ est un plan dont on formera une équation cartésienne.

**Exercice 18** [ 01889 ] [correction]
Déterminer une équation du plan parallèle à l'axe $(Ox)$ passant par les points $A \left|\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right.$ et $B \left|\begin{array}{l} 2 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right.$.

**Exercice 19** [ 01890 ] [correction]
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $\mathcal{P} : x + y + z = 1$.
Déterminer un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tel que $\Omega \in \mathcal{P} \cap (Oz)$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{dir}\mathcal{P}$.

**Exercice 20** [ 01891 ] [correction]
On considère les cinq points de l'espace : $A \left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right.$, $B \left|\begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right.$, $C \left|\begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right.$, $D \left|\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 4 \end{array}\right.$ et $E \left|\begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right.$.
Déterminer un vecteur directeur de la droite intersection des plans $(ABC)$ et $(ADE)$.

**Exercice 21** [ 01892 ] [correction]
Montrer que les droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} \text{ et } \mathcal{D}' : \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$$

de l'espace sont coplanaires et former un équation de leur plan.

**Exercice 22** [ 01893 ] [correction]
On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit la droite

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

et le plan

$$\mathcal{P} : x + 3y + 2z = 6$$

de l'espace.
Déterminer l'image de la projection orthogonale de $\mathcal{D}$ sur le plan $\mathcal{P}$.

## Distance d'un point à une droite, à un plan

**Exercice 23** [ 01894 ] [correction]
Calculer :
a) la distance du point $A \left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right.$ au plan $\mathcal{P} : x - y + z = 2$
b) la distance du point $B \left|\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right.$ à la droite $\mathcal{D}$ paramétrée par : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
c) la distance du point $C \left|\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right.$ à la droite $\Delta$ définie par le système $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$.

**Exercice 24** [ 01895 ] [correction]
Soit $A \left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right.$, $B \left|\begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right.$, $C \left|\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right.$ et $D \left|\begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right.$. Déterminer le volume du tétraèdre $(ABCD)$.

## Perpendiculaire commune

**Exercice 25** [ 01896 ] [correction]
Soit $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$ et $\mathcal{D}' = B + \text{Vect}(\vec{v})$ deux droites non coplanaires de l'espace.
On note $H$ et $H'$ les pieds de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
a) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{D}$ et tout $M' \in \mathcal{D}'$, on a $MM' \geqslant HH'$ et préciser le(s) cas d'égalité.
On appelle distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$ le réel $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = HH'$.
b) Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{n}$ reste constants quand $M$ et $M'$ décrivent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
c) En déduire que $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \dfrac{\left|\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v})\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

**Exercice 26** [ 01897 ] [correction]
Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ deux droites de l'espace.
a) Justifier que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
b) Former un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

## Cylindres et sphères

**Exercice 27** [ 01898 ] [correction]
Etudier l'intersection d'un cylindre et d'une sphère centrée sur l'axe du cylindre.

**Exercice 28** [ 01899 ] [correction]
Montrer que deux cercles non coplanaires inscrits sur une sphère s'interceptent si, et seulement si, la distance du centre de la sphère à la droite intersection des plans définissant les cercles est inférieure au rayon de la sphère.

**Exercice 29** [ 01900 ] [correction]
Déterminez la sphère contenant les cercles d'équation :
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$.

**Exercice 30** [ 01901 ] [correction]
a) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de l'espace, de centre $O$, de rayon $r$, évoluant dans un plan $\mathcal{P}$.
Soit $\mathcal{S}$ une sphère de l'espace, de centre $\Omega$ et de rayon $R$.
Former une condition nécessaire et suffisante pour que la sphère $\mathcal{S}$ contienne le cercle $\mathcal{C}$.
b) On munit l'espace d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Montrer qu'il existe une unique sphère contenant les cercles suivants :

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 26 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 8z = 16 \end{cases} \text{ et } \mathcal{C}_2 : \begin{cases} 2x + 3y + z = 15 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z = 8 \end{cases}$$

c) Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles non coplanaires de l'espace admettant deux points communs $A$ et $B$.
Montrer qu'il existe une sphère unique $\mathcal{S}$ contenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

## Coordonnées cylindriques et sphériques

**Exercice 31** [ 01902 ] [correction]
On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Exprimer les coordonnées sphériques $(r, \varphi, \theta)$ d'un point $M$ en fonction de ses coordonnées cylindriques $(\rho, \varphi, z)$ et inversement.

# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]
Soient $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{P}''$ trois plans.
Si les plans sont parallèles alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}''$ est vide ou égal à ces plans (lorsque ceux-ci sont égaux).
Si l'un au moins des plans n'est pas parallèle à un autre. Quitte à échanger, supposons $\mathcal{P}$ non parallèle à $\mathcal{P}'$. L'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est une droite $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}''$ n'est pas réduit à un point si, et seulement si, $\mathcal{D} // \mathcal{P}''$.
Finalement $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}''$ n'est pas réduit à un point si, et seulement si, les plans $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{P}''$ sont parallèles à une même droite.

**Exercice 2 :** [énoncé]
Tout barycentre des points $A, B, C$ appartient au plan $(ABC)$.
Inversement, pour $M \in (ABC)$, on peut écrire $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ et donc $M = \mathrm{bar}((A, 1-\lambda-\mu), (B, \lambda), (C, \mu))$.

**Exercice 3 :** [énoncé]
Soit $A'$ le projeté de $A$ sur le plan $(BCD)$.
On a $\mathcal{A}(BCD) \leqslant \mathcal{A}(A'BC) + \mathcal{A}(A'BD) + \mathcal{A}(A'CD)$ et $\mathcal{A}(A'BC) \leqslant \mathcal{A}(ABC)$ etc.

**Exercice 4 :** [énoncé]
Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites coupant les plans considérés.
Si $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$ : ok
Sinon, quitte à considérer une droite parallèle à $\mathcal{D}'$ on peut supposer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en $A$ et la propriétés s'obtient alors par Thalès dans le plans défini par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

**Exercice 5 :** [énoncé]
Si $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sont coplanaires alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ appartiennent à la direction du plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et par suite ces trois vecteurs sont coplanaires.
Inversement, si $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ sont coplanaires, considérons le plan passant par $A$ et contenant ces trois vecteurs. Ce plan contient $A$ et $\vec{u}$ donc il contient $\mathcal{D}$. Ce plan contient $A$ et $\overrightarrow{AB}$ donc il contient $B$. De plus il contient $\vec{v}$ donc il contient $\mathcal{D}'$.
Finalement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

**Exercice 6 :** [énoncé]
Notons $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$, $\mathcal{D}' = B + \mathrm{Vect}(\vec{v})$ et $I = m\,[A, B]$.
Pour $M = A + \lambda \vec{u} \in \mathcal{D}$ et $N = B + \mu \vec{v} \in \mathcal{D}'$ on a $m\,[M, N] = I + \frac{\lambda}{2}\vec{u} + \frac{\mu}{2}\vec{v}$ donc $\mathcal{S} = I + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. C'est un plan car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

**Exercice 7 :** [énoncé]
Notons $\mathcal{P}$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Soit $M$ un point de l'espace et $H$ son projeté sur $\mathcal{P}$.
Par Pythagore $d(M, \mathcal{D})^2 = MH^2 + d(H, \mathcal{D})^2$ et $d(M, \mathcal{D}')^2 = MH^2 + d(H, \mathcal{D}')^2$ donc $d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}') \Leftrightarrow d(H, \mathcal{D}) = d(H, \mathcal{D}')$.
Or, dans le plan $\mathcal{P}$, l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ forme la réunion de deux droites orthogonales (les bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$) donc $M$ est équidistant de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ si, et seulement si, son projeté sur $\mathcal{P}$ appartient à ses bissectrices.
Finalement, l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est la réunion des deux plans orthogonaux à $\mathcal{P}$ contenant les bissectrices dans $\mathcal{P}$ de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

**Exercice 8 :** [énoncé]
Si les droites $\mathcal{D}_i$ sont coplanaires : ok.
Sinon, considérons $\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j, \mathcal{D}_k$ trois droites non coplanaires.
$\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{D}_j$ s'interceptent en un point $O$. Notons $\mathcal{P}$ le plan contenant ces deux droites.
Notons $A$ et $B$ les points d'intersections de $\mathcal{D}_k$ avec $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{D}_j$.
Si $A \neq O$ alors la droite $\mathcal{D}_k$ passe par deux points distincts du plan $\mathcal{P}$ et donc est incluse dans ce plan. Ceci est exclu. Par suite $A = O$ et de même $B = O$.
Soit $\mathcal{D}_\ell$ une autre droite de la famille. Montrons que celle-ci passe aussi par $O$.
Si $\mathcal{D}_\ell$ n'est pas incluse dans le plan $\mathcal{P}$, le raisonnement précédent permet de conclure.
Sinon $\mathcal{D}_\ell$ est incluse dans ce plan et comme $\mathcal{D}_\ell$ intercepte $\mathcal{D}_k$ qui ne coupe $\mathcal{P}$ qu'en $O$, on a $O \in \mathcal{D}_\ell$.
Au final, les droites concourent en $O$.

**Exercice 9 :** [énoncé]
Soit $B$ déterminé par $\overrightarrow{AB} = \frac{\lambda}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$. On a $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \lambda$.
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 0$.
Par suite l'ensemble solution est le plan passant par $B$ dont $\vec{u}$ est vecteur normal.

**Exercice 10 :** [énoncé]
En développant :
$\mathrm{Det}(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u}) = \mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \mathrm{Det}(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) + 0 = 2\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

**Exercice 11 :** [énoncé]
Si $\vec{a}=0$ alors $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{d}=\vec{o}$ donc $\mathrm{Det}(\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{c},\vec{a}\wedge\vec{d})=0$.
Si $\vec{a}\neq\vec{o}$ alors $\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{c},\vec{a}\wedge\vec{d}$ sont coplanaires car tous trois orthogonaux à $\vec{a}$.
Par suite $\mathrm{Det}(\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{c},\vec{a}\wedge\vec{d})=0$.

**Exercice 12 :** [énoncé]
$\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ donc $\|(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}\| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\,\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|$.
$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{u}\wedge\vec{v}$, il est donc colinéaire à $\vec{v}$.
La famille $(\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{u},(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v})$ est directe tout comme la famille $(\vec{u}\wedge\vec{v},\vec{u},\vec{v})$.
Par suite $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u} = \|\vec{u}\|^2\,\vec{v}$.

**Exercice 13 :** [énoncé]
Un point $M$ est solution si, et seulement si, $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}$ sont colinéaires. Or ces vecteurs sont respectivement orthogonaux aux plans $(ABM)$ et $(CDM)$. S'ils sont non nuls, la colinéarité implique que ces deux plans sont confondus. Ceci est exclu puisque les points $A,B,C,D$ sont supposés non coplanaires. Ainsi $M$ est solution ssi $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}$ est nul ou $\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}$ l'est i.e. si, et seulement si, $M\in(AB)\cup(CD)$.

**Exercice 14 :** [énoncé]
$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{MC}$
donc $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MC}$ puis la relation.

**Exercice 15 :** [énoncé]
a) S'il existe une solution $\vec{x}$ alors $\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{x}$ implique que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux.
b) $\vec{a}\wedge(\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}) = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b}.\vec{a} - \lambda\|\vec{a}\|^2\,b = -\lambda\|\vec{a}\|^2\,b$.
Pour $\lambda=\frac{-1}{\|\vec{a}\|^2}$, le vecteur $\vec{x}_0$ est solution particulière.
c) $\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{a}\wedge\vec{x}_0 \Leftrightarrow \vec{a}\wedge(\vec{x}-\vec{x}_0)=\vec{o} \Leftrightarrow \vec{x}-\vec{x}_0$ est colinéaire à $\vec{a}$.
Par suite $\mathcal{S}=\{\vec{x}_0+\lambda\vec{a}/\lambda\in\mathbb{R}\}$.

**Exercice 16 :** [énoncé]
a) Si $\vec{x}$ est solution $\vec{a}\cdot\vec{x} = \vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a}\wedge\vec{x}) = \vec{a}\cdot\vec{b}$ et alors
$\vec{a}\wedge\vec{x} = \vec{a}\wedge(\vec{b}-\vec{a}\wedge\vec{x}) = \vec{a}\wedge\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{a} + \|\vec{a}\|^2\,\vec{x}$ puis
$\vec{x} = \vec{b}-\vec{a}\wedge\vec{x} = \vec{b}-\vec{a}\wedge\vec{b} + (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} - \|\vec{a}\|^2\,\vec{x}$ et finalement
$\vec{x} = \frac{1}{1+\|\vec{a}\|^2}\left(\vec{b}-\vec{a}\wedge\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}\right)$.
b) Pour $\vec{x} = \frac{1}{1+\|\vec{a}\|^2}\left(\vec{b}-\vec{a}\wedge\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}\right)$,
$\vec{x}+\vec{a}\wedge\vec{x} = \frac{1}{1+\|a\|^2}\left(\vec{b}-\vec{a}\wedge\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}+\vec{a}\wedge\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}+\|\vec{a}\|^2\,\vec{b}\right) = \vec{b}$.

**Exercice 17 :** [énoncé]
Introduisons $A\begin{vmatrix}2\\2\\1\end{vmatrix}$, $u\begin{vmatrix}1\\2\\-1\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}2\\1\\-1\end{vmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les points $M$ considérés sont ceux de la forme $M=A+s\vec{u}+t\vec{v}$ avec $s,t\in\mathbb{R}$, donc les points du plan $(A;\vec{u},\vec{v})$ dont l'équation est $x+y+3z=7$.

**Exercice 18 :** [énoncé]
$\vec{i}\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}2\\-2\\-2\end{vmatrix}$ dirigent ce plan qui a pour équation $z-y=1$.

**Exercice 19 :** [énoncé]
$\Omega\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$, $\vec{w}\begin{vmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{vmatrix}$, $\vec{u}\begin{vmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{vmatrix}$ et $\vec{v}=\vec{w}\wedge\vec{u}$.

**Exercice 20 :** [énoncé]
Considérons $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}$ vecteurs normaux aux deux plans.
$\vec{u}\begin{vmatrix}1\\1\\-2\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}1\\-10\\-4\end{vmatrix}$.
Les plans ne sont pas parallèles, ils s'intersectent selon une droite dirigée par
$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$. $\vec{w}\begin{vmatrix}-24\\2\\-11\end{vmatrix}$.

**Exercice 21 :** [énoncé]

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passent par les points $A\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}2\\-3\\0\end{vmatrix}$ et sont dirigées par les vecteurs $\vec{u}\begin{vmatrix}2\\1\\1\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}1\\3\\1\end{vmatrix}$.

Puisque

$$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}1\\-2\\0\end{vmatrix} = \vec{u}-\vec{v}$$

les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.
Elles sont incluses dans le plan

$$\mathcal{P} : 2x+y-5z=1$$

**Exercice 22 :** [énoncé]

La droite $\mathcal{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{vmatrix}1\\2\\-3\end{vmatrix}$.

La droite $\mathcal{D}$ n'est pas orthogonale au plan $\mathcal{P}$ et sa projection est donc une droite $\mathcal{D}'$ contenue dans le plan $\mathcal{P}$ et dans le plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
Puisque

$$\mathcal{P}' : 13x-5y+z=7$$

on a

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} 13x-5y+z=7 \\ x+3y+2z=6 \end{cases}$$

**Exercice 23 :** [énoncé]

a) $d(A,\mathcal{P}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ b) $d(B,\mathcal{D}) = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$ c) $d(C,\Delta) = 2$.

**Exercice 24 :** [énoncé]

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}\times h$ avec $\mathcal{A} = \text{Aire}(ABC)$ et $h = d(D,(ABC))$.
$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{5}$ et $(ABC) : 2x+z=3$ donc $h = \frac{4}{\sqrt{5}}$ puis $\mathcal{V} = \frac{4}{3}$.

**Exercice 25 :** [énoncé]

a) Par Pythagore : $MM'^2 = HH'^2 + \left\|\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{H'M'}\right\|^2$ car $\overrightarrow{HH'}$ et $\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{H'M'}$ sont orthogonaux.
Par suite $MM' \geqslant HH'$ avec égalité si, et seulement si, $\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{H'M'} = \vec{o}$.
Or puisque les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{H'M'}$ ne sont pas colinéaires (car $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires), cela équivaut a $\overrightarrow{HM} = \vec{o}$ et $\overrightarrow{H'M'} = \vec{o}$ i.e. $M = H$ et $M' = H'$.
b) $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{MH}\cdot\vec{n} + \overrightarrow{HH'}\cdot\vec{n} + \overrightarrow{H'M}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HH'}\cdot\vec{n}$.
c) $\vec{n} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$HH' = \frac{\left|\overrightarrow{HH'}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|\text{Det}(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v})\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$ car, par b), $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HH'}\cdot\vec{n}$.

**Exercice 26 :** [énoncé]

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passent par $A\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ et sont dirigés par $\vec{u}\begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$.

a) Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont ni parallèles ni sécantes donc non coplanaires.
Notons $\Delta$ la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

b) Posons $\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{w}\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix}$.

$\mathcal{P} : -x+y+2z=1$ contient $\mathcal{D}$ et $\Delta$, $\mathcal{P}' : 2x+y-z=2$ contient $\mathcal{D}'$ et $\Delta$.

Ainsi $\Delta : \begin{cases} -x+y+2z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$.

**Exercice 27 :** [énoncé]

Notons $\Omega$ le centre de la sphère et $\Delta$ l'axe du cylindre. $\Omega\in\Delta$.
Notons $R$ le rayon de la sphère et $r$ celui du cylindre.
Soit $M$ un point du cylindre et $H$ son projeté orthogonal sur $\Delta$.
$M$ appartient à la sphère si, et seulement si, $\Omega M^2 = R^2$ i.e. $\Omega H^2 + r^2 = R^2$.
Si $R < r$ alors il n'y a pas de solution.
Si $R = r$ alors $M$ appartient à la sphère si, et seulement si, $H = \Omega$.
L'intersection de la sphère et du cylindre se confond alors avec l'intersection du cylindre avec le plan orthogonal à l'axe passant par $\Omega$ ce qui donne un cercle de ce plan, centré en $\Omega$ et rayon $R$.
Si $R > r$ alors $M$ appartient à la sphère si, et seulement si, $H$ est l'un des deux points de $\Delta$ déterminés par $\Omega H = \sqrt{R^2-r^2}$. L'intersection de la sphère et du cylindre est alors la réunion des intersections du cylindre et des plan orthogonal à

la l'axe passant par les deux points précédents. Cela donne la réunion de deux cercles isométriques symétriques par rapport à $\Omega$.

**Exercice 28 :** [énoncé]
Notons $\mathcal{D}$ la droite intersection des deux plans.
Si l'intersection des cercles est non vide alors un point de l'intersection de ces cercles appartient à $\mathcal{D}$ et, à l'aide de Pythagore, la distance du centre du cercle à $\mathcal{D}$ est inférieure au rayon de la sphère.
Si la distance du centre du cercle à $\mathcal{D}$ est inférieure au rayon de la sphère alors $\mathcal{D}$ intercepte la sphère ce qui donne au moins un point commun aux deux cercles.

**Exercice 29 :** [énoncé]
Le centre de cette sphère de rayon $R$ est sur l'axe $(Oz)$ à une côte $z_0$ vérifiant $z_0^2 + 9 = R^2$ et $(z_0 - 2)^2 + 25 = R^2$ donc $z_0 = 5$ et $R = \sqrt{34}$.

**Exercice 30 :** [énoncé]
a) Par Pythagore, la sphère $\mathcal{S}$ contient le cercle $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\Omega$ évolue sur la droite normale à $\mathcal{P}$ passant par $O$ et que $R^2 = O\Omega^2 + r^2$.
b) Les point

$$O_1 \left|\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right. \text{ et } O_2 \left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}\right.$$

sont les centres des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, $R_1 = 6$ et $R_2 = 5$ leurs rayons.
Les vecteurs

$$\vec{n}_1 \left|\begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}\right. \text{ et } \vec{n}_2 \left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right.$$

sont des vecteurs normaux aux plans contenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Les droites normales aux deux plans passant par $O_1$ et $O_2$ s'intersectent en

$$\Omega \left|\begin{matrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

De plus $O_1\Omega^2 + R_1^2 = O_2\Omega^2 + R_2^2 = 81 = R^2$.
Par suite la sphère de centre $\Omega$, de rayon 9 est solution et c'est la seule.

c) Unicité : Si $\mathcal{S}$ est une sphère solution du problème, son centre est à l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ normales aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ passant par les centres $O_1$ et $O_2$ de ces cercles.
Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, cette intersection est vide ou réduite à un point, d'où l'unicité.
Existence : Notons $\mathcal{P}$ le plan médiateur du segment $[A, B]$. Le plan $\mathcal{P}$ est perpendiculaire aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, de plus $O_1, O_2 \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{P}$. De plus ces droites ne sont pas parallèles, elles s'intersectent donc en un point $\Omega$.
La sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega$ et de rayon $\Omega A$ est solution du problème posé.

**Exercice 31 :** [énoncé]
Si $M$ a pour coordonnées cylindriques $(\rho, \varphi, z)$ alors $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$.
$r = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\varphi$ et $\theta = \begin{cases} \arccos \dfrac{z}{r} \text{ si } M \neq O \\ \text{quelconque sinon} \end{cases}$ forment un système de coordonnées sphériques de $M$.
Si $M$ a pour coordonnées sphériques $(r, \varphi, \theta)$ alors
$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = r(\cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{u}_\rho)$ donc
$\rho = r\sin\theta$, $\varphi$ et $z = r\cos\theta$ forment un système de coordonnées cylindriques de $M$.

Guesmi.B

# Chapitre : Géométrie de l'espace

Dans tout ce chapitre, $\mathscr{E}$ représentera l'espace affine euclidien ambiant et $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. On rappelle que l'angle entre deux vecteurs est celui considéré dans un plan contenant ces deux vecteurs. Il n'est défini qu'au signe près et dépend de l'orientation du plan. Nous verrons qu'orienter un plan sera un choix arbitraire. Donc la notion d'angle orienté dans l'espace n'est pas optimale.

## I) Modes de repérage

### a) Repères cartésiens

Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace. On admet que tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ s'écrit de façon unique

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

**Définition 1.** Un **repère cartésien** de $\mathscr{E}$ est un quadruplet $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où $O$ est un point et $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires, appelés vecteurs de base.

Pour tout $M \in \mathscr{E}$, les coordonnées de $M$ dans $\mathscr{R}$ sont les coordonnées $(x, y, z)$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base du repère et on notera $M = (x, y, z)_{\mathscr{R}}$.

#### Repères orthonormés

Un repère $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est dit orthonormé si les trois vecteurs de base sont unitaires et orthogonaux deux à deux. Nous verrons plus tard comment exprimer les coordonnées dans un repère orthonormé à l'aide du produit scalaire. Pour passer d'un repère orthonormé à un autre, il faut appliquer une transformation géométrique, appelée isométrie. Elles seront étudiées dans un chapitre ultérieur.

#### Orientations de $\mathscr{E}$ et d'un plan

Orienter l'espace, c'est choisir un sens positif de vissage. Il y a donc deux manières d'orienter $\mathscr{E}$. On dira que $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est direct si en tournant de $\overrightarrow{i}$ vers $\overrightarrow{j}$, on avance dans le sens de $\overrightarrow{k}$. Pour passer d'un repère orthonormé direct à un autre, il faut appliquer un déplacement. On verra dans un autre chapitre qu'un déplacement est soit une translation, soit une rotation, soit un vissage (composée d'une rotation et d'une translation). On pourra calculer l'expression analytique de ces transformations géométriques et en déduire les formules de changement de repère.

Soit $\mathscr{P}$ un plan. Pour l'orienter, il suffit de choisir un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de ce plan et une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathscr{P}$ sera directe si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ est une base directe de l'espace. On dit qu'on a **orienté le plan $\mathscr{P}$ par le vecteur normal $\overrightarrow{n}$**. Donc orienter un plan revient à orienter la direction orthogonale au plan.

On supposera dans la suite que $\mathscr{E}$ est orienté et est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

### b) Coordonnées cylindriques

On oriente le plan de coordonnées $(xOy)$ par le vecteur $\overrightarrow{k}$. Soit $M$ un point et $H$ son projeté orthogonal sur $(xOy)$. Soient $(r, \theta)$ des coordonnées polaires de $H$ dans le plan $(xOy)$. Dans ces conditions, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\overrightarrow{u}(\theta) + z\overrightarrow{k}$, donc

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}}$$

et on dit que $(r, \theta, z)$ sont des **coordonnées cylindriques** de $M$ dans le repère $\mathscr{R}$.

### c) Coordonnées sphériques

On oriente le plan de coordonnées $(xOy)$ par le vecteur $\overrightarrow{k}$. Soit $M$ un point et $H$ son projeté orthogonal sur $(xOy)$. On pose $r = OM$ et $\varphi = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH})$ pour $H \neq O$. Soit $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\theta = ((OM), (Oz))$. Si $M \in (Oz)$, alors $\varphi$ est quelconque. Dans ces conditions, $\overrightarrow{OH} = r\sin\theta\overrightarrow{u}(\varphi)$ et $\overrightarrow{HM} = r\cos\theta\overrightarrow{k}$, donc

$$\boxed{\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}}$$

On dit que $(r, \theta, \varphi)$ sont des **coordonnées sphériques** de $M$ dans le repère $\mathscr{R}$. L'angle $\varphi$ est la **longitude**, l'angle $\theta$ la **colatitude** et l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la **latitude**.

## II) Outils calculatoires

### a) Produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Ils appartiennent nécessairement à un même plan $\mathscr{P}$. On définit le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par le produit scalaire des deux vecteurs dans le plan $\mathscr{P}$ :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, \\ \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit quelques remarques.

- Le plan $\mathscr{P}$ est unique sauf si les deux vecteurs sont colinéaires, mais dans de cas-là, l'angle ne dépend pas du plan choisi car il vaut 0 si les deux vecteurs sont de même sens et $\pi$ sinon.
- La définition ne dépend pas de l'orientation du plan $\mathscr{P}$ car cos est paire.
- Les propriétés du produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que celui dans un plan.
- La seule différence est l'expression du produit scalaire dans une base orthonormale. Soient $(x, y, z)$ les cordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $(x', y', z')$ celles de $\overrightarrow{v}$ dans une base orthonormale. Alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

## b) Produit vectoriel

**Définition 2.** Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires,} \\ (\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \, |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|) \, \overrightarrow{n} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ soit un trièdre direct.

Cette définition dépend de l'orientation choisie. En inversant l'orientation, le produit vectoriel change de sens.

Guesmi.B

**Propriétés.** Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^3$.

1. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
2. $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \, |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$ = aire du parallélogramme formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
3. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
4. Le produit vectoriel est antisymétrique, *i.e.* $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
5. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs unitaires et orthogonaux. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormale directe si, et seulement si, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
6. On admet la bilinéarité du produit vectoriel.
7. **Expression dans une base orthonormale directe.** Soient $(x, y, z)$ et $(x', y', z')$ les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans cette base sont :
$$(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') = \left( \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & y' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right).$$
8. $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2$.

## c) Déterminant

**Définition 3.** On appelle **produit mixte** ou **déterminant** des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ le nombre

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}.$$

Comme le produit vectoriel, cette définition dépend de l'orientation choisie. En inversant l'orientation, on change le signe du déterminant.

**Propriétés.** Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^3$.

1. $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

   **Démonstration.** Le déterminant est nul si, et seulement si, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.
   - Si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et les trois vecteurs sont coplanaires.
   - Si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont situés dans un plan de vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, donc ils sont coplanaires.

   □

2. $|\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$ est le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs.
3. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une base orthonormale. Si elle est directe, alors $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 1$ et si elle est indirecte, alors $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -1$.
4. Det est trilinéaire et antisymétrique.

5. **Expression dans une base orthonormale directe.** Soient $(x, y, z)$, $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$ les coordonnées de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ dans une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. L'expression du déterminant dans cette base est

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - yx'z'' - xz'y''.$$

Cette formule s'appelle **règle de Sarrus**.

Cette dernière formule donne une méthode de calcul du déterminant. Ce n'est pas la seule et il y en a une autre plus simple qui se déduit des propriétés suivantes.

- Échanger les lignes avec les colonnes du tableau ne modifie pas la valeur du déterminant.
- Ajouter à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) ne modifie pas la valeur du déterminant.
- Échanger deux colonnes ou deux lignes changent le signe du déterminant.
- Multiplier une colonne ou une ligne par un même scalaire $\lambda$ multiplie le déterminant par ce scalaire $\lambda$.
- **Développement suivant la première colonne.**

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

En général, on utilisera la deuxième propriété pour faire apparaître deux zéros dans la même ligne ou colonne, puis on développe suivant cette rangée. Grâce aux deux zéros, il n'y a qu'un seul terme. Cette technique permet de factoriser un déterminant, ce qui rend plus facile l'étude de sa nullité lorsqu'il dépend de paramètres réels.

# III) Droites et Plans

## a) Représentations paramétriques

- Soit $D$ la droite passant par le point $A = (x_0, y_0, z_0)_{\mathscr{R}}$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (a, b, c)_{\mathscr{R}}$. Soit $M = (x, y, z)_{\mathscr{R}} \in \mathscr{E}$.

$$M \in D \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u},$$
$$M \in D \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda a, \\ y = y_0 + \lambda b, \\ z = z_0 + \lambda c. \end{cases}$$

- Soit $P$ le plan passant par le point $A = (x_0, y_0, z_0)_{\mathscr{R}}$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (a, b, c)_{\mathscr{R}}$ et $\overrightarrow{v} = (a', b', c')_{\mathscr{R}}$. Soit $M = (x, y, z)_{\mathscr{R}} \in \mathscr{E}$.

$$M \in P \iff \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v},$$
$$M \in D \iff \exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a', \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b', \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c'. \end{cases}$$

On a ainsi obtenu un système d'équations paramétriques de $D$ et $P$.

## b) Équations cartésiennes des plans

Soit $P$ un plan passant par le point $A = (x_0, y_0, z_0)_{\mathscr{R}}$.

– Si $P$ est déterminé par un couple de vecteurs directeurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, alors

$$M \in P \iff \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v},$$
$$M \in P \iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0.$$

En développant le déterminant, on obtient une équation cartésienne de la forme $ax + by + cy = d$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ car ce sont les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Pour tout réel $k$, l'équation $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = k$ représente un plan dirigé par le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soit $\overrightarrow{U} = (X, Y, Z)_{\mathscr{R}}$ un vecteur. Notons $\overrightarrow{P}$ l'ensemble des vecteurs directeurs de $P$, appelé **direction** de $P$.

$$\overrightarrow{U} \in \overrightarrow{P} \iff \overrightarrow{U},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ sont coplanaires},$$
$$\overrightarrow{U} \in \overrightarrow{P} \iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0.$$

En développant le déterminant, on obtient nécessairement l'équation $aX + bY + cZ = 0$ avec les mêmes $a$, $b$, $c$. On en déduit que deux plans admettent des équations cartésiennes dont les coefficients devant les coordonnées sont proportionnels si, et seulement si, ils sont parallèles.

– Si $P$ est déterminé par un vecteur normal $\overrightarrow{n} = (a, b, c)_{\mathscr{R}}$ (on peut prendre $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$), alors

$$M \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0,$$
$$M \in P \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

On obtient une équation de la forme $ax + by + cy = d$. La réciproque est vraie. Une telle équation signifie que $\overrightarrow{n} = (a, b, c)_{\mathscr{R}}$ est un vecteur normal du plan. On en déduit également qu'un plan n'admet qu'une seule équation cartésienne à un coefficient multiplicateur non nul près. Pour tout réel $k$, l'équation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = k$ représente un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

## c) Intersection de deux plans

**Définition 4.** Deux plans sont dits **perpendiculaires** si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

**Théorème 1.** *Soient $P_1$ et $P_2$ deux plans non parallèles et $\overrightarrow{n}_i$ un vecteur normal de $P_i$. L'intersection des deux plans est une droite dirigée par $\overrightarrow{n}_1 \wedge \overrightarrow{n}_2$.*

**Démonstration.** Montrons dans un premier temps que $P_1 \cap P_2$ n'est pas vide. Soient $\overrightarrow{n}_i = (a_i, b_i, c_i)_{\mathscr{R}}$ et $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$ une équation de $P_i$.

$$M \in P_1 \cap P_2 \iff \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2. \end{cases}$$

En fixant l'une des trois inconnues de ce système, on obtient un système à deux équations et deux inconnues dont le déterminant est une coordonnée de $\overrightarrow{n}_1 \wedge \overrightarrow{n}_2$. Or ce produit vectoriel est non nul car les deux plans sont non parallèles, donc l'un de ces trois "petits" systèmes est de Cramer et admet une unique solution. On en déduit que les deux plans se coupent.

Montrons maintenant que cette intersection est une droite. Soit $A \in P_1 \cap P_2$.

$$M \in P_1 \cap P_2 \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}_1 \text{ et } \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}_2,$$
$$M \in P_1 \cap P_2 \iff \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{n}_1 \wedge \overrightarrow{n}_2.$$

On en déduit que $P_1 \cap P_2$ est la droite passant par $A$ dirigée par $\overrightarrow{n}_1 \wedge \overrightarrow{n}_2$. □

Comme toute droite peut s'interpréter comme l'intersection de deux plans, une droite admet un système d'équations cartésiennes du type

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \end{cases}$$

où $(a_1, b_1, c_1)$ et $(a_2, b_2, c_2)$ ne sont pas proportionnels et un vecteur directeur de la droite est le résultat du produit vectoriel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

## d) Intersection d'un plan avec une droite

**Définition 5.** Une droite est parallèle à un plan si tout vecteur directeur de la droite est dans la direction du plan.

**Théorème 2.** *Soient $D$ une droite et $P$ un plan.*

1. *Si $D$ est parallèle à $P$, alors $D$ est soit contenue dans $P$, soit disjointe de $P$.*
2. *Si $D$ est non parallèle à $P$, alors $D$ et $P$ se coupent en un unique point.*

**Démonstration.**

1. Si $D$ est parallèle à $P$ et si $D$ et $P$ sont sécants, alors $D$ est entièrement incluse dans $P$ car dans ces conditions, $P$ contient un point de $D$ et sa direction possède tous les vecteurs directeurs de $D$.
2. Si $D$ est non parallèle à $P$, soient $A \in D$, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $D$, $B \in P$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $P$. Pour tout point $M$,

$$M \in D \cap P \iff \begin{cases} \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{n} = 0, \end{cases}$$

$$M \in D \cap P \iff \begin{cases} \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}, \\ (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{n} = 0, \end{cases}$$

$$M \in D \cap P \iff \begin{cases} \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}, \\ \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}) = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n}. \end{cases}$$

Or $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas orthogonaux, car $D$ n'est pas parallèle à $P$, donc

$$M \in D \cap P \iff \begin{cases} \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}, \\ \lambda = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}}. \end{cases}$$

On trouve une seule valeur à $\lambda$, donc le plan et la droite se coupent en un seul point.

□

**Corollaire 2.1.** *Le système à trois équations et trois inconnues*

$$(\Sigma) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

*admet une unique solution si, et seulement si, le déterminant*

$$\mathrm{Det}(\Sigma) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

*est non nul. De plus dans ce cas, la solution est donnée par les formules de Cramer.*

## e) Distance d'un point à un plan ou à une droite

**Définition 6.** Soient $M$ un point et $F$ un plan ou une droite. La distance de $M$ à $F$ est la plus petite distance entre $M$ et un point de $F$. On la note $d(M, F)$.

**Proposition 1.** *Soit $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $F$. Alors $d(M, F) = MH$ et pour tout point $N \in F$, $MN \geqslant d(M, F)$ et $MN = d(M, F) \iff N = H$.*

**Proposition 2** (Calcul de la distance entre un point et un plan)**.** *Soit $P$ un plan.*

- *Soient $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $P$ et $A \in P$.*

$$d(M, P) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

Guesmi.B

- *Soient $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base de $P$ et $A \in P$.*

$$d(M, P) = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}.$$

- *Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $P$ et $M = (x_0, y_0, z_0)_{\mathscr{R}}$, alors*

$$d(M, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Proposition 3** (Calcul de la distance entre un point et une droite)**.** *Soient $D$ une droite, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $D$ et $A \in D$.*

$$d(M, D) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

## f) Perpendiculaire commune

**Définition 7.** Deux droites sont dites orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux et elles sont dites perpendiculaires si, en plus, elles sont sécantes.

**Théorème 3.** *Soient $D_1$ et $D_2$ deux droites non parallèles. Il existe une unique droite $\Delta$ perpendiculaire à $D_1$ et $D_2$. On l'appelle* ***perpendiculaire commune*** *de $D_1$ et $D_2$.*

**Démonstration.** Soient $\overrightarrow{u}_i$ un vecteur directeur de $D_i$ et $a_i \in D_i$. Remarquons que si $\Delta$ existe, alors elle dirigée par un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$, donc $\Delta$ est dirigée par $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2$ ($\overrightarrow{w}$ est non nul car les deux droites ne sont pas parallèles). De plus $\Delta$ appartient au plan $P_i$ passant par $A_i$ et dirigée par la base $(\overrightarrow{u}_i, \overrightarrow{w})$. Ces deux plans ne sont pas parallèles car sinon les trois vecteurs $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{w}$ seraient coplanaires ce qui est absurde. Par conséquent, nécessairement, $\Delta = P_1 \cap P_2$ et $\Delta$ est unique.

Pour l'existence, reprenons les deux plans $P_1$ et $P_2$ et posons $\Delta = P_1 \cap P_2$. Étant donné que les deux plans ne sont pas parallèles, $\Delta$ est une droite. Sa direction est l'intersection des directions des deux plans, donc $\Delta$ est dirigée par $\overrightarrow{w}$, donc $\Delta$ est orthogonale à $D_1$ et $D_2$. De plus $D_i$ et $\Delta$ appartiennent à $P_i$, *i.e.* elles sont coplanaires et elles se coupent car non parallèles. Par conséquent, $\Delta$ est perpendiculaire à la fois à $D_1$ et à $D_2$. □

**Exemple.** $D_1 = (O; \overrightarrow{u}_1 = (1, 1, 0)_{\mathscr{R}})$ et $D_2 : \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$