Exercices de mathématiques sur les suites numériques en terminale : Guesmi.B

Exercices de maths en terminale

les suites numériques : exercices de maths en terminale S .

La liste de tous les **exercices de maths** sur **les suites numériques** en classe de**terminale S** .
Ces **exercices de mathématiques** en **terminale** disposent de leur **corrigé**, vous pourrez donc vérifier vos résultats sur ces **exercices de mathématiques** portant sur les suites numériques en consultant le **corrigé des exercices de mathématiques**.

Il y a 26 exercices sur les suites numériques.

Les suites numeriques en terminale

Exercice :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \geq u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n}$.

1. *a.* Calculer u_1.
b. Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} sont respectivement égales à : 45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 5
621.
A partir de ces données conjecturer la nature de la suite (d_n) définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$. Justifier que la somme des n prem
termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Valider la conjecture émise à la question 1. *b.*.

1. a. $u_1 = \left(1+\frac{2}{1}\right)u_0 + \frac{6}{1} = 3\times 5 + 6 = 21$

b. $d_0 = u_1 - u_0 = 16$ $\quad d_1 = u_2 - u_1 = 24$ $\quad d_2 = u_3 - u_2 = 32$ $\quad d_3 = u_4 - u_3 = 40$
$d_4 = u_5 - u_4 = 48$ $\quad d_5 = u_6 - u_5 = 56$ $\quad d_6 = u_7 - u_6 = 64$ $\quad d_7 = u_8 - u_7 = 72$
$d_8 = u_9 - u_8 = 80$ $\quad d_9 = u_{10} - u_9 = 88$ $\quad d_{10} = u_{11} - u_{10} = 96$
d_n serait une suite arithmétique de raison 8.

2. $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = n\,v_0 + [1 + 2 + \ldots + (n-1)]\times 8$

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = 16\,n + \frac{n(n-1)}{2}\times 8$$

$v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = 16\,n + 4\,n^2 - 4\,n$
$v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = 4\,n^2 + 12\,n.$

<u>Il est possible de le démontrer par récurrence.</u>
Vérification : le premier terme de la suite est $v_0 = 16$
La somme des 1 premiers termes de la suite se limite à v_0 ; $4\times 1^2 + 12\times 1 = 16 = v_0$. La propriété est vraie pour $n = 1$

Hérédité : montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire :
c'est-à-dire que si $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = 4\,n^2 + 12\,n$ alors $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} + v_n = 4\,(n+1)^2 + 12\,(n+1)$
soit $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} + v_n = 4\,n^2 + 20\,n + 16$

$v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} + v_n = 4\,n^2 + 12\,n + v_n$ or $v_n = v_0 + n\,r = 16 + 8\,n$
$v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} + v_n = 4\,n^2 + 12\,n + + 6 + 8\,n$ soit $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} + v_n = 4\,n^2 + 20\,n + 16$
pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

3. Vérification : $u_0 = 5$ et $4\times 0^2 + 12\times 0 + 5 = 0$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité : montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire :
c'est-à-dire que si $u_n = 4\,n^2 + 12\,n + 5$ alors $u_{n+1} = 4\,(n+1)^2 + 12\,(n+1) + 5 = 4\,n^2 + 20\,n + 21$

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{2}{n+1}\right)u_n + \frac{6}{n+1} \text{ or } u_n = 4\,n^2 + 12\,n + 5 \text{ donc } u_{n+1} = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)(4\,n^2 + 12\,n + 5) + \frac{6}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+3)(4\,n^2 + 12\,n + 5) + 6}{n+1} \text{ soit } u_{n+1} = \frac{4\,n^3 + 12\,n^2 + 5\,n + 12\,n^2 + 36\,n + 15 + 6}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{4\,n^3 + 24\,n^2 + 41\,n + 21}{n+1} \text{ or } (4\,n^2 + 20\,n + 21)(n+1) = 4\,n^3 + 20\,n^2 + 21\,n + 4\,n^2 + 20\,n + 21 = 4\,n^3 + 24\,n^2 + 41\,n + 21$$

$$\text{donc } \frac{4\,n^3 + 24\,n^2 + 41\,n + 21}{n+1} = 4\,n^2 + 20\,n + 21$$

soit $u_{n+1} = 4\,n^2 + 20\,n + 21$
pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

4. $d_n = u_{n+1} - u_n = 4\,n^2 + 20\,n + 21 - (4\,n^2 + 12\,n + 5)$ donc $d_n = 8\,n + 16$;
d_n est de la forme $d_0 + n\,r$ donc d_n est une suite arithmétique de raison 8.

Suites - somme des cubes. en terminale

Exercice :

-

-

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par S_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs :

$$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3$$

Par exemple, $S_3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 = 153$.

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = 2n^4 - n^2$$

2. Déterminer n tel que :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3 = 913276$$

<u>Formulaire pour cet exercice</u> :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Etude suite récurrente. en terminale

Exercice : Etude d'une suite récurrente

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

1. Étudier les variations de f.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

   c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

   d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$|u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$$

   En déduire la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

1. $f = h \circ g$ où $g : x \in [-1, +\infty[\mapsto \dfrac{1+x}{2}$ et $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$.

Comme g est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et h est strictement croissante sur $g([-1, +\infty[) = \mathbb{R}_+$, on en déduit, par composition, que f est croissante sur $[-1, +\infty[$.

2. a. On considère la propriété $\wp$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$0 < u_n < u_{n+1} < 1$$

- Comme $u_1 = \sqrt{\dfrac{1+u_0}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on a bien :

$$0 < u_0 < u_1 < 1$$

D'où $\wp(0)$. La propriété $\wp$ est initialisée au rang 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\quad 0 < u_n < u_{n+1} < 1$

Comme f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ (puisqu'elle l'est sur $[-1, +\infty[$), on a :

$$f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$$

C'est-à-dire : $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$

D'où : $\quad 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$

Ce qui est $\wp(n+1)$.

La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 0.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit : $\wp(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire : $\quad 0 < u_n < u_{n+1} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b. On vient de voir que la suite (u_n) est croissante et majorée (par 1), donc elle converge.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

Limite de suite numériques. en terminale

Exercice :

Dans chacun des cas, étudier la limite de la suite proposée :

$$a_n = \frac{5n^3 + 2n - 4}{n^3 + n^2 + 1}$$

$$b_n = \frac{2\sin n + 3}{n+1}$$

$$c_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$$

CORRECTION

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 5$; $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$; $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 1$

Suites et fonctions. en terminale

Exercice n° 1 : suites arithmétiques et géométriques .

1. Soit la suite arithmétique (U_n) de raison r=-2 et telle que $U_{10}=25$.

a. Calculer U_{50}.

b. Calculer $S_{10}=U_1+U_2+...+U_{10}$.

2. Soit la suite géométrique (V_n) de raison $q=\frac{1}{2}$ et telle que $V_8=\frac{3}{8}$.

a. Calculer V_{20}.

b. Calculer $S_9=V_1+V_2+...+V_9$.

Exercice n° 2 : suites du type Un=f(n).

Calculer les limites des suites suivantes :

a. $U_n=\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$

b. $U_n=\frac{3n-4}{2n+1}$

c. $U_n=ln(1+\frac{1}{n})$

d. $U_n=\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

e. $U_n=\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice n° 3 : théorème de comparaison.

Calculer les limites des suites suivantes :

a. $U_n=1+\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

b. $U_n=\frac{n+\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$

Exercice n° 4 : croissances comparées.

Calculer les limites des suites suivantes en utilisant le théorème des croissances comparées.

a. $U_n=\frac{n^2}{2^n}$

b. $U_n = 2^n - n^3$

c. $U_n = \frac{n}{ln(n^2+1)}$

Exercice n° 5 : croissances comparées.

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

a. $U_n = \frac{n}{n+1}$

b. $U_n = n - ln(1+n)$

c. $U_n = \frac{1 \times 3 \times ..... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ...... \times .... \times 2n}$

Exercice n° 6 : récurrence .

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}.$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 2}$$

Exercice n° 7 : récurrence .

Soit (U_n). la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}.$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 3 - 2^n}.$$

Exercice n° 8 : récurrence .

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

a. Calculer $S_1 \; S_2 , S_3 , S_4$.

b. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

c. Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ S_n = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}}.$$

CORRECTION

1. Soit la suite arithmétique (U_n) de raison r=-2 et telle que $U_{10}=25$.

a. Calculer $U_{50}=U_{10}+40\times r=25+40\times(-2)=-55$.

b. Calculer $S_{10}=U_1+U_2+...+U_{10}=\frac{10\times(U_1+U_{10})}{2}$

Or $U_{10}=U_1+9r \Rightarrow U_1=U_{10}-9r=25-9\times(-2)=43$.

$$S_{10}=\frac{10\times(U_1+U_{10})}{2}=\frac{10\times(43+25)}{2}=340$$

2. Soit la suite géométrique (V_n) de raison $q=\frac{1}{2}$ et telle que $V_8=\frac{3}{8}$.

a. Calculer $V_{20}=V_8\times q^{12}=\frac{3}{8}\times(\frac{1}{2})^{12}=\frac{3}{32768}$.

b. Calculer $S_9=V_1+V_2+...+V_9=\frac{V_{10}-V_1}{q-1}=\frac{\frac{3}{8}\times(\frac{1}{2})^2-V_1}{\frac{1}{2}-1}$.

Or $V_1=\frac{V_8}{(\frac{1}{2})^7}=\frac{3\times2^7}{8}=48$

Donc $S_9=\frac{\frac{3}{32}-48}{-\frac{1}{2}}=\frac{1533}{16}$

Exercice n° 2 : suites du type Un=f(n).

Calculer les limites des suites suivantes :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=1$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n-4}{2n+1}=\frac{3}{2}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty} ln(1+\frac{1}{n})=0$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$: sans limite

Exercice n° 3 : théorème de comparaison.

Calculer les limites des suites suivantes :

a. $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 1$

b. $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n + \cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = +\infty$

Exercice n° 4 : croissances comparées.

Calculer les limites des suites suivantes en utilisant le théorème des croissances comparées.

a. $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = +\infty$

b. $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 2^n - n^3 = +\infty$

c. $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{ln(n^2+1)} = +\infty$

Exercice n° 5 : croissances comparées.

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

a. $U_n = \frac{n}{n+1}$

soit $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$

donc (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$

b. $U_n = n - ln(1+n)$

soit $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n = n+1 - ln(n+2) - n + ln(n+1)$
$= 1 + ln(\frac{n+1}{n+2}) = 1 + ln(1 - \frac{1}{n+2})$

La suite définie par $V_n = ln(1 - \frac{1}{n+2})$ est croissante et tend vers 0

donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}, 1 + V_n \geq 0$

A partir de $n_0 \in \mathbb{N}$, la suite étudiée est croissante.

c. $U_n = \dfrac{1\times 3\times \dots\dots \times(2n-1)}{2\times 4\times \dots\dots \times \dots\times 2n}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$

Nous pouvons donc calculer le rapport :

Pour

Donc la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Suites numériques en terminale

Exercice :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont o terme.

   b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

   c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

CORRECTION

1. Si $n=0$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$ devient :

$u_1=\frac{1}{3}u_0+0-2$ soit $u_1=\frac{1}{3}-2=-\frac{5}{3}$;

Si $n=1$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$ devient :

$u_2=\frac{1}{3}u_1+1-2$ soit $u_2=-\frac{14}{9}$.

Si $n=2$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$ devient :

$u_3=\frac{1}{3}u_2+2-2$ soit $u_3=-\frac{14}{27}$.

2. **a.** Si $n=3$, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$ devient :

$u_4=\frac{1}{3}u_3+3-2$ soit $u_4=\frac{67}{81}$, donc $u_4\geqslant 0$.

La propriété est vraie pour $n=4$.

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n\geqslant 4$, si $u_n\geqslant 0$ alors $u_{n+1}\geqslant 0$.

$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$; comme $n\geqslant 4$, $n-2>0$, de plus $\frac{1}{3}u_n\geqslant 0$.

La somme de nombres positifs étant un nombre positif, donc

$\frac{1}{3}u_n+n-2\geqslant 0$ soit $u_{n+1}\geqslant 0$.

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel

$n\geqslant 4$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 5$, $u_n\geqslant n-3$.

$u_5=\frac{1}{3}u_4+4-2=\frac{553}{243}$, soit $u_5\approx 2{,}28$ donc $u_5\geqslant 5-3$.

La propriété est vraie pour $n=5$;

Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout $n\geqslant 5$, si $u_n\geqslant n-3$ alors $u_{n+1}\geqslant n+1-3$ ou encore $u_{n+1}\geqslant n-2$.

$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$, $n\geqslant 5$ donc $u_n\geqslant n-3$ donc

$u_n+1\geqslant\frac{1}{3}(n-3)+n-2$ soit $u_{n+1}\geqslant\frac{1}{3}n+n-1-2$; comme $n\geqslant 5$,

$\frac{1}{3}n\geqslant 1$ donc $u_{n+1}\geqslant 1+n-1-2$ soit $u_{n+1}\geqslant n-2$.

La propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel

$n\geqslant 5$.

Remarque : On peut également montrer que l'on vient de démontrer que pour $n\geqslant 4$, $u_n\geqslant 0$, d'où $\frac{1}{3}u_n\geqslant 0\Rightarrow\frac{1}{3}u_n+n-2\geqslant n-2\iff u_{n+1}\geqslant n-2\iff u_{n+1}\geqslant(n+1)-3\iff u_n\geqslant n-3$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-3)=+\infty$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 5$, $u_n\geqslant n-3$ donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

3. **a.** $v_{n+1}=-2u_n+1+3(n+1)-\frac{21}{2}\iff$

$v_{n+1}=-2\left(\frac{1}{3}u_n+n-2\right)+3n+3-\frac{21}{2}$;

$v_{n+1}=-\frac{2}{3}u_n-2n+4+3n+3-\frac{21}{2}=-\frac{2}{3}u_n+n-\frac{7}{2}\iff$

$v_{n+1}=\frac{1}{3}\times(-2u_n)+\frac{1}{3}\times 3n-\frac{1}{3}\times\frac{21}{2}$;

$v_{n+1}=\frac{1}{3}\left(-2u_n+3n-\frac{21}{2}\right)\iff v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=-2u_0+3\times 0-\frac{21}{2}=-\frac{25}{2}$.

Donc $v_n=-\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Exercice : Moyennes arithmétique et géométrique, comparaison

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

On appelle moyenne arithmétique des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le réel A défini par :

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

On appelle moyenne géométrique des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le réel G défini par :

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Le but de l'exercice est de prouver que : $G \leqslant A$

1. Démontrer que pour tout réel x : $\mathrm{e}^{x-1} \geqslant x$
2. En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\mathrm{e}^{\frac{a_i}{A}-1} \geqslant \frac{a_i}{A}$
3. En déduire que : $1 \geqslant \frac{G^n}{A^n}$

   Conclure.

Divergence cos et sin. en terminale

Exercice : Divergence des suite (cos n) et (sin n)

Démontrer que les suites $(\sin n)$ et $(\cos n)$ divergent.

CORRECTION

Supposons que la suite $(\cos n)$ converge vers un certain réel $\ell \in [-1, 1]$.

Nous faisons un raisonnement par l'absurde.

On sait que : $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$

Les suites $(\cos(n+1))$ et $(\cos n \cos 1)$ ont, par hypothèse, une limite.

On en déduit, par différence que la suite $(\sin n \sin 1)$ aussi.

Résultats historiques. en terminale

Exercice : Quelques résultats historiques (R.O.C)

Démontrer que :

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
3. Si une suite converge, alors sa limite est unique.
4. La suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite.
5. Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.
6. Toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire et a pour limite un entier relatif.
7. Toute suite divergente vers $+\infty$ est minorée.

CORRECTION

1. Notons ℓ la limite de la suite (u_n) et I l'intervalle $]\ell - 1,\ \ell + 1[$. I est bien un intervalle ouvert centré en ℓ.

   Comme (u_n) converge, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite (u_n) sont dans I. Autrement dit :

$$n \geqslant N \ \Rightarrow\ \ell - 1 < u_n < \ell + 1$$

   - Si $N = 0$, alors c'est fini, (u_n) est bornée par les réels $\ell - 1$ et $\ell + 1$.
   - Si $N \geqslant 1$, alors notons A l'ensemble $\{u_0, \dots, u_{N-1}, \ell - 1, \ell + 1\}$, M le plus grand élément de A et m son plus petit élément. Ainsi (u_n) est bornée par les réels m et M.

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un rang N pour lequel :

$$u_N > A$$

   Mais comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant N$, on aura :

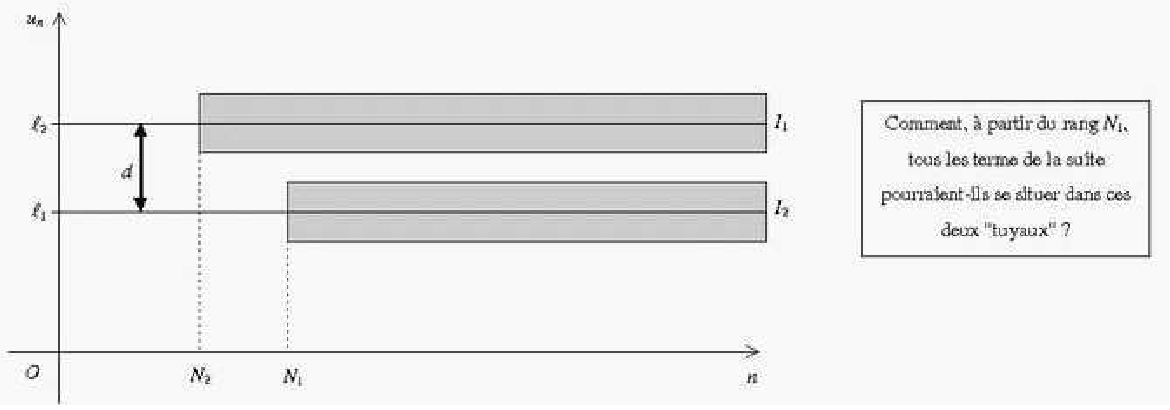
$$u_n \geqslant u_N > A$$

   Donc tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A, +\infty[$ à partir du rang N.

   Comme ceci est valable pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit bien que (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite (u_n) admette deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < \ell_2$.

   Notons $d = \ell_2 - \ell_1$.
   Comme (u_n) converge vers ℓ_1, à partir d'un certain rang N_1, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert I_1 de centre ℓ_1 et de rayon $\dfrac{d}{3}$.
   De même, comme (u_n) converge vers ℓ_2, à partir d'un certain rang N_2, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert I_2 de centre ℓ_2 et de rayon $\dfrac{d}{3}$.
   Donc à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, tous les termes de la suite sont simultanément dans I_1 et I_2. Or ces deux intervalles sont disjoints (ils ne se chevauchent pas). Ce qui n'est pas possible.
   Ceci prouve l'unicité de la limite.
   Illustration :



Exercice : Etude d'une suite définie de façon implicite

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction polynôme P_n, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$$

1. Étudier, pour tout $n \geqslant 2$, le sens de variation de P_n sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $P_n(0)$ et $P_n(1)$.

   En déduire que, pour $n \geqslant 2$, P_n admet une unique racine α_n dans $]0, 1[$. (On donnera la valeur exacte de α_2)

2. Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad P_n(\alpha_{n+1}) < 0$

   En déduire le sens de variation de la suite (α_n). La suite (α_n) converge-t-elle ?

3. a. Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a :

$$P_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$$

   En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad \alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$

   b. Justifier, pour tout $n \geqslant 2$, les inégalités suivantes :

$$\alpha_n < \alpha_2 < 1$$

$$0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{n+1}$$

   c. En déduire la valeur de la limite de la suite (α_n).

CORRECTION

1. La fonction P_n étant polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

On a donc : $P_n' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où : P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(La stricte monotonie sur $\mathbb{R}_+$ découle du fait que la dérivée ne s'annule qu'en un seul point sur $\mathbb{R}_+$)

De plus, P_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$P_n(0)P_n(1) = -1 \times (n-1) < 0$$

On en déduit (théorème de bijection appliqué à P_n sur $]0, 1[$) que P_n admet une unique racine α_n dans $]0, 1[$.

Étude du cas $n = 2$: on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_2(x) = x^2 + x - 1$$

Les racines de P_2 sont : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in]0, 1[$

On a donc : $\alpha_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

2. On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{n+1}^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n+1}^k + \alpha_{n+1}^{n+1} - 1 = P_n(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{n+1}$$

Or, $P_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ et $\alpha_{n+1}^{n+1} > 0$, d'où : $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$

De plus, $P_n(\alpha_n) = 0$. L'inégalité ci-dessus s'écrit :

$$P_n(\alpha_{n+1}) < P_n(\alpha_n)$$

Comme P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient, pour tout $n \geqslant 2$:

Suite récurrente auxiliaire. en terminale

Exercice : Etude d'une suite récurrente à l'aide d'une suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 9e \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}\text{, pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{9}\right)$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et la premier terme v_0.
2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
3. Étudier la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{9}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{u_n}}{3}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{u_n}{9}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{9}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Son premier terme est $v_0 = \ln(e) = 1$.

2. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = q^n v_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or : $u_n = 9\,e^{v_n}$

D'où : $u_n = 9\,e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

3. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$)

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 9$

Suite numériques et croissance comparée en terminale

Exercice n° 1 : suites arithmétiques et géométriques .

1. Soit la suite arithmétique (U_n) de raison r=-2 et telle que $U_{10} = 25$.

a. Calculer U_{50}.

b. Calculer $S_{10} = U_1 + U_2 + ... + U_{10}$.

2. Soit la suite géométrique (V_n) de raison $q = \frac{1}{2}$ et telle que $V_8 = \frac{3}{8}$.

a. Calculer V_{20}.

b. Calculer $S_9 = V_1 + V_2 + ... + V_9$.

CORRECTION

Exercice n° 2 : suites du type Un=f(n).

Calculer les limites des suites suivantes :

a. $U_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$

b. $U_n = \frac{3n-4}{2n+1}$

c. $U_n = ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

d. $U_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

e. $U_n = \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice n° 3 : théorème de comparaison.

Calculer les limites des suites suivantes :

a. $U_n = 1+\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

b. $U_n = \frac{n+\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$

Exercice n° 4 : croissances comparées.

Calculer les limites des suites suivantes en utilisant le théorème des croissances comparées.

a. $U_n = \frac{n^2}{2^n}$

b. $U_n = 2^n - n^3$

c. $U_n = \frac{n}{ln(n^2+1)}$

Exercice n° 5 : croissances comparées.

Etudier le sens de variation des suites suivantes :

a. $U_n = \frac{n}{n+1}$

b. $U_n = n - ln(1+n)$

c. $U_n = \frac{1\times3\times.....\times(2n-1)}{2\times4\times......\times....\times2n}$

Exercice n° 6 : récurrence .

Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0=2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1}=\sqrt{U_n+2} \end{cases}.$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n<2}$$

Exercice n° 7 : récurrence .

-

Soit (U_n). la suite définie par

$$\begin{cases} U_0=2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1}=2U_n-3 \end{cases}.$$

Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n=3-2^n}.$$

Exercice n° 8 : récurrence .

-

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n=1^2+2^2+3^2+....+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

a. Calculer S_1 S_2 ,S_3 ,S_4 .

b. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n .

c. Démontrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ S_n=\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}}.$$

-

Etude d'une suite numérique. en terminale

Exercice :

-

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

3. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (v_n).
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Bac-suites numériques. en terminale

Exercice :

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n, \; u_{n+1}$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Qu

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre enti

$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \;\text{ et }\; w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
1	3	5	7	9	11	13

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou a sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

Extrait bac - suites géométriques et arithmétiques. en terminale

Exercice :(Algerie)

Soient (U_n) et (V_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = 9 \,,\, U_{n+1} = \tfrac{1}{2} U_n - 3 \,,\, V_n = U_n + 6$$

1.a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique à termes positifs .

b. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ en fonction de n et en déduire la somme $S'_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ en fonction de n .

c. déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim_{n \to +\infty} S'_n$.

2. On définit la suite (W_n) par $W_n = \ln V_n$ pour tout entier n .

Montrer que la suite (W_n) est une suite arithmétique .

Calculer $S''_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$ en fonction de n et déterminer $\lim_{n \to +\infty} S''_n$

3. Calculer le produit $P_n = V_0 \times V_1 \times .... \times V_n$ en fonction de n.

En déduire $\lim_{n \to +\infty} P_n$

Fonctions et suites. en terminale S

Exercice :

On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, par :

$$f(x) = x + 3 + \frac{9}{x-1}$$

On désigne par C_f sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$; en $+\infty$; en 1 à gauche et en 1 à droite.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer la fonction dérivée f' de f. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$$

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer, soigneusement, la courbe C_f représentant la fonction f avec son asymptote Δ.
6. Soit k un réel.

   Discuter, selon les valeurs de k, le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = k$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Notion de suite. en terminale

Exercice :

Soient (U_n) une suite croissante et majorée

et (V_n) une suite décroissante et minorée.

Les suites (U_n) et (V_n) ont-elles nécessairement la même.

Comportement asymptotique. en terminale

Exercice :Comportement asymptotique des suites géométriques

1. Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

   pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a : $(1+x)^n \geqslant 1+nx$

2. Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

   - Si $a \in]1\ ;+\infty[$ alors (u_n) est divergente (vers $+\infty$)
   - Si $a = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
   - Si $a \in]-1\ ;1[$ alors (u_n) est convergente vers 0
   - Si $a \in]-\infty\ ;-1]$ alors (u_n) n'a pas de limite.

CORRECTION

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On considère la propriété $\wp(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

Remarque : on peut étendre cette inégalité à $x \in]-1, +\infty[$

$$\wp(n) : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

- On a $\wp(0)$ puisque $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

Comme $x > 0$, on a aussi $1 + x > 0$. En multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1 + x)$, on obtient :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1 + nx)(1 + x)$$

Or : $(1 + nx)(1 + x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$

Comme $nx^2 \geqslant 0$, on a : $(1 + nx)(1 + x) \geqslant 1 + (n+1)x$

D'où : $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$

Ce qui est $\wp(n+1)$.

Bilan : on a $\wp(0)$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\wp(n)$

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

2. Étude du comportement asymptotique des suites géométriques.

- Supposons $a \in]1 ; +\infty[$. Posons $x = a - 1$. Alors $x \in]0 ; +\infty[$.

D'après l'inégalité de Bernoulli :

$$a^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + nx = +\infty$. Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$$

La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

- Si $a = 1$, le résultat est évident.
- Supposons maintenant $a \in]-1 ; 1[$.

Si $a = 0$, le résultat est évident.

Si $a \neq 0$, posons : $a' = \dfrac{1}{|a|}$

Ainsi : $a' \in]1 ; +\infty[$

D'après le résultat précédent : $\lim\limits_{n \to +\infty} a'^n = +\infty$

Par passage à l'inverse, nous obtenons : $\lim\limits_{n \to +\infty} |a|^n = 0$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$

La suite (u_n) converge donc vers 0.

Exercice : Séries de Riemann **(hors programme)**

On appelle "série" toute suite définie par une somme.

Les séries de Riemann sont les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

Nous allons étudier le comportement de ces séries pour certaines valeurs entières de α.

0. Démontrer que la suite (u_n) est croissante. (Quelle que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{N}$)

1. Dans cette question, $\alpha = 1$. On a donc :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(Cette série porte encore le nom d'"harmonique")

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n} \geqslant \frac{1}{2} + u_n$$

b. En déduire que (u_n) diverge.

2. Dans cette question, on suppose $\alpha = 2$. On a donc :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

a. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b. En déduire que (u_n) est majorée par 2.

Pour $\alpha = 2$, la suite (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

3. Dans cette question, on suppose $\alpha \geqslant 3$.

Démontrer que (u_n) converge.

CORRECTION

On appelle "série" toute suite définie par une somme.

Les séries de Riemann sont les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Nous allons étudier le comportement de ces séries pour certaines valeurs entières de α.

0. Démontrer que la suite (u_n) est croissante. (Quelle que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{N}$)

1. Dans cette question, $\alpha = 1$. On a donc :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(Cette série porte encore le nom d'"harmonique")

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n} \geqslant \frac{1}{2} + u_n$$

b. En déduire que (u_n) diverge.

2. Dans cette question, on suppose $\alpha = 2$. On a donc :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

a. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b. En déduire que (u_n) est majorée par 2.

Pour $\alpha = 2$, la suite (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

3. Dans cette question, on suppose $\alpha \geqslant 3$.

Démontrer que (u_n) converge.

Fonctions et suites recurrentes. en terminale

Exercice :

Soit I l'intervalle [0. 1]. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$

1. Etudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

   Montrer que, pour tout n, u_n appartient à I.
   On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode

3. *a.* Représenter graphiquement la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'u
graphique 10 cm.
b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0 ; A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 ; u_1;
et u_3.
Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

c. Etablir la relation $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

e. Prouver que la limite L de la suite (u_n) vérifie $L = f(L)$ et calculer L.

Deuxième méthode

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

4. *a.* Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

   b. Calculer v_0 et exprimer v_n fonction de n.

   c. Exprimer u_n en fonction de v_n ; puis en fonction de n.

   d. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite.

CORRECTION

1. f est définie dérivable sur $[0 ; 1]$, $f'(x) = \dfrac{10}{(x+4)^2}$ donc $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $[0 ; 1]$

Pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ donc $\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ donc pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$

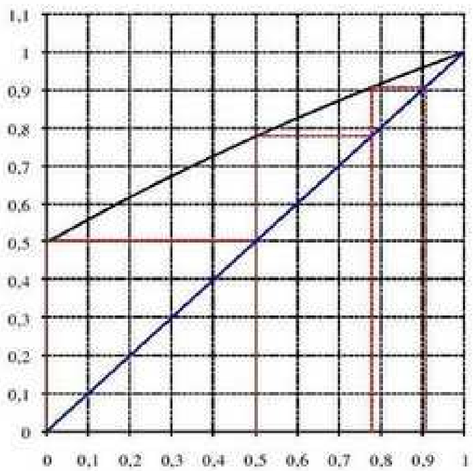
2. La propriété est vraie pour $n = 0$
Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n, si $u_n \in$ I alors $u_{n+1} \in$ I
$u_n \in$ I donc d'après la question 1, $f(u_n) \in$ I or $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $u_{n+1} \in$ I
La propriété est héréditaire pour $n + 1$ donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Première méthode

3. *a. b.* A_0 a pour coordonnées $(u_0 ; 0)$
Soit B_1 le point de la courbe représentative de f d'abscisse u_0
B_1 a pour ordonnée $y = f(u_0) = u_1$

Soit C_1 le point de la droite d'équation $y = x$ d'ordonnée u_1.
C_1 appartient à la droite d'équation $y = x$ donc a pour abscisse $x = u_1$
Soit A_1 le point d'abscisse u_1 d'ordonnée u_1
On construit de même $B_2\, C_2$, A_2 puis $B_3\, C_3$, A_3

Apparemment la suite semble strictement croissante et paraît converger vers 1.



c. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}$

or $(1 - u_n)(u_n + 2) = -u_n^2 - u_n + 2$

donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

or $0 \leq u_n \leq 1$ donc $\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante.

Série harmonique alternée. en terminale

Exercice : Série harmonique alternée

Soit (S_n) la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$

Le but de cet exercice est de démontrer que la suite (S_n) converge vers ln 2.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par :

$$u_n = S_{2n} \text{ et } v_n = S_{2n+1}$$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

On note ℓ leur limite commune. Démontrer que (S_n) converge aussi vers ℓ.

3. Dans cette question, $x \in \mathbb{R}_+$.

   a. Démontrer que : $$\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1} = \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x}$$

   b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

   $$f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

   Calculer la dérivée f' de f et préciser son signe sur $\mathbb{R}_+$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

   Calculer $f(0)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

   $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \leqslant \ln(1+x)$$

   c. Démontrer par une méthode analogue à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

   $$\ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

   d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$u_n \leqslant \ln 2 \leqslant v_n$$

   Puis que : $$\ell = \ln 2$$

CORRECTION

1. On a : $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ et $S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

   $$u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante}$$

   $$v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leqslant 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante}$$

   Ce qui prouve que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Notons ℓ leur limite commune.

Fonctions et suites numériques. en terminale S

Exercice :

Moyenne arithmético-géométrique. en terminale

Exercice : Moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$a_0 = a \ ; \ b_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Démontrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

CORRECTION

Il suffit de montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2}{4} - a_n b_n$$

D'où : $$(a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1}) = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geqslant 0 \qquad (1)$$

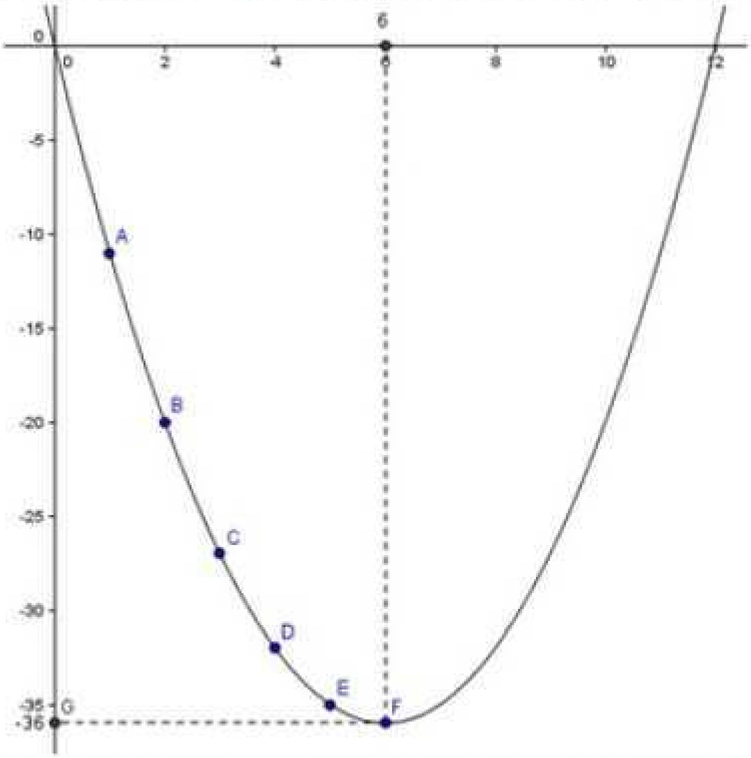
Et comme (a_n) et (b_n) sont positives (faire une récurrence), il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Suites numériques et représentations graphiques . en terminale

Exercice :

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$

1. Calculer les six premiers termes de cette suite.
2. On a représenté ci-dessous les termes de la suite dans un repère et tracé une courbe qui passe par ces points.



   Faire une conjecture sur l'expression de la fonction représentée par cette courbe puis sur l'expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer la conjecture de la question précédente sur l'expression de u_n en fonction de n.

CORRECTION

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$

1. $u_0 = 0$; $u_1 = -11$; $u_2 = -20$; $u_3 = -27$; $u_4 = -32$ et $u_5 = -35$
2. La conjecture est : $u_n = (n-6)^2 - 36$
3. On note $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : $u_n = (n-6)^2 - 36$
   Initialisation :
   $u_0 = 0$
   $(0-6)^2 - 36 = 36 - 36 = 0$
   donc $(\mathcal{P}_0)$ est donc vraie.
   Caractère héréditaire :
   On suppose que $(\mathcal{P}_k)$ est vraie et donc que $u_k = (k-6)^2 - 36$
   Alors $u_{k+1} = u_k + 2k - 11 = (k-6)^2 - 36 + 2k - 11 = k^2 - 10k - 11$
   de plus $(k+1-6)^2 - 36 = (k-5)^2 - 36 = k^2 - 10k - 11$
   donc $u_{k+1} = (k+1-6)^2 - 36$
   donc $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie.
   Conclusion :
   On a montré que $(\mathcal{P}_0)$ était vraie et que si $(\mathcal{P}_k)$ est vraie alors $(\mathcal{P}_{k+1})$ l'est aussi.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie donc $u_n = (n-6)^2 - 36$.

Suite linéaire. en terminale

Exercice : Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n$

CORRECTION

On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : \text{pour tout entier } m \leqslant n,\ u_m = 2^m$$

- Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, on a $\wp(1)$.
- Montrons que, pour tout $n \geqslant 1$: $\qquad \wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

  Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\wp(n)$: $\quad$ pour tout entier $m \leqslant n$, $u_m = 2^m$

  Alors : $\qquad u_{n+1} = 5 \times 2^n - 6 \times 2^{n-1} = 10 \times 2^{n-1} - 6 \times 2^{n-1} = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$

  D'où $\wp(n+1)$.

Bilan :on a $\wp(1)$ et (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$) donc on a : $\wp(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où :

$$\text{pour tout entier } m,\ u_m = 2^m$$

Exercice 7 *Moyenne arithmético-géométrique*

Il suffit de montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\qquad a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \dfrac{a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2}{4} - a_nb_n$

D'où : $\qquad (a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1}) = \left(\dfrac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geqslant 0 \qquad (1)$

Et comme (a_n) et (b_n) sont positives (faire une récurrence), il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$