COURS DE MATHEMATIQUES

Les fonctions réelles

Périodicité

Ce cours porte exclusivement sur la notion de périodicité relative aux fonctions réelles.

1 L'idée générale

Une fonction réelle est un opérateur qui associe automatiquement à un nombre réel, appelé antécédent, un autre nombre réel, appelé image.
Une fonction est telle qu'un antécédent n'a qu'une seule image, mais qu'une image peut avoir plusieurs antécédents.

2 La théorie

2.1 La périodicité

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble de définition D (voir le cours "**Les fonctions réelles - Intervalles et ensemble de définition**").
f est une fonction **périodique** de période $T \in \mathbb{R}$ lorsque
$\forall x \in D$, $x - T \in D$, $x + T \in D$, et $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Guesmi.B

2.2 L'interprétation graphique de la périodicité

Soit le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
La courbe représentative (voir le cours "**Les fonctions réelles - Représentation graphique**") d'une fonction périodique est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

3 Attention !

Il peut arriver que l'étude de la périodicité aboutisse à plusieurs valeurs (voir l'exercice 4 par exemple). Dans ce cas, la période correspond au PPMC (plus petit multiple commun) de ces valeurs.

4 Par cœur

La fonction cosinus $f : x \mapsto \cos x$ est périodique de période 2π.
La fonction sinus $f : x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π.
La fonction tangente $f : x \mapsto \tan x$ est périodique de période π.

5 Les astuces

L'intérêt que représente la périodicité d'une fonction réside dans la restriction de son intervalle d'étude. Une fonction f de période T ne nécessite en effet d'être étudiée que sur un intervalle de longueur T.
Soit C_T la courbe représentative de f restreinte à son intervalle d'étude de longueur T. La courbe représentative C_f de f est alors obtenue en adjoignant à C_T les portions $C_{k,k\in\mathbb{Z}}$ où k décrit $\mathbb{Z}$ et où $C_{k,k\in\mathbb{Z}}$ est l'image de C_T par la translation de vecteur $kT\vec{i}$.

6 Exercices théoriques

6.1 Exercice 1

Etudier la périodicité de la fonction $f : x \mapsto \cos(ax)$.

Avant de s'intéresser au sens de variation, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$.

La méthode consiste à calculer $f(x+T)$, puis à déterminer T de telle sorte que $f(x+T) = f(x)$.

$$f(x+T) = \cos[a(x+T)]$$
$$f(x+T) = \cos(ax+aT)$$
$$f(x+T) = \cos(ax)\cos(aT) - \sin(ax)\sin(aT)$$

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(ax)\cos(aT) - \sin(ax)\sin(aT) = \cos(ax)$$

Pour vérifier l'égalité $f(x+T) = f(x)$, il faut donc déterminer T de telle sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos(aT) & = & 1 \\ \sin(aT) & = & 0 \end{array} \right.$$

Sur la base des propriétés des fonctions cosinus et sinus (qui doivent être connues), il s'agit de trouver T tel que $aT = 2\pi$.

$$aT = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{a}$$

La période de f est donc $T = \frac{2\pi}{a}$.

6.2 Exercice 2

Etudier la périodicité de la fonction $f : x \mapsto a\sin(\omega x + \varphi)$, où ω est un réel strictement positif, et $(a;\varphi) \in \mathbb{R}$ (f correspond par exemple à l'intensité d'un courant alternatif sinusoïdal).

Avant de s'intéresser au sens de variation, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$.

La méthode consiste à calculer $f(x+T)$, puis à déterminer T de telle sorte que $f(x+T) = f(x)$.

$$f(x+T) = a\sin[\omega(x+T) + \varphi]$$
$$f(x+T) = a\sin(\omega x + \varphi + \omega T)$$
$$f(x+T) = a\sin(\omega x + \varphi)\cos(\omega T) + a\cos(\omega x + \varphi)\sin(\omega T)$$

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow a\sin(\omega x + \varphi)\cos(\omega T) + a\cos(\omega x + \varphi)\sin(\omega T) = a\sin(\omega x + \varphi)$$

Pour vérifier l'égalité $f(x+T) = f(x)$, il faut donc déterminer T de telle sorte que :

$$\begin{cases} \cos(\omega T) & = & 1 \\ \sin(\omega T) & = & 0 \end{cases}$$

Sur la base des propriétés des fonctions cosinus et sinus (qui doivent être connues), il s'agit de trouver T tel que $\omega T = 2\pi$.

$$\omega T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La période de f est donc $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

7 Exercices pratiques

7.1 Exercice 3

Etudier la périodicité de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Avant de s'intéresser au sens de variation, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$.

La méthode consiste à calculer $f(x+T)$, puis à déterminer T de telle sorte que $f(x+T) = f(x)$.

$$f(x+T) = \sin\left[2(x+T) - \frac{\pi}{3}\right]$$
$$f(x+T) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2T\right)$$
$$f(x+T) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos(2T) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\sin(2T)$$

Vérifier l'égalité $f(x+T) = f(x)$ revient alors à résoudre :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos(2T) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\sin(2T) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Par conséquent, il faut déterminer T de telle sorte que :

$$\begin{cases} \cos(2T) & = & 1 \\ \sin(2T) & = & 0 \end{cases}$$

Sur la base des propriétés des fonctions cosinus et sinus (qui doivent être connues), il s'agit de trouver T tel que $2T = 2\pi$.
La période de f est donc $T = \pi$.

7.2 Exercice 4

Etudier la périodicité de la fonction $f : x \mapsto \sin x + \cos(2x)$.

Avant de s'intéresser au sens de variation, il faut s'occuper de l'ensemble de définition de la fonction f. Ici, f est définie sur $\mathbb{R}$.

La méthode consiste à calculer $f(x+T)$, puis à déterminer T de telle sorte que $f(x+T) = f(x)$.

$$f(x+T) = \sin(x+T) + \cos[2(x+T)]$$
$$f(x+T) = \sin(x+T) + \cos(2x+2T)$$
$$f(x+T) = \sin x \cos T + \cos x \sin T + \cos(2x)\cos(2T) - \sin(2x)\sin(2T)$$

Vérifier l'égalité $f(x+T) = f(x)$ revient alors à résoudre :

$\sin x \cos T + \cos x \sin T + \cos(2x)\cos(2T) - \sin(2x)\sin(2T) = \sin x + \cos(2x)$

Par conséquent, il faut déterminer T de telle sorte que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos T & = & 1 \\ \sin T & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \cos(2T) & = & 1 \\ \sin(2T) & = & 0 \end{array}\right.$$

Sur la base des propriétés des fonctions cosinus et sinus (qui doivent être connues), il s'agit de trouver T tel que :

$$T = 2\pi \qquad \text{et} \qquad 2T = 2\pi.$$

La résolution de ce problème fournit le couple de valeurs $(\pi; 2\pi)$. Dans ce cas, la valeur de la période est le PPMC (plus petit multiple commun) des deux valeurs obtenues, c'est-à-dire ici 2π.

La période de f est donc $T = 2\pi$.