Fonction Exponentielle

I. Définition de la fonction exponentielle

Soit (E) l'équation différentielle $f'(x) = f(x)$ avec $f(0) = 1$. On admet qu'il existe une fonction solution de cette equation.

Lemme

Si f est une fonction solution de (E), alors pour tout x, $f(x) \neq 0$.

Propriété et définition :

Il y a une unique fonction solution de (E). Cette solution est appelé fonction exponentielle et est notée $\exp$.

Démonstration :

Soit f une fonction solution de (E) et on pose $g(x) = f(x)f(-x)$

g est défini sur $\mathbb{R}$, dérivable et :

$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)\left(-f'(-x)\right)$

$g'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$

$g'(x) = 0$

donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

$g(0) = f(0) \times f(0) = 1$

Pour tout x réel, $f(x) \times f(-x) = 1$ donc pour tout réel x, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Conséquence :

$(\exp)' = \exp$

$\exp(0) = 1$

$\exp$ est une fonction strictement positive.

La dernière conséquence vient du fait que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) et ne s'annnule pas.

II. Propriété algébrique de l'exponentielle

Propriété 1

Pour tous réels a et b

$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$

Démonstration de la propriété 1 :

Soit la fonction $g(x) = \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = \frac{1 \times \exp(a+x)}{\exp(a)} = g(x)$ et $g(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$

d'où $\frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$ car $\exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$ pour tout réel x

donc $\frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a) \times \exp(x)}{\exp(a)} = \exp(x)$

Propriété 2

Pour tous réels a et b

$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$

$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

$\exp(na) = (\exp a)^n$

Démonstration de la propriété 2 :

- $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

$\exp(a-b) = \exp[a+(-b)] = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- $\exp(na) = (\exp a)^n$ *(On procède par raisonnement par récurrence)*

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$

Pour $n = 2$, $\exp(2a) = \exp(a+a) = \exp(a) \times \exp(a) = [\exp(a)]^2$

Pour $n = 3$

$\exp(3a) = \exp(2a+a) = \exp(2a) \times \exp(a) = [\exp(a)]^2 \times \exp(a) = [\exp(a)]^3$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\exp(na) = [\exp(a)]^n$

$\exp[(n+1)a] = \exp(na+a) = \exp(na) \times \exp(a) = [\exp(a)]^n \times \exp(a) = [\exp(a)]^{n+1}$

Notations simplifiées : $\exp(1) \simeq 2.7182$

e n'est pas rationnel ($e \notin \mathbb{Q}$), il est transcendant et irrationnel.

alors $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp 1)^n = e^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Propriétés

Par extension, si $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ sera noté e^x alors les propriétés vues s'écrivent :

Remarque :

$e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$ donc pour tout réel x, $e^x > 0$

III. Étude de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\exp'(x) = e^x$

La courbe admet une tangente de coefficient directeur 1 au point de coordonnées (0 ; 1) et de coefficient directeur e au point de coordonnées (1 ; e).

Limites de e^x aux bornes de son ensemble de définition

Propriétés

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstrations :

► $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Montrons que pour tout $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant x + 1$

Soit $g(x) = e^x - x$, $g'(x) = e^x - 1$ et pour $x \geqslant 0$ on a $e^x \geqslant e^0 \Rightarrow e^x \geqslant 1$ d'où $g'(x) \geqslant 0$

(g est croissante sur $\mathbb{R}^+$).

x	0	$+\infty$
$g(x)$	1	$\nearrow +\infty$

Pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 1 \Rightarrow e^x - x \geqslant 1$ d'où $e^x \geqslant x + 1 \geqslant x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

► $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Propriétés

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration :

► $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

Montrons d'abord que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Pour cela, on établit que pour $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$

Posons $h(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$, $h'(x) = e^x - x$

x	0	$+\infty$
$h(x)$	1	$\nearrow +\infty$

Pour tout $x \geqslant 0$, $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 1$ donc $e^x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2} \geqslant \dfrac{x^2}{2}$

$x \geqslant 0 \Rightarrow e^x > \dfrac{x^2}{2}$

$x > 0 \Rightarrow \dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = e^x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

or $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ (avec $X = \frac{x}{n}$)

D'autre part : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n = +\infty$ et $\frac{1}{n^n} > 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}$

► $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

On pose $t = -x$ (lorsque x tend vers $+\infty$, t tend vers $-\infty$)

$x^n e^x = (-t)^n e^{-t} = (-1) \times \frac{t^n}{e^t}$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^x = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(-\frac{t^n}{e^t}\right) = 0$

IV. Dérivée de e^u - Primitive associée

Si u est définie et dérivable sur I de $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et $f'(x) = \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

De manière générale : $(e^u)' = u'e^u$ *(Fonction composée)*