FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS

Guesmi.B

Ce chapitre ne traite que des "fonctions numériques de la variable réelle", c'est-à-dire des fonctions définies sur tout ou une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Les notions de parité, d'extremums et de sens de variation ont déjà été abordées en classe de seconde.

1. Ensemble de définition d'une fonction

Définition 1

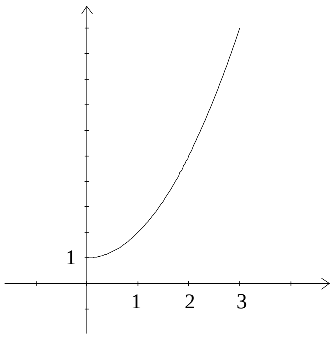
Définir une fonction (ou une application) f sur un ensemble de réels D, c'est **associer** à tout réel x de D **un réel et un seul** noté $f(x)$.

Remarque : à notre niveau, D sera toujours un intervalle ou une (ré)union d'intervalles.

Exemples :

- La fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = x^2 + 1$.

  Ici, la représentation graphique[1] de f ne sera qu'un morceau de parabole :

  On note encore :

  $$f : [0 ; 3] \to \mathbb{R}$$
  $$x \mapsto x^2 + 1$$

- La fonction $g : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$

  $$x \mapsto \sqrt{x}$$

  Remarquer que l'on ne peut pas définir g sur un ensemble plus grand.

Définition 2

L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble de **tous** les réels x pour lesquels $f(x)$ est calculable.

Exemples :

- Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

  Son ensemble de définition est $D_f =]-1 ; +\infty[$ puisque $f(x)$ n'est calculable que lorsque $x + 1 > 0$.

- Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$. La fonction g est définie lorsque $x \neq -1$ et $4 - x^2 \geqslant 0$.

  On résout l'inéquation $4 - x^2 \geqslant 0$ en la factorisant ($(2 - x)(2 + x) \geqslant 0$) puis à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(2 - x)(2 + x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  L'ensemble des solutions de l'inéquation $4 - x^2 \geqslant 0$ est donc $S = [-2 ; 2]$. Et, tenant compte de la condition $x \neq -1$, il vient : $D_g = [-2 ; -1[\cup]-1 ; 2]$.

[1] La représentation graphique dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie sur un ensemble D est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ pour $x \in D$.

2. Comparaison de fonctions

Définition 3

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies au moins sur D.

On dit que les fonctions f et g sont égales sur D si : $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D$

On note alors simplement : $f = g$ sur D.

Exemples :

Considérons les fonctions f, g et h définies par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$

On a : $f = g$ sur $\mathbb{R}$, $f = h$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g = h$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : attention ! Ne pas faire de simplification abusives dans les expressions de fonctions :

Les fonctions f et g définies par :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(x-5)(x+2)}{x-5} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 2$$

ne sont pas égales sur $\mathbb{R}$ (puisque f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$). Mais elles sont égales sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. (Car, si $x \neq 5$, on peut simplifier par $x - 5$ dans l'expression de $f(x)$)

Définition 4

Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies au moins sur I. On dit que :

- f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$. On note : $f \leqslant g$ sur I.
- f est positive sur I lorsque : $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. On note : $f \geqslant 0$ sur I.
- f est majorée sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$.
- f est minorée sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m \leqslant f(x)$ pour tout $x \in I$.
- f est bornée sur I lorsqu'il existe des réels M et m tels que : $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. (f est majorée et minorée)

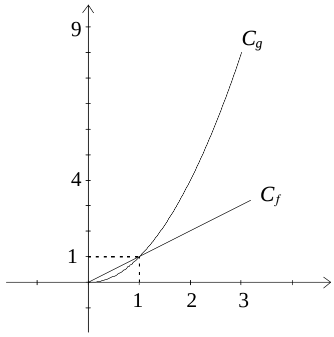
Remarque : la relation d'ordre pour les fonctions n'est pas totale ; en ce sens que deux fonctions ne sont pas toujours comparables (voir exemple ci-dessous)

Exemples :

1) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Comparer f et g...

Les fonctions f et g ne sont pas comparables sur $\mathbb{R}_+$. En effet :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) \ \text{(puisque } \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{4}\text{)} \ \text{ mais } \ f(2) \leqslant g(2) \ \text{(puisque } 2 \leqslant 4\text{)}$$



Cependant, on a : $f \geqslant g$ sur $[0 ; 1]$ et $f \leqslant g$ sur $[1 ; +\infty[$.

Ceci se prouve en étudiant le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1 - x)$$

Tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
Signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de $1 - x$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x) - g(x)$	0	$+$	0	$-$	

On a donc bien : $f(x) - g(x) \geqslant 0$ lorsque $x \in [0 ; 1]$ et $f(x) - g(x) \leqslant 0$ lorsque $x \in [1 ; +\infty[$.

Autrement dit : $x \geqslant x^2$ lorsque $x \in [0 ; 1]$ et $x \leqslant x^2$ lorsque $x \in [1 ; +\infty[$.

Moralité : un nombre A n'est pas toujours inférieur à son carré A^2...

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 - x)$. Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{4}$.

Là encore, on étudie le signe de la différence : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{4} - f(x) = \frac{1}{4} - x(1 - x) = \frac{1}{4} - x + x^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

Et comme, $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit : $\frac{1}{4} \geqslant f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f est donc bien majorée par $\frac{1}{4}$. (Et $\frac{1}{4}$ est le plus petit des majorants de f (autrement dit : $\frac{1}{4}$ est un maximum de f) puisque pour $x = \frac{1}{2}$, ce majorant est atteint)

3) Démontrer que la fonction φ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = 4\sin t - 3$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

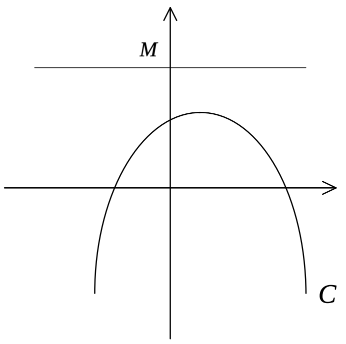
Cette fois-ci, on utilise le fait que : $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En multipliant cet encadrement par 4, puis en soustrayant 3, on obtient : $-7 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La fonction φ est donc bien bornée sur $\mathbb{R}$.

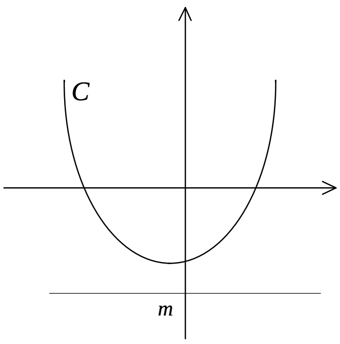
<u>INTERPRÉTATIONS GRAPHIQUES</u> :

f est majorée (sur $\mathbb{R}$)



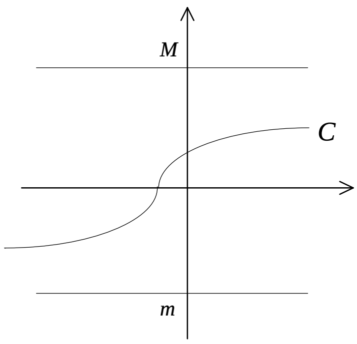
La courbe C est en dessous d'une certaine droite horizontale

f est minorée (sur $\mathbb{R}$)



La courbe C est au dessus d'une certaine droite horizontale

f est bornée (sur $\mathbb{R}$)



La courbe C est contenue dans une bande horizontale

Propriété

Soit f une fonction monotone sur un intervalle $I = [a ; b]$. Alors f est bornée.

Démonstration :

Supposons f croissante sur $[a ; b]$. (Le cas "f décroissante" se traite de manière analogue)

Soit $x \in [a ; b]$. On a donc $a \leqslant x \leqslant b$.

Et comme f est croissante, elle conserve les inégalités, d'où : $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

Les nombres $f(x)$ sont encadrés par $f(a)$ et $f(b)$ pour tous $x \in [a ; b]$. Autrement dit, f est bornée.

3. Composition de fonctions

Voir fiche ci-après.

4. Sens de variation d'une fonction

Définition 5

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non)

Soit f une fonction définie au moins sur I. On dit que :

- f est croissante sur I si : pour tous u et v dans I : $\boldsymbol{u < v \Rightarrow f(u) \leqslant f(v)}$
- f est strictement croissante sur I si : pour tous u et v dans I : $\boldsymbol{u < v \Rightarrow f(u) < f(v)}$
- f est décroissante sur I si : pour tous u et v dans I : $\boldsymbol{u < v \Rightarrow f(u) \geqslant f(v)}$
- f est strictement décroissante sur I si : pour tous u et v dans I : $\boldsymbol{u < v \Rightarrow f(u) > f(v)}$
- f est monotone sur I si f est croissante sur I ou décroissante sur I.
- f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Remarques :

- ces notions ne sont valables que sur un intervalle
- on dit parfois que f est croissante si elle conserve les inégalités et que f est décroissante si elle renverse les inégalités.

Le sens de variation des fonctions suivantes est à connaître parfaitement :

$$x \mapsto ax + b \qquad x \mapsto x^2 \qquad x \mapsto x^3 \qquad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \sqrt{x}$$

Exemple 1 : **où l'on utilise le sens de variation des fonctions usuelles**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{5-2x}} + 2$.

La fonction f est définie pour $5 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < \dfrac{5}{2}$.

Son ensemble de définition est donc $D_f = \left]-\infty ; \dfrac{5}{2}\right[$.

En traçant la courbe représentant f sur une calculatrice, il semble que f soit strictement décroissante sur D_f. Prouvons le :

Soient u et v des réels quelconques de $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[$ tels que :

$$u < v$$

La fonction $x \longmapsto 5 - 2x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient directeur négatif) donc

$$5 - 2u > 5 - 2v$$

Les réels $5 - 2u$ et $5 - 2v$ sont strictement positifs puisque u et v sont éléments de $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[$.

Or, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\sqrt{5-2u} > \sqrt{5-2v}$$

Les réels $\sqrt{5-2u}$ et $\sqrt{5-2v}$ sont strictement positifs (puisque $5 - 2u$ et $5 - 2v$ le sont). Or, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ donc :

$$\frac{1}{\sqrt{5-2u}} < \frac{1}{\sqrt{5-2v}}$$

En multipliant par -3, qui est un nombre négatif :

$$\frac{-3}{\sqrt{5-2u}} > \frac{-3}{\sqrt{5-2v}}$$

Et enfin en ajoutant 2 :

$$\frac{-3}{\sqrt{5-2u}} + 2 > \frac{-3}{\sqrt{5-2v}} + 2$$

C'est-à-dire : $$f(u) > f(v)$$

Bilan : on a montré que, pour tous réels u et v de $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[$: $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$

La fonction f est donc bien strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{5}{2}\right[$.

<u>Exemple 2</u> : **où l'on utilise la parité des fonctions**

Soit f une fonction paire (i.e. D_f est un ensemble centré en 0, et pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$).

Notons $D_f^+ = \{x \in D_f$ tels que $x \geqslant 0\}$ et $D_f^- = \{x \in D_f$ tels que $x \leqslant 0\}$.

Supposons : f est strictement croissante sur D_f^+

Alors f est strictement décroissante sur D_f^-. En effet, soient u et v des réels quelconques de D_f^- tels que :

$$u < v$$

En multipliant par -1 : $$-u > -v$$

Les réels $-u$ et $-v$ sont des éléments de D_f^+. Comme f est strictement croissante sur D_f^+, on a :

$$f(-u) > f(-v)$$

Et comme f est paire : $$f(u) > f(v)$$

Bilan : on a montré que, pour tous réels u et v de D_f^- : $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$

La fonction f est donc bien strictement décroissante sur D_f^-.

On montre, de même, que :

f paire et strictement décroissante sur $D_f^+ \Rightarrow f$ strictement croissante sur D_f^-.

f impaire et strictement croissante sur $D_f^+ \Rightarrow f$ strictement croissante sur D_f^-.

f impaire et strictement décroissante sur $D_f^+ \Rightarrow f$ strictement décroissante sur D_f^-.

Exemple 3 : **où l'on utilise les règles de calcul algébrique**

Remarque : on peut retrouver le sens de variation de la fonction $x \longmapsto x^4$ en composant la fonction carrée avec elle même et en utilisant le théorème sur le sens de variation d'une composée.

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4$.

Soient u et v des réels quelconques de $[0 ; +\infty[$ tels que : $u < v$.

On sait, par ailleurs, que : $u^4 - v^4 = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) = (u - v)(u + v)(u^2 + v^2)$

Or, par hypothèse : $u - v < 0$, $u + v > 0$, $u^2 + v^2 > 0$. Donc $u^4 - v^4 < 0$, c'est-à-dire $f(u) < f(v)$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

En outre, f est paire (car définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^4 = x^4$), donc (cf exemple 2), f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Exercice : étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ pour $x \in]0 ; +\infty[$.

(On pourra montrer que : $$f(v) - f(u) = (v - u)\left(1 - \frac{1}{uv}\right)$$

et discuter suivant que u et v sont dans $]0 ; 1]$ ou dans $[1, +\infty[$)

On verra, lors du chapitre sur la dérivation, une autre méthode pour étudier le sens de variation d'une fonction.

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies au moins sur le même intervalle I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si f et g sont croissantes (resp. décroissante) sur I alors la fonction $f + g$ est croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si f est croissante sur I et $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$) alors la fonction λf est croissante (resp. décroissante) sur I.

Remarque : le théorème est valable avec des fonctions strictement monotones.

Démonstration :

Soient u et v des éléments de I tels que $u < v$.

- Supposons f et g croissantes sur I. On a donc $f(u) \leqslant f(v)$ et $g(u) \leqslant g(v)$.

  En additionnant membre à membre : $f(u) + g(u) \leqslant f(v) + g(v)$. D'où le résultat.
- Enfin l'inégalité $f(u) \leqslant f(v)$ devient $\lambda f(u) \leqslant \lambda f(v)$ si $\lambda > 0$ et $\lambda f(u) \geqslant \lambda f(v)$ si $\lambda < 0$ d'où le résultat.

Exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x + 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque les fonctions $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto 3x + 2$ le sont.

Attention : il n'y a pas de règle aussi simple pour le produit de deux fonctions. En effet, suivant le cas, le produit de deux fonctions croissantes peut être une fonction croissante mais aussi une fonction décroissante. En effet, considérons les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto x^3$. On sait que f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$. Or, la fonction produit fg est définie sur $\mathbb{R}$ par $fg(x) = x^4$ est (voir exemple 3 ci-dessus) croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0]$...

Exercice : soient f et g deux fonctions positives et croissantes sur un intervalle I. Démontrer que la fonction produit fg est croissante sur I.

Solution : soient x et y dans I tels que $x < y$.

Comme f et g sont croissantes et positives sur I on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant f(y) \qquad [1]$$

et

$$0 \leqslant g(x) \leqslant g(y) \qquad [2]$$

Multiplions [1] par $g(x)$ (qui est une quantité positive) :

$$0 \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(y)g(x) \qquad [3]$$

Multiplions [2] par $f(y)$ (qui est une quantité positive) :

$$0 \leqslant g(x)f(y) \leqslant f(y)g(y) \qquad [4]$$

En utilisant la transitivité des inégalités, [3] et [4] donnent :

$$0 \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y)$$

C'est-à-dire : $$0 \leqslant fg(x) \leqslant fg(y)$$

Ce qui prouve que la fonction fg est croissante sur I.

5. Fonctions associées du type $x \longmapsto f(x) + k$, $x \longmapsto f(x + \lambda)$, $x \longmapsto -f(x)$ et $x \longmapsto f(-x)$

Théorème

Soit C_f la représentation graphique d'une fonction f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- La courbe C_g représentant la fonction g définie par $g(x) = f(x) + k$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $k\,\vec{j}$.
- La courbe C_h représentant la fonction h définie par $h(x) = f(x + \lambda)$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $-\lambda\,\vec{i}$.
- La courbe C_k représentant la fonction k définie par $k(x) = -f(x)$ est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe (Ox) des abscisses.
- La courbe C_l représentant la fonction l définie par $l(x) = f(-x)$ est l'image de C_f par la symétrie par rapport à l'axe (Oy) des ordonnées.

Attention, f et h n'ont pas le même ensemble de définition en général. De même pour f et l.

Exemples :

Soit f la fonction "racine carrée" ($f : x \mapsto \sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$) et C_f sa représentation graphique dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Représenter les fonctions g, h et k définies par $g(x) = \sqrt{x} + 3$; $h(x) = \sqrt{x-2}$; $k(x) = -\sqrt{x}$ et $l(x) = \sqrt{-x}$

On précisera également l'ensemble de définition de chacune de ces quatre fonctions.

Démonstration du théorème :

- Soit $x \in D_f$. Soient M et M' les points de C_f et C_g d'abscisses x. On a donc :

  $$M(x ; f(x)) \text{ et } M'(x ; f(x) + k)$$

  On a alors : $\overrightarrow{MM'} \begin{vmatrix} 0 \\ k \end{vmatrix}$

  On constate que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est indépendant de x et que $\overrightarrow{MM'} = k\vec{j}$.

  Donc, pour tout point M de C_f abscisse x, le point M' de C_g d'abscisse x est tel que : $M' = t_{k\vec{j}}(M)$.

  La courbe C_g est donc bien l'image de C_f par la translation de vecteur $k\vec{j}$.

- Soit $x \in D_f$. Soit M le point de C_f d'abscisse x. On a donc : $M(x ; f(x))$

  La fonction h est définie en $x - \lambda$ puisque $h(x - \lambda) = f(x - \lambda + \lambda) = f(x)$.

  Soit M' le point de C_h abscisse $x - \lambda$. Ainsi : $M'(x - \lambda ; f(x))$

  On a alors : $\overrightarrow{MM'} \begin{vmatrix} -\lambda \\ 0 \end{vmatrix}$

  On constate que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est indépendant de x et que $\overrightarrow{MM'} = -\lambda\vec{i}$.

  Donc, pour tout point M de C_f abscisse x, le point M' de C_h d'abscisse $x - \lambda$ est tel que : $M' = t_{-\lambda\vec{i}}(M)$.

  La courbe C_h est donc bien l'image de C_f par la translation de vecteur $-\lambda\vec{i}$.

- Soit $x \in D_f$. Soient M et M' les points de C_f et C_k d'abscisses x. On a donc :

  $$M(x ; f(x)) \text{ et } M'(x ; -f(x))$$

  Soit I le milieu de $[MM']$. Les coordonnées de I sont : $I(x ; 0)$. Le point I est donc sur l'axe des abscisses.

  Donc, pour tout point M de C_f abscisse x, le point M' de C_k d'abscisse x est tel que : $M' = s_{(Ox)}(M)$.

  La courbe C_k est donc bien l'image de C_f par la symétrie par rapport à (Ox)

- Soit $x \in D_f$. Soit M le point de C_f d'abscisse x. On a donc : $M(x ; f(x))$

  La fonction l est définie en $-x$ puisque $l(-x) = f(x)$.

  Soit M' le point de C_l abscisse $-x$. Ainsi : $M'(-x ; f(x))$

  Soit I le milieu de $[MM']$. Les coordonnées de I sont : $I(0 ; f(x))$. Le point I est donc sur l'axe des ordonnées.

  Donc, pour tout point M de C_f abscisse x, le point M' de C_l d'abscisse $-x$ est tel que : $M' = s_{(Oy)}(M)$.

  La courbe C_l est donc bien l'image de C_f par la symétrie par rapport à (Oy).